



UNIVERSIDAD DE JAÉN

**FACULTAD DE CIENCIAS
EXPERIMENTALES
DEPARTAMENTO DE
MATEMÁTICAS**

TESIS DOCTORAL

**EL FLUJO LAGRANGIANO DE LA
CURVATURA MEDIA**

**PRESENTADA POR:
ANA MARÍA LERMA FERNÁNDEZ**

**DIRIGIDA POR:
DR. D. ILDEFONSO CASTRO LÓPEZ**

JAÉN, 9 DE ABRIL DE 2013

ISBN 978-84-8439-734-2



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Facultad de Ciencias Experimentales
Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

•

EL FLUJO LAGRANGIANO
DE LA CURVATURA MEDIA

Presentada por:
Ana María Lerma Fernández

Dirigida por:
Ildefonso Castro López

El flujo lagrangiano de la curvatura media

Memoria presentada por la Licenciada Ana María Lerma Fernández, aspirante al grado de Doctor en Matemáticas, realizada en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén, bajo la dirección de Ildefonso Castro López.



UNIVERSIDAD DE JAÉN, 2013

Ana María Lerma Fernández
Licenciada en Matemáticas
Aspirante al grado de Doctor

Dr. Ildefonso Castro López
Profesor Titular de Universidad
Director de Tesis

Esta tesis doctoral se ha desarrollado dentro del programa oficial de Máster Interuniversitario y Doctorado en Matemáticas MO2006-00047, en la Universidad de Jaén, con mención oficial de calidad MCD2006-00531.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES
UNIVERSIDAD DE JAÉN



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Dr. Ildefonso Castro López, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén.

CERTIFICA:

Que el trabajo recogido en la presente memoria, titulada [El flujo lagrangiano de la curvatura media](#), presentada por doña Ana María Lerma Fernández ha sido realizada bajo mi dirección y autorizo su presentación y defensa para optar al grado de Doctor en Matemáticas por la Universidad de Jaén.

Jaén, febrero de 2013.

Fdo.: Ildefonso Castro López

A mis padres
A mi hermana

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar me gustaría darle las gracias a Ildefonso por enseñarme tantas cosas y por ser una excelente persona, sin él esto no hubiese sido posible.

Gracias a mi familia: a mis padres por estar siempre ahí y poner a mi hermana y a mí ante cualquier otra cosa, y a mi hermana por estar casi las veinticuatro horas del día pegada a mí, no sé qué haría sin ella.

Gracias a Miguel por apoyarme siempre y por sacarme una carcajada hasta en los momentos más tristes.

Gracias a mi amiga Lidia que, a pesar de nunca acordarse de mi cumpleaños y no entender qué es eso de las lagrangianas, siempre se ha interesado y confiado en mí.

Gracias a mi “amiguita” Asun, José Luis, Elena, María Moreno, Auxi y Sara. Aunque no he pasado el tiempo que me gustaría con vosotros, sois una muestra de que en la época de estudiante se encuentran a los mejores amigos.

Muchas gracias también a los compañeros que han pasado por la sala 078: Ana Del Arco, Anabel, Ana Isabel, Bienve, Gregorio, Inma, Jaime, Lucía, Mamen, Patricia, Pilar, Rafa, Sergio y Vero. En especial, me gustaría darle las gracias a Pilar por ser la que ha estado conmigo desde mi primer día de becaria y a Ana Del Arco por soportar “mis nervios” estos últimos meses.

Muchas gracias a Fernando por reírse “conmigo” en tantos cafés, y por supuesto, por resolver mis dudas de Geología.

Por último, pero no menos importante, me gustaría darle las gracias a todos los miembros del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Jaén por su gran acogida.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	I
I PRELIMINARES	1
1. FLUJO DE LA CURVATURA MEDIA	3
1.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD	3
1.2. SINGULARIDADES	8
1.3. SOLUCIONES TIPO SOLITÓN	12
1.3.1. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES: SUBVARIETADES AUTOCONTRÁCTILES Y SUBVARIETADES AUTOEXPANSIVAS	12
1.3.2. SOLITONES DE TRASLACIÓN	16
1.4. RESULTADOS DESTACADOS EN EL AMBIENTE EUCLÍDEO	17
2. CONTEXTO LAGRANGIANO	21
2.1. SUBVARIETADES LAGRANGIANAS	21
2.2. FLUJO LAGRANGIANO	24
2.2.1. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES LAGRANGIANAS	25
2.2.2. SOLITONES DE TRASLACIÓN LAGRANGIANOS	28
II RESULTADOS	31
3. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES LAGRANGIANAS EN \mathbb{C}^2	33

3.1. CONSTRUCCIÓN CON CURVAS ESFÉRICAS E HIPERBÓLICAS	34
3.2. NUEVOS EJEMPLOS	37
3.3. CLASIFICACIÓN DE LAS ESTACIONARIAS HAMILTONIANAS	48
4. SOLITONES DE TRASLACIÓN LAGRANGIANOS EN \mathbb{C}^2	55
4.1. CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES LAGRANGIANAS CON CURVAS PLANAS	56
4.2. NUEVOS EJEMPLOS	59
4.3. CARACTERIZACIÓN DE LOS NUEVOS EJEMPLOS Y CLASIFICACIÓN DE LAS ESTACIONARIAS HAMILTONIANAS	66
5. EL TORO DE CLIFFORD COMO SUPERFICIE AUTOCONTRÁCTIL	77
5.1. EJEMPLOS COMPACTOS DE SUBVARIETADES AUTOCONTRÁCTILES	78
5.2. RESULTADOS SOBRE CLASIFICACIÓN DE SUBVARIETADES AUTOCONTRÁCTILES	83
5.3. NUEVAS CARACTERIZACIONES DEL TORO DE CLIFFORD	85
Apéndice A. REPRESENTACIÓN DE CURVAS DE LEGENDRE	91
A.1. CURVAS DE LEGENDRE EN LA 3-ESFERA Y CURVAS ESFÉRICAS	91
A.2. CURVAS DE LEGENDRE EN EL 3-ESPACIO ANTI DE SITTER Y CURVAS HIPERBÓLICAS	93
ABSTRACT AND CONCLUSIONS	97
BIBLIOGRAFÍA	105

INTRODUCCIÓN

El flujo de la curvatura media es quizás la más importante de las ecuaciones de evolución de subvariedades en el ámbito del Análisis Geométrico. Una familia diferenciable $F = F(\cdot, t)$ de subvariedades evoluciona bajo el flujo de la curvatura media si el vector velocidad $\frac{dF}{dt}$ en cada punto de la subvariedad viene dado por el vector curvatura media en ese punto (véase la Definición 1.1.1). Así pues, el flujo de la curvatura media es un proceso de evolución bajo el cual una subvariedad se deforma en la dirección de su curvatura media. Por la primera fórmula de variación, el vector curvatura media apunta en la dirección por la que el volumen decrece más rápidamente.

Mullins [Mu56] propuso en 1956 el flujo de la curvatura media para modelar la formación de vetas en metales refundidos. Las aplicaciones del flujo de la curvatura media en tratamiento de imágenes, así como en Topología Simpléctica y Simetría Especular son también bastante importantes.

Clásicamente, el flujo de la curvatura media ha sido tratado bajo muy diversos puntos de vista en el contexto del Análisis Geométrico y, por ejemplo, ha sido estudiado bajo la óptica de Ecuaciones en Derivadas Parciales, Teoría Geométrica de la Medida, Conjuntos de Nivel o Métodos Numéricos.

Existen resultados muy interesantes sobre regularidad, existencia global y convergencia del flujo de la curvatura media en varios espacios ambientes. En esta memoria estamos interesados en el caso en que el espacio ambiente es euclídeo. En tal situación, el flujo de la curvatura media es la solución a un sistema de ecuaciones parabólicas, que pueden considerarse como la versión para subvariedades de la famosa ecuación del calor. Fijando de entrada una inmersión, que actúa como condición inicial, y una vez que la existencia y unicidad del flujo de la

curvatura media se establece en cierto intervalo maximal de tiempo $[0, T)$, se estudia el comportamiento del flujo a través de la evolución de las subvariedades inmersas, cuando $t \rightarrow T$. Salvo que el flujo tenga una solución eterna (esto es, definida en todo instante t), el flujo de la curvatura media en general deja de existir tras un tiempo finito, implicando la formación de una singularidad. Esto sucede, por ejemplo, siempre que la subvariedad sea compacta en ambiente euclídeo. Las singularidades que se forman están entonces completamente determinadas por el estallido de la segunda forma fundamental σ (véase la Sección 1.1).

Aparece de modo natural el problema de entender la naturaleza geométrica y analítica de estas singularidades (que abordaremos en la Sección 1.2). Para ello, como primera aproximación, las singularidades del flujo de la curvatura media están catalogadas atendiendo al grado del estallido de la segunda forma fundamental. Las llamadas singularidades de Tipo I (véase la Definición 1.2.1) son aquellas de las que se posee el mejor control posible de la explosión de la segunda forma fundamental, mientras que las restantes se conocen sencillamente como singularidades de Tipo II. Es interesante mencionar que existen muchas semejanzas entre la formación de singularidades para el flujo de la curvatura media y el flujo de Ricci. De hecho, en ambos flujos geométricos, las singularidades están frecuentemente modeladas por soluciones tipo solitón. En el caso del flujo de la curvatura media, nos referimos a las soluciones que se mueven o evolucionan bajo la acción de un grupo de isometrías (o más generalmente, transformaciones conformes) de la variedad ambiente.

Nuestro principal interés en esta memoria se centrará en el estudio de unas clases especiales de soluciones tipo solitón del flujo de la curvatura media (que presentaremos en la Sección 1.3) las cuales preservan la forma de las subvariedades que evolucionan. Por un lado, las llamadas *soluciones autosemejantes* del flujo de la curvatura media, para las que la evolución viene dada por homotecias de la subvariedad inicial y cuyo estudio es esencial para la comprensión de las singularidades de Tipo I, como pondremos de manifiesto más adelante. Por otro lado, los llamados *solitones de traslación*, que evolucionan por traslación con velocidad constante en una dirección fija la subvariedad de partida, y que producen soluciones eternas del flujo de la curvatura media que aportan los modelos más importantes de singularidades de Tipo II.

Las soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura media pueden ser de dos tipos, *autocontráctiles* o *autoexpansivas*, dependiendo de que la homotecia que determina la evolución de la subvariedad inicial sea una contracción o una dilatación, respectivamente. Eliminando la variable temporal, este tipo de soluciones reducen la ecuación parabólica del flujo de la curvatura media a una ecuación elíptica no lineal sobre la subvariedad de partida, que viene dada por

$$(1) \quad H = a \phi^\perp, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

donde H denota el vector curvatura media (definido en esta memoria como la traza de la segunda forma fundamental) y ϕ^\perp representa la componente normal de la inmersión $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ asociada a la subvariedad inicial. En este caso, la familia de inmersiones homotéticas a ϕ dada por

$$F_t = \sqrt{2at + 1} \phi, \quad 2at + 1 > 0,$$

es una solución del flujo de la curvatura media, obviamente con condición inicial $F_0 = \phi$. Si en (1) a fuese cero, la subvariedad sería minimal y la inmersión ϕ quedaría fija por el flujo de la curvatura media. Siendo a no nulo, podemos normalizar considerando solamente $a = \pm 1$ salvo homotecias. Cuando $H = -\phi^\perp$ se dice que M es una *subvariedad autocontráctil*, calificativo que responde al hecho que en este caso la subvariedad se contrae en tiempo finito a un punto bajo la acción del flujo de la curvatura media. Cuando $H = \phi^\perp$ se dice que M es una *subvariedad autoexpansiva*, recogiendo la idea que en este otro caso la subvariedad se expandirá en el tiempo indefinidamente manteniendo la misma forma, lo que implica la no compacidad de la misma.

Hasta mediados de los años 90, la mayoría de los autores que estudiaban el flujo de la curvatura media consideraban principalmente hipersuperficies, mientras que el flujo de la curvatura media en codimensión mayor no jugaba un papel preponderante. Podría decirse incluso que el flujo para hipersuperficies era bien comprendido, mientras que no se sabía demasiado cuando la codimensión era mayor que uno. Había razones obvias para ello, pues la situación geométrica es muy diferente en este último contexto, ya que el fibrado normal y la segunda forma fundamental son más complicados en el caso de codimensión mayor que uno. De hecho, en codimensión grande el vector curvatura media H es un vector genuino cuya dirección no se sabe cómo controlar a priori, en contraste con el caso de hipersuperficies, donde H es esencialmente una función escalar cuyo signo, además, se preserva a lo largo del flujo. Algunos de los resultados previamente obtenidos para el flujo de la curvatura media de hipersuperficies se trasladan sin cambios ni mayores dificultades a codimensión mayor, pero otros no y, de hecho, aparecen nuevos fenómenos incluso (véase el excelente trabajo [Sm12]).

En los últimos 20 años, el flujo de la curvatura media de codimensión alta ha atraído la atención de muchos investigadores. Junto con los grafos, puede decirse que las subvariedades lagrangianas constituyen ciertamente una de las subclases mejor comprendidas en lo que se refiere al flujo de la curvatura media en codimensión grande, principalmente cuando el ambiente es el espacio euclídeo complejo \mathbb{C}^n . Una razón importante para este llamativo interés es el hecho probado por Smoczyk [Sm96] sobre que la condición de ser lagrangiana (esto es, la restricción de la 2-forma de Kaehler de la variedad ambiente a la subvariedad es idénticamente nula) se conserva por el flujo. Puede hablarse pues, con todo rigor, del flujo lagrangiano de la

curvatura media, que es precisamente el título de esta memoria. Prueba de la especial atención que se ha dedicado al estudio del flujo lagrangiano de la curvatura media es la creciente literatura al respecto en la última década: [An06], [ChChH09], [ChLi04], [GSSmZ07], [HLi09], [JLT10], [LWa09], [LWa10], [Ne07], [Ne10], [Ne11], [Ne13], [NeT07], [SWo03], [Sm96], [Sm99], [Sm02], [Sm04], [Sm12], [SmWa02], [SmWa11], [TY02], [Wa01], [Wa08].

Por otro lado, como flujo gradiente del funcional volumen, el flujo de la curvatura media puede ser una potencial aproximación a la construcción de subvariedades especiales lagrangianas, con el gran interés que ello suscita desde el fundamental trabajo de Harvey y Lawson en [HL82]. Concretamente, las subvariedades lagrangianas minimales orientadas de una variedad Calabi-Yau (llamadas especiales lagrangianas) están calibradas (luego son minimizantes del volumen) y durante los últimos 30 años han adquirido un papel destacado en la formación de la T-dualidad en la Simetría Especular de la Teoría de Cuerdas ([SYZ96]). La cuestión básica sobre su existencia en una clase de homología o de isotopía hamiltoniana está aún abierta desafortunadamente. Los trabajos de Schoen-Wolfson [SWo01] y Wolfson [Wo05] muestran la difícil naturaleza del problema y que los métodos variacionales no parecen ser muy efectivos. Por este motivo, ha habido un renovado interés en evolucionar una subvariedad lagrangiana por el flujo gradiente de su funcional volumen, que es precisamente el flujo lagrangiano de la curvatura media, esperando obtener así convergencia a una subvariedad especial lagrangiana.

No obstante, diversos artículos de Neves [Ne07], [Ne10], [Ne11] y Schoen y Wolfson [SWo03] ofrecen como moraleja que es muy difícil evitar singularidades en el anterior proceso. Cobra así especial relevancia el estudio de las singularidades del flujo de la curvatura media en el seno del contexto lagrangiano. Referido a este asunto, algunos problemas interesantes a abordar, ni mucho menos triviales, son comprender la formación de las posibles singularidades que pueden ocurrir durante el flujo en tiempo finito y analizar si es posible mostrar que dichas singularidades para el flujo lagrangiano de la curvatura media son aisladas. Cuando el ambiente es el espacio euclídeo complejo, merece la pena destacar que el vector curvatura media se expresa como $H = J\nabla\beta$, donde J es la estructura compleja de \mathbb{C}^n y β es una función multivaluada (con valores en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) conocida como el ángulo lagrangiano. Neves construyó en [Ne07] ejemplos de superficies lagrangianas en \mathbb{C}^2 con ángulo lagrangiano β tan pequeño como se desee y para las que el flujo lagrangiano de la curvatura media desarrolla una singularidad en tiempo finito. Pero él mismo probó en [Ne07] que, asumiendo ciertas propiedades en la superficie lagrangiana inicial como, por ejemplo, el ser casi calibrada (es decir, la oscilación del ángulo lagrangiano es estrictamente menor que π), reescalando el flujo alrededor de un punto fijo en el espacio-tiempo, las componentes conexas del nuevo flujo reescalado convergen a una unión de planos área-minimizantes.

Es importante resaltar que, gracias a una fórmula de monotonía probada por Huisken en [Hu90], cualquier explosión central de una singularidad en tiempo finito del flujo de la curvatura media es una subvariedad autocontráctil (véase el Teorema 1.2.3). Es esperable entonces que el estudio de las soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura media aporte un mayor grado de compresión del flujo en el momento de formarse una singularidad.

Los primeros ejemplos no triviales de soluciones autosemejantes para el flujo lagrangiano de la curvatura media en \mathbb{C}^n fueron construidos en 2006 por Anciaux en [An06] asumiendo un alto grado de simetría. Para encontrar nuevos ejemplos en la literatura hay que buscarlos en la familia de las subvariedades lagrangianas estacionarias hamiltonianas. Estas fueron introducidas por Oh [Oh93] como puntos críticos del funcional volumen para variaciones hamiltonianas que, en particular, preservan el carácter lagrangiano de la subvariedad de partida. Existen numerosos trabajos dedicados al estudio de esta clase natural de subvariedades lagrangianas, como por ejemplo [An03], [AnC11], [CU98], [HR02], [Mi95], etc. Para producir soluciones eternas del flujo de Brakke (que es una formulación débil del flujo de la curvatura media), Lee y Wang construyeron en [LWa09] y [LWa10] interesantes ejemplos de subvariedades lagrangianas autocontráctiles y autoexpansivas estacionarias hamiltonianas. Estas subvariedades son asintóticas a conos estacionarios hamiltonianos que generalizan los ya estudiados por Schoen y Wolfson en [SWo01]. Pero cabe destacar que la mayoría de las soluciones autosemejantes conocidas para el flujo lagrangiano de la curvatura media han sido generalizadas recientemente por Joyce, Lee y Tsui en [JLT10], proporcionando numerosos ejemplos con diferentes topologías.

Ya hemos comentado anteriormente que, gracias a los resultados comentados de Huisken [Hu90], la compresión de las singularidades del flujo de la curvatura media recae en cierto modo sobre una posible clasificación de las soluciones autosemejantes. Pero éste es aún un problema abierto y parece ser de difícil resolución, dada la escasez de resultados en la literatura al respecto en su versión local.

Nuestra primera contribución a destacar en esta memoria [CL10] es la *clasificación de las soluciones autosemejantes para el flujo lagrangiano de la curvatura media en \mathbb{C}^2 que son estacionarias hamiltonianas* (véase el Teorema 3.3.1). La clasificación es local y, además del cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ y del toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (que son los ejemplos estándar), caracteriza las siguientes tres familias uniparamétricas de ejemplos, que podemos describir mediante inmersiones conformes descritas en términos de funciones elementales:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \phi_\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \delta > 0 \\ &\phi_\delta(s, t) = \left(i s_\delta \cosh t e^{-\frac{is}{c_\delta}}, t_\delta \sinh t e^{i c_\delta s} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\delta = \sinh \delta$, $c_\delta = \cosh \delta$, $t_\delta = \tanh \delta$. Cuando $\cosh^2 \delta \notin \mathbb{Q}$, ϕ_δ es un plano autoexpansivo embebido, y si $\cosh^2 \delta = p/q \in \mathbb{Q}$ recuperamos los ejemplos del caso 2-dimensional de Lee y Wang ([LWa09]) que incluyen cilindros y cintas de Moebius (en función de la paridad de p y q) autoexpansivas.

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \Upsilon_\varrho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad 0 < \varrho < \pi/2 \\ &\Upsilon_\varrho(s, t) = \left(-is_\varrho \cosh t e^{\frac{is}{c_\varrho}}, t_\varrho \sinh t e^{-ic_\varrho s} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\varrho = \sin \varrho$, $c_\varrho = \cos \varrho$, $t_\varrho = \tan \varrho$. Cuando $\cos^2 \varrho \notin \mathbb{Q}$, Υ_ϱ es un plano autocontráctil embebido, y si $\cos^2 \varrho = p/q \in \mathbb{Q}$, recuperamos las superficies autocontráctiles estudiadas por Lee y Wang [LWa09], cuyas posibles topologías son cilindros y cintas de Moebius dependiendo de la paridad de p y q .

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \Psi_\nu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \nu > 0 \\ &\Psi_\nu(e^{is}, t) = \left(c_\nu \cos s e^{\frac{it}{c_\nu}}, t_\nu \sin s e^{is_\nu t} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\nu = \sinh \nu$, $c_\nu = \cosh \nu$, $t_\nu = \coth \nu$. Cuando $\sinh^2 \nu \notin \mathbb{Q}$, Ψ_ν es un cilindro autocontráctil embebido, y si $\sinh^2 \nu = m/n$ recuperamos los toros autocontráctiles de Lee y Wang [LWa10], que recubren a botellas de Klein siempre que m y n tengan paridades distintas. El toro de Clifford es el único embebido en esta familia y se corresponde con $m = n = 1$.

La clasificación obtenida se basa en técnicas de Análisis Complejo, aprovechando fuertemente que la condición de estacionaria hamiltoniana equivale a la holomorfía de una diferencial, cuya normalización nos permite la integración explícita de las ecuaciones de Frenet de la inmersión, previa integración de la función norma del vector de posición de la inmersión, la cual satisface una ecuación diferencial ordinaria integrable explícitamente en términos de funciones elementales.

Cabe mencionar que estas tres familias pueden amoldarse a una construcción de superficies lagrangianas con curvas esféricas e hiperbólicas (ligeramente más general que la ideada en [CCh06]) y que nuestros nuevos ejemplos se obtienen considerando simplemente geodésicas junto con curvas de curvatura constante en la citada construcción. En progreso se encuentra actualmente la obtención de nuevos ejemplos más sofisticados de superficies autoexpansivas y autocontráctiles con la elección de ciertas curvas más sofisticadas en esta construcción ([CLSm13]).

Volviendo al estudio de las singularidades para el flujo lagrangiano de la curvatura media,

destacamos que, bajo ciertas condiciones en la subvariedad lagrangiana inicial, como estar casicalibrada (condición ésta preservada por el flujo), Wang [Wa01] y Chen y Li [ChLi04] probaron independientemente que no existían singularidades de Tipo I a lo largo del flujo lagrangiano casicalibrado de la curvatura media. Cobra pues gran interés entender las dilataciones del flujo cuando el punto en el que se centra la dilatación cambia con la escala, llamadas dilataciones de Tipo II, que convergen a una solución eterna con segunda forma fundamental uniformemente acotada. Uno de los ejemplos más importantes de singularidades de Tipo II lo constituye la clase de los solitones de traslación antes mencionada. En todos ellos, la función ángulo lagrangiano está globalmente definida y eliminando la variable temporal, estos solitones reducen la ecuación parabólica del flujo de la curvatura media a la ecuación

$$(2) \quad H = \mathbf{e}^\perp,$$

donde \mathbf{e} es un vector fijo no nulo que marca la dirección de la traslación con velocidad constante de la evolución del flujo para este tipo de soluciones, dado por

$$F_t = \phi + t \mathbf{e}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Los ejemplos más sencillos de solitones de traslación no triviales se consiguen con productos de rectas y de la única solución de la ecuación (2) en el caso de curvas: la conocida como “grim reaper”, que se define como el grafo $x = -\log \cos y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Los primeros resultados importantes en este contexto se debieron a Neves y Tian ([NeT07]), y consistieron en proporcionar condiciones que excluían la existencia de solitones de traslación no triviales para el flujo lagrangiano de la curvatura media. Concretamente, Neves y Tian probaron que los solitones de traslación con cierta cota L^2 sobre el vector curvatura media son planos, y que los solitones de traslación casicalibrados que son estáticos son también planos. Sin embargo, años más tarde, Joyce, Lee y Tsui descubrieron en [JLT10] sorprendentes nuevos solitones de traslación para el flujo lagrangiano de la curvatura media con oscilación arbitrariamente pequeña del ángulo lagrangiano. Estos juegan un papel semejante a los solitones tipo cigarro en el flujo de Ricci y son tremendamente importantes para estudiar la regularidad del flujo lagrangiano de la curvatura media. Además, junto con los ejemplos asociados a las curvas “grim reaper”, muestran que las condiciones geométricas de los resultados de [NeT07] son óptimas.

Pero se echa de nuevo en falta en la literatura algún resultado de clasificación en este contexto. Nuestra contribución a destacar [CL12a] al respecto en esta memoria es doble. Por un lado, *generalizamos ostensiblemente los importante ejemplos de Joyce, Lee y Tsui [JLT10] en el caso 2-dimensional*. Estos, tal y como se reseña en [NeT07], pueden verse asociados a curvas

planas ω autoexpansivas (véanse los Ejemplos 2.2.6). Sin embargo, nuestra construcción de nuevos ejemplos de solitones de traslación lagrangianos en \mathbb{C}^2 se basa en dos familias de curvas planas, α y ω , que dependen de un parámetro angular $\varphi \in [0, \pi)$, las cuales son ciertas soluciones especiales del flujo de “acortamiento” de curvas, en el sentido que sus flujos son composición de homotecias y rotaciones con razones y velocidades dependiendo de φ (véase la Proposición 4.2.4). Por ejemplo, en el caso $\varphi = \pi/2$ debemos considerar α y ω espirales con velocidades opuestas; en el caso $\varphi = 0$ requerimos esta vez soluciones autosemejantes para el flujo de “acortamiento” de curvas con diferente carácter, esto es, α debe ser una curva autocontráctil mientras que ω debe ser una curva autoexpansiva. Sólo cuando, en este caso particular $\varphi = 0$, consideramos α una recta que pasa por el origen, recuperamos los ejemplos aludidos de Joyce, Lee y Tsui [JLT10].

Cabe destacar (véase el Teorema 4.3.1) que *todos nuestros nuevos ejemplos de solitones de traslación, junto con productos que involucran la curva “grim reaper”, se caracterizan localmente en términos de una condición analítica*: que la función producto hermítico del vector de posición de la inmersión y el vector de traslación \mathbf{e} sea de variables separadas. Consecuencia de este resultado es la *clasificación de los solitones de traslación lagrangianos en \mathbb{C}^2 que son estacionarios hamiltonianos*. En contraste con lo que sucede para el caso de las soluciones autosemejantes, en el que se tenían tres familias uniparamétricas de ejemplos con diferentes topologías, sorprendentemente ahora sólo aparece un plano no trivial completo y embebido que puede describirse por

$$\mathcal{M} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = 2\operatorname{Re} z e^{-2i\operatorname{Im} z}, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

En nuestra construcción con curvas planas antes aludida, \mathcal{M} se corresponde con la más simple elección posible de α (circunferencia centrada en el origen) y ω (recta que pasa por el origen) en el caso particular $\varphi = 0$.

Llama la atención que los nuevos ejemplos de soluciones autosemejantes y de solitones de traslación para el flujo lagrangiano de la curvatura media que son estacionarios hamiltonianos vienen descritos, en ambos casos, involucrando una geodésica con una curva de curvatura constante, ya sea en la primera de nuestras construcciones con curvas esféricas e hiperbólicas o en la segunda con curvas planas.

Consideramos ahora el problema de estudiar soluciones autosemejantes del flujo lagrangiano de la curvatura media desde el punto de vista global. Un elegante resultado debido a Smoczyk (véase el Teorema 2.2.2) permite concluir que no existen esferas autocontráctiles lagrangianas. Pensando pues en topologías más complicadas, la primera observación a tener en cuenta es que la clase de toros autocontráctiles en \mathbb{R}^4 es enormemente amplia, ya que inclu-

ye tanto familias infinitas de toros lagrangianos en \mathbb{C}^2 , como el producto de curvas autocontráctiles cerradas de Abresch-Langer (véanse los Ejemplos 5.1.5), los toros de Anciaux (véanse los Ejemplos 5.1.6) o los toros de Lee-Wang (véanse los Ejemplos 5.1.7), así como cualesquiera toros minimales de la 3-esfera como los de Lawson (Ejemplos 5.1.8) que, vistos en \mathbb{R}^4 , son siempre autocontráctiles.

El toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es la intersección de todas las anteriores familias. No es pues de extrañar la formulación de la cuestión abierta planteada por Neves en [Ne11] acerca de la existencia de alguna condición inicial compacta lagrangiana que haga converger el flujo de la curvatura media al toro de Clifford tras reescalamiento. Para tener una oportunidad de resolver este problema, es crucial comprender primero el papel del toro de Clifford como superficie autocontráctil. Nuestra contribución a destacar en este asunto [CL12b] consiste en tres teoremas de rigidez acerca del toro de Clifford en el seno de las superficies autocontráctiles compactas lagrangianas en \mathbb{C}^2 . Una motivación más para buscar teoremas de unicidad sobre este regular ejemplo en el caso 2-dimensional la encontramos en la sorprendente caracterización que obtenemos del mismo (véase el Corolario 5.3.3) en la línea de recientes teoremas probados en [LiWe12] y [ChPe12]:

Sea M^n una subvariedad autocontráctil compacta de codimensión $n \geq 2$ en \mathbb{R}^{2n} . Si $|H|^2$ es constante, o verifica que $|H|^2 \leq n$ o $|H|^2 \geq n$ y $|\sigma|^2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$, entonces necesariamente $n = 2$, $|H|^2 = |\sigma|^2 = 2$ y M es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en \mathbb{R}^4 .

Focalizando nuestra atención entonces en el caso 2-dimensional, en el contexto lagrangiano podemos caracterizar el toro de Clifford con un solo tipo de hipótesis geométrica, bien sobre la curvatura media H o sobre la norma de la segunda forma fundamental $|\sigma|^2$.

El primero de los resultados (Teorema 5.3.5) puede considerarse la versión lagrangiana 2-dimensional para el toro de Clifford del clásico resultado de Huisken [Hu90] que caracteriza la esfera como la única superficie autocontráctil compacta con $H \geq 0$:

El toro de Clifford es la única superficie autocontráctil compacta lagrangiana en \mathbb{C}^2 con $|H|^2$ constante o verificando $|H|^2 \geq 2$ o $|H|^2 \leq 2$.

Cualquiera de las condiciones sobre $|H|^2$ jugaría el papel de hipótesis de convexidad sobre la curvatura media semejante a la del citado teorema de Huisken.

En el intento de probar un resultado de tipo salto semejante al obtenido por Le y Sesum [LeSe11] y Cao y Li [CaLi11] para la esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$, que la caracteriza como la única subvariedad autocontráctil compacta en \mathbb{R}^m con $|\sigma|^2 \leq 1$, obtenemos el siguiente resultado (véase el Teorema 5.3.7):

Si M^2 es una superficie autocontráctil compacta orientable lagrangiana de \mathbb{C}^2 con $|\sigma|^2 \leq 2$, entonces $|\sigma|^2 = 2$ y M es un toro. Si, además, la curvatura de Gauss K de M tiene signo (es decir, $K \geq 0$ o $K \leq 0$), entonces M es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Finalmente, si optamos por introducir como hipótesis la condición topológica de embebi-miento, probamos en el Teorema 5.3.9 la siguiente versión débil de caracterización del toro de Clifford en la línea de la famosa conjetura de Lawson recientemente resuelta afirmativamente por Brendel [Br12]:

El toro de Clifford es la única superficie compacta autocontráctil lagrangiana estacionaria hamiltoniana embebida en \mathbb{C}^2 .

Nuestra hipótesis extra (estacionaria hamiltoniana) en el anterior resultado equivale a la nulidad de la divergencia del campo tangente JH , que es precisamente la ecuación de Euler-Lagrange del correspondiente problema variacional.

Las demostraciones de estos tres resultados de unicidad son ciertamente elementales, pero realmente la prueba de los mismos se basa en resultados mucho más fuertes que, aplicados adecuadamente en este contexto, conllevan a que las hipótesis geométricas naturales impuestas conducen a la unicidad deseada para el toro de Clifford en cada caso.

PARTE I
PRELIMINARES

1

FLUJO DE LA CURVATURA MEDIA

En este primer capítulo realizamos una recopilación introductoria de las nociones y de los principales resultados (sin incluir su demostración) sobre una de las ecuaciones de evolución más interesantes en el campo del Análisis Geométrico: el flujo de la curvatura media. Realizamos especial hincapié en las soluciones tipo solitón que sirven de modelos para el estudio de las singularidades del flujo de la curvatura media.

1.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD

Intuitivamente, una familia de subvariedades diferenciables evoluciona bajo el flujo de la curvatura media si la velocidad en cada punto de la subvariedad viene dada por el vector curvatura media en ese punto. Por ejemplo, las esferas redondas del espacio euclídeo evolucionan bajo el flujo de la curvatura media cuando se contraen concéntricamente, con adecuada velocidad, hasta que se colapsan en un punto (centro común de las esferas) en tiempo finito (véase la Figura 1.1). Formalizamos matemáticamente esta idea en la siguiente definición.

Definición 1.1.1. *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n , $T > 0$ un número real positivo y $F : M \times [0, T) \rightarrow (N, g)$ una familia uniparamétrica (dependiendo del tiempo t) de inmersiones diferenciables de M en una variedad Riemanniana (N, g) de dimensión m ; es decir, F es*



Figura 1.1: Evolución de esferas concéntricas, bajo el flujo de la curvatura media, en distintos instantes de tiempo.

diferenciable y cada

$$F_t : M \rightarrow N, \quad F_t(p) := F(p, t), \quad t \in [0, T)$$

es una inmersión. Si F satisface la ecuación de evolución

$$(1.1) \quad \left(\frac{dF}{dt}(p, t) \right)^\perp = H(p, t), \quad \forall p \in M, \quad \forall t \in [0, T),$$

donde $\left(\frac{dF}{dt}(p, t) \right)^\perp$ es la componente normal de $\frac{dF}{dt}(p, t)$ y $H(p, t)$ es el vector curvatura media de la inmersión F_t en p , entonces se dice que M evoluciona por el flujo de la curvatura media en N y F se denomina el flujo de la curvatura media (o la solución del flujo de la curvatura media) con condición inicial $F_0 : M \rightarrow N$.

Nota 1.1.2. La ecuación (1.1) es la forma general de la ecuación del flujo de la curvatura media, que desde el punto de vista analítico se trata de un sistema casilineal débilmente parabólico. Pero siempre es posible encontrar una familia de difeomorfismos $\phi_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, T)$, tal que $\bar{F}_t = F_t \circ \phi_t : M \rightarrow N$ verifique $\frac{d}{dt} \bar{F}(p, t) = \bar{H}(p, t)$, $\forall p \in M$, $\forall t \in [0, T)$, donde $\bar{H}(p, t)$ es el vector curvatura media de \bar{F}_t . Así pues, la ecuación clásica del flujo de la curvatura media (una vez reparametrizada) viene dada por

$$(1.2) \quad \frac{dF}{dt}(p, t) = H(p, t), \quad \forall p \in M, \quad \forall t \in [0, T).$$

Por la primera fórmula de variación, el flujo de la curvatura media es el opuesto del gradiente L^2 del funcional volumen $\text{Vol} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ considerado sobre el espacio \mathcal{S} de inmersiones de M en (N, g) , esto es,

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(F_t(M)) = - \left(H, \frac{dF}{dt} \right)_{L^2}.$$

Por tanto, a lo largo del flujo de la curvatura media, el volumen decrece de la manera más rápida posible. De modo más explícito, la variación del volumen a lo largo del flujo de la curvatura media es

$$\frac{d}{dt} \text{Vol}(F_t(M)) = - \int_M H^2 d\mu_t.$$

Los siguientes resultados en esta sección son válidos en cualquier dimensión y codimensión y no dependen de ninguna situación geométrica específica.

Proposición 1.1.3 (Invarianza bajo difeomorfismos). *Si $F : M \times [0, T) \rightarrow N$ es una solución del flujo de la curvatura media y $\phi \in \text{Diff}(M)$ un difeomorfismo fijo de M , entonces $\tilde{F} : M \times [0, T) \rightarrow N$, $\tilde{F}(p, t) := F(\phi(p), t)$ es otra solución del flujo de la curvatura media. En particular, las subvariedades (inmersas) $\tilde{M}_t := \tilde{F}(M, t)$ y $M_t := F(M, t)$ coinciden para todo $t \in [0, T)$.*

Además de la invarianza de la ecuación del flujo de la curvatura media bajo el grupo de difeomorfismos de M , el flujo es isotrópico, esto es, invariante bajo el grupo de isometrías del espacio ambiente.

Proposición 1.1.4 (Invarianza bajo isometrías). *Supongamos que $F : M \times [0, T) \rightarrow N$ es una solución diferenciable del flujo de la curvatura media y que Φ es una isometría del espacio ambiente (N, g) . Entonces la familia $\tilde{F} := \Phi \circ F$ es otra solución diferenciable del flujo de la curvatura media. En particular, si la inmersión inicial F_0 es invariante bajo Φ , entonces F_t permanecerá invariante bajo Φ para todo $t \in [0, T)$.*

Dada una inmersión inicial $F_0 : M \rightarrow N$, ponemos de manifiesto en los siguientes resultados que el problema asociado a la ecuación (1.2) está bien planteado, en el sentido de la existencia y unicidad de solución, cuando M es una variedad cerrada.

Proposición 1.1.5 (Existencia y unicidad). *Sea M una variedad diferenciable compacta (sin borde) y $F_0 : M \rightarrow N$ una inmersión diferenciable en una variedad Riemanniana diferenciable (N, g) . Entonces la ecuación (1.2) del flujo de la curvatura media admite una única solución diferenciable en un intervalo maximal de tiempo $[0, T)$, $0 < T \leq \infty$, que satisface $F(\cdot, 0) = F_0$.*

Reseñamos que en general, el anterior resultado de existencia y unicidad para variedades

completas no compactas está abierto, aunque existen importantes contribuciones en casos especiales.

En muchos resultados de la teoría del flujo de la curvatura media se impone que M sea una variedad diferenciable cerrada (compacta sin borde). La razón principal es que una de las técnicas más importantes en el estudio de ecuaciones de evolución parabólicas es la aplicación del principio del máximo. No obstante, en ausencia de compacidad, existen poderosas técnicas que pueden aplicarse en algunas situaciones. Por simplicidad, muchas veces supondremos M compacta sin borde.

Se tienen contribuciones muy importantes a la teoría de regularidad del flujo de la curvatura media realizadas por White [Wh05], [Wh09], que son válidas en cualquier dimensión y codimensión.

En [Sm12] puede encontrarse un completo y detallado estudio de las ecuaciones de evolución de las cantidades geométricas más importantes sobre M , como la primera y la segunda forma fundamental, entre otras.

Definición 1.1.6. *Dada una clase \mathcal{I} de inmersiones diferenciales en una variedad Riemanniana N , una subclase $\mathcal{F} \subset \mathcal{I}$ se dice que es una clase preservada bajo el flujo de la curvatura media si para cualquier solución $F_t : M \rightarrow N$, $t \in [0, T)$, del flujo de la curvatura media (1.2) con $F_0 \in \mathcal{F}$, se tiene que $F_t \in \mathcal{F}$, $\forall t \in [0, T)$.*

Las clases preservadas bajo el flujo de la curvatura media son muy importantes ya que frecuentemente se pueden probar resultados especiales en el seno de esas clases. Pero es un problema difícil detectar este tipo de clases. Podemos citar los siguientes ejemplos:

- hipersuperficies convexas en \mathbb{R}^{n+1} ,
- hipersuperficies convexas en media (es decir, $H > 0$) en \mathbb{R}^{n+1} ,
- hipersuperficies embebidas en variedades Riemannianas,
- hipersuperficies en \mathbb{R}^{n+1} que son grafos enteros sobre un plano llano.

Probar que una determinada clase es preservada bajo el flujo de la curvatura media normalmente involucra el uso del principio del máximo parabólico bien para cantidades escalares o para formas bilineales. En la sección 2.2 encontraremos una clase preservada para el flujo de la curvatura media que no está formada por hipersuperficies.

Una vez que la existencia del flujo de la curvatura media está garantizada (al menos para subvariedades cerradas) en un intervalo maximal de tiempo $[0, T)$, $T \in (0, \infty]$, se pretende estudiar el comportamiento de la solución a través de las subvariedades inmersas $M_t = F_t(M)$ cuando $t \rightarrow T$. Sucederá que o bien se formará algún tipo de singularidad (probablemente con implicaciones geométricas significativas) o el flujo tendrá una solución en tiempo infinito.

En general, la existencia de solución en tiempo infinito no es siempre esperable como muestra el siguiente resultado bien conocido cuando el espacio ambiente es el espacio euclídeo m -dimensional \mathbb{R}^m . Su demostración se basa en aplicar el principio del máximo parabólico a la función $f := |F|^2 + 2n t$, que satisface la ecuación de evolución $\frac{df}{dt} = \Delta f$.

Proposición 1.1.7. *Sea $F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ una inmersión diferenciable de una variedad n -dimensional M compacta (sin borde). Entonces el tiempo maximal T de existencia de una solución diferenciable $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ del flujo de la curvatura media con condición inicial F_0 es finito. Concretamente, $T \leq \frac{1}{2n} \max |F_0|^2$ y la igualdad se alcanza para la evolución de esferas redondas centradas en el origen.*

La Proposición 1.1.7 no es cierta para subvariedades completas, ya que por ejemplo para grafos completos en \mathbb{R}^{n+1} se tiene existencia en tiempo infinito ([EHu89]). En otros ambientes no euclídeos también se obtiene en algunos casos no sólo existencia en tiempo infinito sino también convergencia cuando $t \rightarrow \infty$ ([Gr89], [Sm02], [Sm04], [SmWa02], [Wa02], [TWa04]). Hacemos notar que la existencia en tiempo infinito no implica automáticamente convergencia.

Nuestro interés en esta memoria se centrará en el flujo de la curvatura media en subvariedades lagrangianas del espacio euclídeo complejo n -dimensional \mathbb{C}^n , por lo que prestaremos especial atención al caso en que el ambiente es euclídeo.

En cualquier caso, las singularidades para el flujo de la curvatura media quedan caracterizadas por el estallido de la segunda forma fundamental, como se muestra en el siguiente resultado bien conocido ([Sm12]).

Proposición 1.1.8. *Sea M una variedad compacta (sin borde) y $F : M \times [0, T) \rightarrow (N, g)$ una solución diferenciable del flujo de la curvatura media en una variedad Riemanniana completa (N, g) . Supongamos que el tiempo maximal de existencia T es finito. Entonces*

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty,$$

donde $M_t = F(M, t)$ y σ denota la segunda forma fundamental de $F_t = F(\cdot, t)$.

1.2. SINGULARIDADES

Si una solución del flujo de la curvatura media existe sólo para tiempo finito, la Proposición 1.1.8 implica la formación de una singularidad. Aparece de modo natural el problema de entender la naturaleza geométrica y analítica de esas singularidades. Una posible aproximación para ello (siguiendo la idea de Huisken en [Hu90]) es la catalogación de las singularidades atendiendo al grado del estallido de $\max_{M_t} |\sigma|^2$.

Definición 1.2.1. *Supongamos que $F : M \times [0, T) \rightarrow N$ es una solución diferenciable del flujo de la curvatura media con $T < \infty$ y*

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty.$$

a) *Se dice que $q \in N$ es un punto “blow-up” si existe un punto $p \in M$ tal que*

$$\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow T} |\sigma(p, t)| = \infty.$$

b) *Se dice que M desarrolla una singularidad de Tipo I si existe una constante positiva $c > 0$ tal que*

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \leq \frac{c}{T-t}, \quad \forall t \in [0, T).$$

En caso contrario, la singularidad se denomina de Tipo II.

Por tanto, si se tiene un punto $q \in N$ “blow-up” entonces necesariamente cuando $t \rightarrow T$ se desarrolla una singularidad de Tipo I o de Tipo II en $q \in N$ (y puede que en otros puntos también).

La razón por la que se introduce la acotación sobre la segunda forma fundamental de la Definición 1.2.1 es que para subvariedades cerradas (compactas sin borde) del espacio euclídeo siempre se verifica una desigualdad análoga en la otra dirección, es decir, existe $\tilde{c} > 0$ tal que

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \geq \frac{\tilde{c}}{T-t}.$$

En este sentido, podemos decir que las singularidades de Tipo I tienen el mejor comportamiento en tanto en cuanto se tiene controlado el grado del estallido de la norma de la segunda

forma fundamental. Es interesante mencionar que existen además muchas semejanzas entre la formación de singularidades para el flujo de la curvatura media y el flujo de Ricci.

Explicamos con más detalle las singularidades Tipo I cuando la variedad ambiente N es el espacio euclídeo \mathbb{R}^m :

Supongamos que $q \in \mathbb{R}^m$ es un punto “blow-up” de una solución $F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ del flujo de la curvatura media donde se desarrolla una singularidad Tipo I. Huisken introdujo la siguiente técnica de reescalamiento en [Hu90] para hipersuperficies, que es válida también para subvariedades de cualquier codimensión en \mathbb{R}^m . Se define una nueva familia de inmersiones centrando y reescalando F del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \tilde{F} : M \times [-1/2 \log T, \infty) &\rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \tilde{F}(\cdot, s) &:= (2(T-t))^{-1/2} (F(\cdot, t) - q), \quad s(t) = -\frac{1}{2} \log(T-t). \end{aligned}$$

Entonces \tilde{F} satisface la ecuación del flujo reescalado

$$\frac{d}{ds} \tilde{F} = \tilde{H} + \tilde{F},$$

donde \tilde{H} es el vector curvatura media de \tilde{F} . Ya que $|\sigma|^2 \leq c/(T-t)$, por tratarse de una singularidad de Tipo I, la segunda forma fundamental $\tilde{\sigma}$ del reescalamiento está uniformemente acotada en espacio y tiempo. Para estudiar el comportamiento geométrico y analítico de las inmersiones reescaladas $\tilde{M}_s = \tilde{F}(M, s)$, Huisken probó una fórmula de monotonía para hipersuperficies en \mathbb{R}^m evolucionando por el flujo de la curvatura media. El resultado correspondiente en codimensión arbitraria es semejante. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$, sea

$$\begin{aligned} \rho : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \setminus \{t_0\} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho(y, t) &:= \frac{1}{(4\pi(t_0 - t))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|y|^2}{4(t_0 - t)}}; \end{aligned}$$

entonces, $\rho|_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \setminus \{t_0\}}$ es el núcleo de la ecuación del calor de \mathbb{R}^m en $(0, t_0)$ y puede probarse la siguiente fórmula siguiendo la misma idea original de Huisken en [Hu90].

Proposición 1.2.2 (Fórmula de monotonía de Huisken). *Sea $F : M^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ una solución diferenciable del flujo de la curvatura media y supongamos que M es compacta sin borde. Entonces*

$$\frac{d}{dt} \int_M \rho(F(p, t), t) d\mu(p, t) = - \int_M \left| H(p, t) + \frac{F^\perp(p, t)}{2(t_0 - t)} \right|^2 \rho(F(p, t), t) d\mu(p, t),$$

donde $d\mu(\cdot, t)$ denota el elemento de volumen de M inducido por la inmersión $F(\cdot, t)$ y F^\perp la componente normal del vector de posición F .

La demostración de la Proposición 1.2.2 se deduce a partir de las fórmulas de evolución de ρ y de $d\mu$ y de la aplicación del Teorema de la Divergencia. Consecuencia de la fórmula de monotonía de Huisken es el siguiente resultado, también con prueba semejante a la realizada en [Hu90] para hipersuperficies, donde se estudia el comportamiento asintótico del “blow-up” de Tipo I.

Teorema 1.2.3 (“Blow-up” de Tipo I). *Supongamos que $F : M^n \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una solución diferenciable del flujo de la curvatura media de una variedad diferenciable M compacta (sin borde). Supongamos que $T < \infty$ y que $0 \in \mathbb{R}^m$ es un punto “blow-up” de Tipo I cuando $t \rightarrow T$. Entonces para cualquier sucesión $s_j \rightarrow \infty$ existe una parcial s_{j_k} tal que las subvariedades inmersas reescaladas $\widetilde{M}_{s_{j_k}}$ convergen diferenciablemente a una subvariedad límite no vacía \widetilde{M}_∞ inmersa en \mathbb{R}^m . Además \widetilde{M}_∞ satisface la ecuación*

$$(1.3) \quad \widetilde{H} + \widetilde{F}^\perp = 0.$$

Nota 1.2.4. Por la Proposición 1.1.4 no es restrictivo en el resultado anterior considerar que el punto “blow-up” es el origen. En general, la subvariedad límite \widetilde{M}_∞ no tiene por qué tener la misma topología que M . Por ejemplo, podría perderse la compacidad. Es importante señalar que no se sabe si todas las soluciones de (1.3) ocurren como límites “blow-up” de singularidades de Tipo I de subvariedades compactas.

Una solución de (1.3) se denomina una *solución autocontráctil* del flujo de la curvatura media. Concretamente, comprobaremos en la Sección 1.3.1 que toda solución de (1.3) se contrae homotéticamente bajo el flujo de la curvatura media y que existe una función positiva diferenciable c , que puede darse explícitamente y que depende del reescalamiento en el tiempo s , tal que

$$\widetilde{H}_s + c(s)\widetilde{F}_s^\perp = 0.$$

Estudiaremos también en la Sección 1.3.1 otra clase interesante de soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura media, llamadas *autoexpansivas* y que están caracterizadas por la ecuación elíptica

$$H - F^\perp = 0.$$

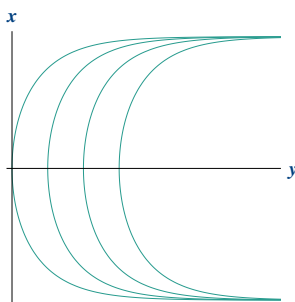


Figura 1.2: La curva “grim reaper” evolucionando por traslaciones.

Ecker y Husiken probaron en [EHu89] que grafos enteros de codimensión uno aproximan asintóticamente a soluciones autosemejantes autoexpansivas siempre que satisfagan una cierta condición de crecimiento en infinito.

Una clasificación de las soluciones autocontráctiles y autoexpansivas del flujo de la curvatura media está aún lejos de conseguirse, aunque hay algunas situaciones donde se tienen resultados interesantes. Los consideraremos en la Sección 1.3.1.

Existen ciertas condiciones geométricas (veremos alguna concreta en el Capítulo 2) en las que pueden excluirse las singularidades de Tipo I. En este caso, sólo es necesario considerar las singularidades de Tipo II, según la definición 1.2.1. Para el estudio de la forma de una subvariedad cerca de una singularidad de Tipo II, se suele definir una familia diferente de flujos reescalados $M_{k,\tau}$, $k \in \mathbb{N}$, $\tau \in I_k$ con I_k cierto intervalo de \mathbb{R} ([Sm12]). Si M es compacta y desarrolla una singularidad Tipo II, entonces una sucesión parcial de los flujos $M_{k,\tau}$ converge diferenciablemente a una solución eterna \widetilde{M}_τ del flujo de la curvatura media, esto es, definida para todo $\tau \in \mathbb{R}$. Así pues, una hipotética clasificación de las singularidades de Tipo II dependería de la clasificación de las soluciones eternas del flujo de la curvatura media.

En \mathbb{R}^2 , la única solución eterna (salvo reescalamiento) convexa del flujo de la curvatura media que, en el caso de curvas es conocido en la literatura como “flujo de acortamiento de curvas”, viene dada por traslaciones de la curva “grim reaper” (véase la Figura 1.2), definida como el grafo de la función

$$(1.4) \quad y = -\log \cos x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

La curva “grim reaper” es un *solitón de traslación* del flujo de la curvatura media, en el sentido

que satisface la ecuación en derivadas parciales

$$H = \mathbf{e}^\perp$$

para algún vector fijo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ y evoluciona con velocidad constante en la dirección de \mathbf{e} . Los estudiaremos con más detalle en la Sección 1.3.2.

En [AngV97] los autores construyeron algunas soluciones particulares para el flujo de la curvatura media que desarrollan singularidades de Tipo II.

1.3. SOLUCIONES TIPO SOLITÓN

En flujos geométricos tales como el flujo de la curvatura media o el flujo de Ricci, las singularidades frecuentemente se modelan por soluciones tipo solitón, esto es, soluciones que evolucionan bajo el flujo de la curvatura media por la acción de un grupo de isometrías o, más generalmente transformaciones conformes de la variedad ambiente. Cuando la evolución es una homotecia (contracción o dilatación) obtenemos las llamadas *soluciones autosemejantes* (autocontráctiles o autoexpansivas) para el flujo de la curvatura media. Con el estudio de este tipo de soluciones se espera entender mejor el flujo en una singularidad, ya que por la fórmula de monotonía de Huisken (véase la Proposición 1.2.2) un “blow-up” de Tipo I en tiempo finito es una solución autosemejante (véase la Proposición 1.2.3).

Por otro lado, es de gran interés entender las dilataciones del flujo cuando el punto en el que se centra la dilatación cambia con la escala, las llamadas dilataciones de Tipo II, las cuales convergen a una solución eterna con segunda forma fundamental acotada. Uno de los ejemplos más importantes de singularidades de Tipo II es la clase de soluciones eternas conocida con el nombre de *solitones de traslación*, los cuales evolucionan por traslaciones en el espacio euclídeo ambiente con velocidad constante. Estudiamos en esta sección con más detalle estas dos clases de soluciones tipo solitón.

1.3.1. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES: SUBVARIEDADES AUTOCONTRÁCTILES Y SUBVARIEDADES AUTOEXPANSIVAS

Dada una inmersión $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de una variedad diferenciable de dimensión n en \mathbb{R}^m , nos planteamos cuándo la variación

$$F_t(p) : M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F_t(p) = h(t)\phi(p), \quad h(t) \in \mathbb{R}^*,$$

es una solución del flujo de la curvatura media (1.1). Nótese que F_t consiste en mover la inmersión inicial ϕ por homotecias cuya razón $h(t)$ es precisamente nuestra incógnita.

Si notamos por g_0 la métrica inducida por ϕ en M , es claro que la métrica inducida por F_t en M viene dada por $g_t = h(t)^2 g_0$. Además, la curvatura media H_t de la inmersión F_t viene dada por

$$H_t = \frac{H}{h(t)},$$

donde H es la curvatura media de la inmersión inicial ϕ .

Puesto que $\frac{dF_t}{dt} = h'(t)\phi$, resulta que F_t es una solución de (1.1) si y sólo si $h(t)h'(t)\phi^\perp = H$, lo que equivale a que existe una constante $a \in \mathbb{R}$ tal que $h(t)h'(t) = a$ y $a\phi^\perp = H$. Teniendo en cuenta la condición inicial $F_0 = \phi$ se tiene además que $h(0) = 1$. Integrando la ecuación diferencial de $h(t)$ con esa condición inicial, podemos concluir que la familia de inmersiones homotéticas a ϕ dada por

$$F_t(p) = \sqrt{2at + 1} \phi(p), \quad 2at + 1 > 0,$$

es una solución del flujo de la curvatura media (1.1) siempre que $H = a\phi^\perp$. Obsérvese que si $a = 0$ la subvariedad es minimal, es decir $H = 0$, y la inmersión ϕ queda fija por el flujo de la curvatura media.

Si $a \neq 0$, podemos normalizar el valor de a considerando sólo $a = \pm 1$ salvo homotecias, dando lugar a la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Una inmersión $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ se dice que es una solución autosemejante del flujo de la curvatura media si el vector curvatura media $H = \text{traza } \sigma$ verifica

$$(1.5) \quad H = \pm \phi^\perp,$$

donde ϕ^\perp denota la proyección normal del vector de posición ϕ . Si $H = -\phi^\perp$ diremos simplemente que ϕ es una subvariedad autocontráctil y si $H = \phi^\perp$, diremos simplemente que ϕ es una subvariedad autoexpansiva.

Nota 1.3.2. El calificativo autocontráctil responde a la idea que, en este caso, la familia

$$F_t(p) = \sqrt{1 - 2t} \phi(p), \quad 0 \leq t < 1/2$$

es una solución de (1.1) que evoluciona la inmersión inicial ϕ por contracciones (homotecias de razón menor que uno) hasta extinguirse en el instante $t = 1/2$. Por otro lado, el calificativo de autoexpansiva recoge la idea que, en este caso, la familia

$$F_t(p) = \sqrt{1+2t} \phi(p), \quad t \geq 0$$

es una solución de (1.1) que evoluciona indefinidamente la inmersión inicial ϕ por dilataciones (homotecias de razón mayor que uno) manteniendo la forma, por lo que no puede ser la subvariedad compacta.

Nota 1.3.3. En la literatura es también frecuente encontrar en el caso de hipersuperficies la condición $H = \pm \frac{1}{2} \phi^\perp$ en lugar de (1.5). Nosotros hemos adoptado la normalización dada en (1.5) que es bastante común en el contexto lagrangiano, sin olvidar que mayoritariamente se considera la curvatura media definida como la traza de la segunda forma fundamental sin dividir por la dimensión de la subvariedad.

En el siguiente resultado obtenemos en particular una interesante relación entre el funcional de Willmore y el volumen de una subvariedad autocontráctil cerrada.

Proposición 1.3.4. *Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una solución autosemejante para el flujo de la curvatura media que verifica que $H = -\phi^\perp$. Entonces:*

$$(1.6) \quad \nabla |\phi|^2 = 2 \phi^\top,$$

donde ϕ^\top denota la componente tangencial de ϕ , y

$$(1.7) \quad \Delta |\phi|^2 = 2(n - |H|^2).$$

En particular, cuando M es compacta (sin borde) se tiene:

$$(1.8) \quad \int_M |H|^2 d\mu = n \text{Vol}(M),$$

donde $\text{Vol}(M)$ denota el volumen de la subvariedad M .

Demostración. Dado $p \in M$, tomamos una referencia ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en $T_p M$ paralela en p . Entonces:

$$(1.9) \quad e_i(|\phi|^2) = 2 \langle e_i, \phi \rangle, \quad i = 1, \dots, n,$$

de donde se deduce inmediatamente (1.6). Derivando de nuevo en (1.9), obtenemos

$$(1.10) \quad e_i e_i (|\phi|^2) = 2 (\langle \sigma(e_i, e_i), \phi \rangle + \langle e_i, e_i \rangle), \quad i = 1, \dots, n.$$

Así, $\Delta|\phi|^2 = 2 (\langle H, \phi^\perp \rangle + n)$. Teniendo en cuenta que $\phi^\perp = -H$ se concluye (1.7). \square

En el caso de curvas planas la ecuación $H = -\phi^\perp$ se convierte sencillamente en

$$(1.11) \quad \vec{\kappa}_\alpha = -\alpha^\perp,$$

donde $\vec{\kappa}_\alpha$ denota el vector curvatura y α^\perp la proyección en la dirección normal de una curva plana α que sería una solución autocontráctil para el flujo de “acortamiento” de curvas. Estas curvas fueron clasificadas por Abresh y Langer en [AL86] y, en el caso cerrado (véase también [And03]), la única curva embebida en la familia es la circunferencia (de radio uno). Todas las demás son no embebidas con curvatura positiva y se encuentran en el interior de un anillo de radios variables (véase la Figura 1.3).

En 1987, Epstein y Weinstein [EW87] mostraron una clasificación similar y analizaron la dinámica del flujo de “acortamiento” de curvas cerca de una curva autocontráctil. En el Lema 10.39 de [CoMi12] se prueba que cualquier curva plana autocontráctil es bien una línea recta pasando por el origen o bien cae en un conjunto acotado.

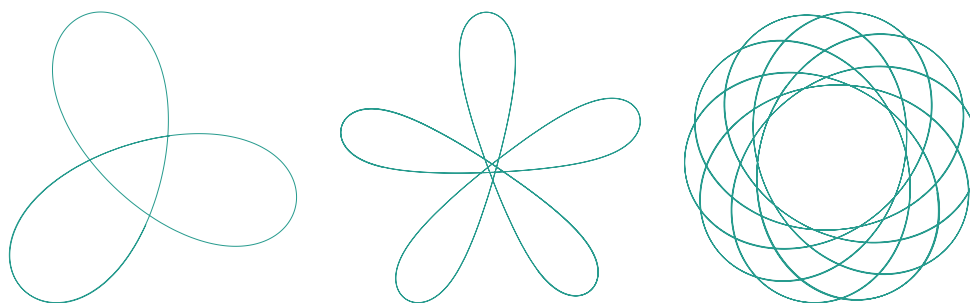


Figura 1.3: Curvas autocontráctiles cerradas de Abresh y Langer.

Análogamente, la ecuación $H = \phi^\perp$ se traduce para curvas como

$$(1.12) \quad \vec{\kappa}_\alpha = \alpha^\perp.$$

Las curvas planas autoexpansivas son siempre embebidas y tienen dos finales asíntóticos a dos líneas rectas concurrentes (véase por ejemplo [An06] o [EW87]), de modo que el ángulo que forman puede hacerse arbitrariamente pequeño (véase la Figura 1.4).



Figura 1.4: Curvas planas autoexpansivas.

Al contrario que en el caso de curvas, evidencias de tipo numéricas sugieren que una clasificación completa de las subvariedades autocontráctiles embebidas es imposible. Pero a pesar de ello, no existen en la literatura muchos ejemplos rigurosos de subvariedades autocontráctiles. En 1992, Angenent [Ang89] construyó un “doughnut” autocontráctil en \mathbb{R}^3 , rotando una cierta curva cerrada simple alrededor de un eje. Una clasificación de las hipersuperficies autocontráctiles de revolución (incluyendo las que tienen borde) fue realizada en [KM10].

La ecuación $H = -\phi^\perp$ de las subvariedades autocontráctiles aparece variacionalmente de dos modos estrechamente relacionados: como superficies minimales cambiando la métrica a una métrica conforme a la dada (que desgraciadamente no es completa y para la que la curvatura crece exponencialmente) y como puntos críticos de un funcional volumen con peso.

1.3.2. SOLITONES DE TRASLACIÓN

Dada una inmersión $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de una variedad diferenciable de dimensión n en \mathbb{R}^m , nos planteamos ahora cuándo la variación

$$F_t : M \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F_t(p) = \phi(p) + V(t), \quad V(t) \in \mathbb{R}^m,$$

es una solución del flujo de la curvatura media (1.1). Nótese que cada F_t consiste en una traslación de vector $V(t)$ de la inmersión inicial ϕ , siendo este vector de traslación $V(t)$ precisamente nuestra incógnita.

Si notamos por g_0 la métrica inducida por ϕ en M , es claro que tanto la métrica g_t inducida por F_t en M como su vector curvatura media H_t permanecerán invariantes, esto es, $g_t = g_0$ y $H_t = H$, siendo H el vector curvatura media de la inmersión inicial ϕ .

Ya que $\frac{dF_t}{dt} = V'(t)$ resulta que F_t es una solución de (1.1) si y sólo si $V'(t)^\perp = H$, lo que equivale a que existe un vector fijo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathbf{e}^\perp = H$. Así pues, podemos concluir que la familia de traslaciones de ϕ dada por

$$F_t(p) = \phi(p) + t \mathbf{e},$$

es una solución eterna del flujo de la curvatura media (1.1) siempre que $H = \mathbf{e}^\perp$. Este razonamiento motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.5. Una inmersión $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ de una variedad diferenciable M de dimensión n en \mathbb{R}^m se dice que es un solitón de traslación para el flujo de la curvatura media si cumple la ecuación

$$(1.13) \quad H = \mathbf{e}^\perp$$

para algún vector fijo no nulo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$, llamado vector de traslación, donde \mathbf{e}^\perp denota la proyección normal del vector \mathbf{e} y H es el vector curvatura media de ϕ .

Una definición equivalente para un solitón de traslación sería la existencia de un vector no nulo $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ tal que $H + \mathbf{v} = \mathbf{e}$, donde $\mathbf{v} = \mathbf{e}^\top$ sería la componente de \mathbf{e} tangente a M . Una solución de traslación se dice que es un solitón de traslación gradiente si $\mathbf{v} = \nabla f$, para alguna función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Resulta que cualquier solitón de traslación para el flujo de la curvatura media en \mathbb{R}^m debe ser un solitón de traslación gradiente. Este hecho puede encontrarse en la Proposición 2.4 de [JLT10] donde se demuestra exactamente que $H + \nabla \langle \phi, \mathbf{e} \rangle = \mathbf{e}$.

Nota 1.3.6. Salvo isometrías y homotecias en el ambiente \mathbb{R}^m podemos fijar el vector \mathbf{e} sin pérdida de generalidad. Normalmente tomaremos $\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$ en esta memoria.

En el caso de curvas planas, la única solución de la ecuación (1.13) viene dada por la curva “grim-reaper” descubierta por Calabi definida en la Sección 1.2.

1.4. RESULTADOS DESTACADOS EN EL AMBIENTE EUCLÍDEO

Resulta difícil realizar una selección sobre resultados a destacar, pero en esta sección sólo pretendemos comentar brevemente algunos resultados sobre convergencia.

Los primeros trabajos relevantes que podríamos considerar pioneros acerca del flujo de la curvatura media versan sobre el estudio de dicho flujo en el caso de curvas: lo que en inglés se conoce como “curve shortening flow”, que podríamos traducir por el flujo de “acortamiento” de curvas. Combinando resultados de la década de los 80, en el siguiente resultado resumimos el comportamiento del flujo en el caso de curvas planas cerradas y simples.

Teorema 1.4.1 ([Ga84, GaH86, Gr87]). *Sea $\alpha_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva diferenciable embebida en el plano \mathbb{R}^2 . Si $\alpha : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la solución de*

$$(1.14) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \kappa \cdot N,$$

con condición inicial α_0 , donde κ es la curvatura de α y N es el vector normal unitario a α , entonces $\alpha(\cdot, t)$ permanece embebida durante toda la evolución, se transforma en convexa a partir de cierto instante y a partir de este instante permanece convexa y se contrae a un punto cuando $t \rightarrow T$ con forma límite circular.

En 1989, Grayson [Gr89] mostró que el resultado anterior no se extiende a superficies. En particular probó que una mancuerna con un cuello infinitamente largo y estrecho desarrollaría una singularidad “pellizco” antes de la extinción. Una posterior demostración de este resultado fue dada por Angenent [Ang89], usando su “doughnut” y el hecho que dos hipersuperficies cerradas disjuntas permanecen disjuntas bajo el flujo de la curvatura media.

A mediados de los 80, en un artículo fundamental [Hu84], Huisken probó que las hipersuperficies compactas convexas del espacio euclídeo tenían un comportamiento similar al de las curvas planas cerradas y simples. Es decir, la convexidad se preserva bajo el flujo de la curvatura media y las superficies se hacen redondas, esto es, las hipersuperficies están más cercanas cada vez a ser umbilicales y las formas finales son umbilicales.

Teorema 1.4.2 (Hu84). *Sea M_0 una superficies compacta (sin borde) uniformemente convexa, es decir los autovalores de su segunda forma fundamental son estrictamente positivos. Entonces la evolución de M_0 por el flujo de la curvatura media tiene una solución diferenciable definida en un intervalo de tiempo finito, $0 \leq t < T$, y las hipersuperficies M_t convergen a un punto cuando $t \rightarrow T$.*

Más tarde, en [Hu86], Huisken extendió su resultado a hipersuperficies de variedades riemannianas que verifican una adecuada condición de convexidad más fuerte.

Hasta mediados de los 90 la mayoría de los autores que estudiaban el flujo de la curvatura media consideraron principalmente el caso de hipersuperficies, mientras que el flujo de la curvatura media en codimensión mayor no jugó un gran papel.

A partir de entonces, algunos de los resultados previamente obtenidos para el flujo de la curvatura media de hipersuperficies se trasladaron sin ningún cambio a subvariedades de codimensión alta, pero otros mucho no y, además, nuevos fenómenos aparecieron en este caso más general. Entre los primeros resultados en esta dirección se tienen los resultados obtenidos por Altschuler y Grayson [Al91], [AlGr92] para curvas en el espacio \mathbb{R}^3 , el flujo de la curvatura media de superficies simplécticas en codimensión dos en [ChLi04] y [Wa01] y resultados de existencia en tiempo infinito y convergencia sobre el flujo de la curvatura media de grafos en codimensión alta [SmWa02], [Sm04], [Wa02].

Recientemente se han realizado bastantes trabajos dedicados al estudio de formación y clasificación de singularidades del flujo de la curvatura media, como [An06], [ChChH09], [ClScSc07], [CoMi12], [GSSmZ07], [HLi09], [HuSin09], [JLT10], [LeSe10], [LeSe11], [SmWa02], motivados quizás por los trabajos de Hamilton y Perelman sobre el flujo de Ricci, que en muchas ocasiones comparte comportamiento con el flujo de la curvatura media en algunos aspectos.

Para encontrar un resultado en la línea del Teorema 1.4.2 en codimensión arbitraria hemos de trasladarnos a 2010, año en el que Andrews y Baker prueban el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3 ([AndB10]). *Sea $F_0 : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ una inmersión diferenciable de una variedad compacta de dimensión $n \geq 2$. Si $H \neq 0$ en todo punto y $|\sigma|^2 \leq c|H|^2$, donde*

$$c \leq \begin{cases} \frac{4}{3n}, & \text{si } 2 \leq n \leq 4, \\ \frac{1}{n-1}, & \text{si } n \geq 4, \end{cases}$$

entonces (1.1) tiene una única solución diferenciable $F_t : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ en un intervalo de tiempo maximal finito, y F_t converge uniformemente a un punto $q \in \mathbb{R}^{n+k}$ cuando $t \rightarrow T$. El reescalamiento $\tilde{F} = \frac{F_t - q}{\sqrt{2n(T-t)}}$ converge en C^∞ , cuando $t \rightarrow T$ a una n -esfera redonda y embebida en algún subespacio $n + 1$ dimensional de \mathbb{R}^{n+k} .

La clasificación de las hipersuperficies convexas en media comenzó con [Hu90], probando Huisken que la única hipersuperficie cerrada con curvatura media no negativa en \mathbb{R}^{n+1} son las esferas redondas \mathbb{S}^n (para $n > 1$). En un segundo artículo, [Hu93], Huisken abordó el caso no compacto, probando que las únicas hipersuperficies abiertas (compactas sin borde) embebidas en \mathbb{R}^{n+1} con $H \geq 0$, crecimiento polinomial del volumen y norma de la segunda forma

fundamental acotada son los productos $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de una esfera redonda y un subespacio lineal. Finalmente, Colding y Minicozzi probaron en [CoMi12] que la anterior clasificación es válida incluso sin la hipótesis sobre $|\sigma|$, resultado fundamental en el estudio llevado a cabo por sus autores sobre las singularidades genéricas del flujo de la curvatura media.

2

CONTEXTO LAGRANGIANO

2.1. SUBVARIEDADES LAGRANGIANAS

En el espacio euclídeo complejo n -dimensional \mathbb{C}^n consideramos su estructura natural de variedad de Kähler, dada por la 2-forma de Kähler $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la métrica euclídea usual y J la estructura compleja estándar considerada en \mathbb{C}^n . La forma de Liouville λ viene dada por $d\lambda = 2\omega$.

Notamos por (\cdot, \cdot) el producto hermitico usual de \mathbb{C}^n dado por

$$(z, w) = \sum_{i=1}^n z_i \overline{w_i}, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Entonces $(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, \cdot \rangle - i\omega(\cdot, \cdot)$.

Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ una inmersión de una variedad diferenciable M de dimensión n en \mathbb{C}^n . Denotamos a veces también por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la métrica inducida $\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle$ en M por la métrica usual de \mathbb{C}^n . Se dice que ϕ es lagrangiana si $\phi^*\omega = 0$, esto es, la restricción de la 2-forma de Kähler ω a la subvariedad $\omega|_M$ es idénticamente nula. Esto equivale a que la estructura compleja J de \mathbb{C}^n define un isomorfismo de fibrados entre el fibrado tangente TM y el fibrado normal $T^\perp M$.

Los ejemplos más sencillos de subvariedades lagrangianas en \mathbb{C}^n son los subespacios lagrangianos, que obviamente son totalmente geodésicos. El producto de n -curvas planas es también

una sencilla subvariedad lagrangiana de \mathbb{C}^n .

Localmente, cualquier subvariedad lagrangiana de \mathbb{C}^n puede escribirse como el grafo del gradiente de cierta función potencial definida sobre un dominio de \mathbb{R}^n .

Listamos las principales propiedades geométricas de las subvariedades lagrangianas.

Propiedades 2.1.1. Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ una inmersión lagrangiana de una variedad diferenciable M . Entonces:

1. $\nabla \circ J = J \circ \nabla^\perp$, donde ∇ es la conexión de Levi-Civita de M y ∇^\perp la conexión en el fibrado normal.
2. La segunda forma fundamental σ de ϕ viene dada por

$$\sigma(X, Y) = JA_{JX}Y,$$

para todo X, Y en TM , donde A denota el endomorfismo de Weingarten.

3. El tensor

$$C(X, Y, Z) := \langle \sigma(X, Y), JZ \rangle,$$

para todo X, Y, Z en TM , es simétrico en sus tres argumentos.

Si M es una subvariedad lagrangiana orientable en \mathbb{C}^n , puede definirse la aplicación *ángulo lagrangiano* de ϕ como la función multivaluada

$$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

definida a partir de la restricción a la subvariedad de la n -forma compleja de volumen de \mathbb{C}^n

$$\Omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n,$$

mediante la relación

$$\phi^*\Omega \equiv \Omega|_M = e^{i\beta} \text{vol}_M,$$

donde vol_M es la forma de volumen de M . Por tanto, para calcular β podemos usar la fórmula

$$(2.1) \quad e^{i\beta} = \det_{\mathbb{C}}(\phi_*e_1, \dots, \phi_*e_n),$$

donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal orientada del espacio tangente a la subvariedad M .

En general, el ángulo lagrangiano como función real sólo está definido localmente. Cuando es una función univaluada definida en toda la subvariedad, se dice que ϕ es *clase de Maslov cero* o que tiene *clase de Maslov trivial*, y si $\cos \beta \geq \varepsilon$, para algún ε positivo, se dice que M es *casi calibrada*. Además, si β es constante, $\beta \equiv \beta_0$, entonces M está calibrada por $\text{Re}(e^{-i\beta_0\Omega})$ y por tanto es minimizante del volumen. En este caso, M se conoce en la literatura con el nombre de *especial lagrangiana*.

Para las subvariedades lagrangianas orientables, la curvatura media H de ϕ está relacionada con el ángulo lagrangiano β mediante la destacable fórmula (véase, por ejemplo, [TY02])

$$(2.2) \quad H = J\nabla\beta.$$

La 1-forma dual del campo tangente JH , a veces llamada la *forma curvatura media* de ϕ

$$\alpha_H = \langle JH, \cdot \rangle = \omega(H, \cdot)$$

es una 1-forma cerrada, ya que (2.2) se traduce ahora simplemente como

$$(2.3) \quad \alpha_H = -d\beta.$$

Por tanto, α_H genera una clase de cohomología $[\alpha_H]$, que salvo constantes, es la conocida *clase de Maslov*. Esto justifica el apelativo de clase de Maslov cero o trivial para aquellas subvariedades lagrangianas en las que la aplicación ángulo lagrangiano es una función univaluada definida sobre M .

A partir de (2.2), las subvariedades especiales lagrangianas se caracterizan por tener ángulo lagrangiano constante.

Una subvariedad lagrangiana ϕ se dice *estacionaria hamiltoniana* [Oh93] si es punto crítico del funcional volumen restringido a deformaciones hamiltonianas de la variedad (es decir, aquellas con campo variacional del tipo $J\nabla f$, con f una función sobre la subvariedad) que en particular, preservan el carácter lagrangiano. La ecuación de Euler-Lagrange para este problema variacional se traduce en la nulidad de la divergencia del campo JH , o equivalentemente, la aplicación ángulo lagrangiano β es armónica, es decir, $\Delta\beta = 0$ donde Δ es el operador de Laplace en M .

Una subvariedad lagrangiana M en \mathbb{C}^n se dice *racional* si existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda(H_1(M, \mathbb{Z})) = \{a2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si $a = 0$, entonces M se dice *exacta* y esto significa que existe $\alpha \in C^\infty(M)$ tal que $\lambda = d\alpha$.

Nótese que la condición de ser lagrangiana implica que la forma de Liouville es una 1-forma cerrada sobre M , pues $d\phi^*\lambda = \phi^*d\lambda = 2\phi^*\omega = 0$. Una inmersión lagrangiana $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^n$ se dice que es *monótona* si

$$[\phi^*\lambda] = c [d\beta],$$

para alguna constante positiva c (llamada constante de monotonía). Cuando $c = 1$, se dice que M es una subvariedad lagrangiana *monótona normalizada*. Remarcamos que cualquier subvariedad lagrangiana monótona puede reescalarsse para pasar a ser monótona normalizada. El ejemplo estándar de superficie lagrangiana monótona en \mathbb{C}^2 es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(r)$. El toro de Clifford es monótono normalizado si $r = 1$.

2.2. FLUJO LAGRANGIANO

Las subvariedades lagrangianas cerradas M de variedades Kaehler-Einstein N constituyen una clase preservada bajo el flujo de la curvatura media (véase la Definición 1.1.6). Este importante resultado fue probado por Smoczyk en [Sm96], quien demostró que la condición de ser lagrangiana se preserva por el flujo de la curvatura media si la variedad ambiente es Kaehler-Einstein, que incluye a las variedades Calabi-Yau y en particular a \mathbb{C}^n .

La condición Einstein es relevante en vista de la ecuación de Codazzi que implica que la forma curvatura media es cerrada, condición necesaria para poder garantizar que la deformación sea lagrangiana. Para explicar esto con más detalle, observaremos que la forma simpléctica ω de N induce un isomorfismo entre los campos vectoriales normales a lo largo de M y el espacio de 1-formas sobre M . Concretamente, dada $\theta \in \Omega^1(M)$ existe un único campo vectorial normal $V \in \Gamma(T^\perp M)$ con $\theta = \omega(\cdot, V)$. Si $F : M \times [0, T] \rightarrow N$ es una familia diferenciable de inmersiones lagrangianas que evolucionan en una dirección normal guiadas por 1-formas $\theta \in \Omega^1(M)$ que dependen de forma diferenciable del tiempo, tenemos que

$$0 = \frac{d}{dt} F^* \omega = d \left(\omega \left(\frac{d}{dt} F, \cdot \right) \right) = -d\theta$$

y, consecuentemente, θ debe ser cerrada. Ya que la forma curvatura media viene dada por

$$\alpha_H = \omega(H, \cdot)$$

obtenemos que es necesario que α_H sea cerrada para garantizar que el flujo de la curvatura media preserve el carácter lagrangiano; y, de hecho, es suficiente ([Sm96]). El caso no compacto

es aún un problema abierto, pero en algunos casos puede reducirse al problema de existencia de soluciones de un tipo de ecuaciones parabólicas de tipo Monge-Ampère, como en el caso de grafos en $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$ sobre la parte real o subvariedades lagrangianas con geometría acotada, para explotar el uso del teorema de la función implícita para obtener la existencia de una ecuación tipo Monge-Ampère.

A partir de la fórmula de la evolución de la forma curvatura media, se deduce que las inmersiones lagrangianas con clase de Maslov trivial constituyen una clase preservada bajo el flujo de la curvatura media. Ocurre que la condición de ser casi calibrada también se preserva por el flujo lagrangiano de la curvatura media. Las subvariedades lagrangianas casi calibradas en variedades Calabi-Yau se comportan de modo agradable bajo el flujo de la curvatura media, en el sentido que se pueden excluir las singularidades de Tipo I, hecho en principio sorprendente, probado independientemente por Wang [Wa01] y Chen y Li [ChLi04] para subvariedades lagrangianas cerradas casi calibradas. Merece la pena comentar que no existen lagrangianas compactas casi calibradas en \mathbb{C}^n . La condición de ser casi calibrada es equivalente a asumir que la clase de Maslov es trivial y que el ángulo lagrangiano β verifique que $\cos \beta > 0$. Más tarde, Neves en [Ne07] extendió este resultado al caso de clase de Maslov cero, esto es, el caso en que la aplicación ángulo lagrangiano β está globalmente definida sobre M .

Por otro lado, en [GSSmZ07] se probaron varios resultados relativos a inmersiones lagrangianas monótonas. De las ecuaciones de evolución de α_H y $F^*\lambda$ se deduce que la monotonía se preserva por el flujo lagrangiano de la curvatura media con una constante de monotonía $c(t)$ dependiendo del tiempo.

Desafortunadamente, se desconoce si el ser embebido se preserva por el flujo lagrangiano de la curvatura media.

También se demuestra en [GSSmZ07] la existencia de subvariedades lagrangianas compactas monótonas y embebidas que desarrollan singularidades de Tipo II.

2.2.1. SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES LAGRANGIANAS

Si $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una solución autosemejante lagrangiana del flujo de la curvatura media, esto es, ϕ es lagrangiana y verifica (1.5), podemos reformular esta condición en términos del ángulo lagrangiano β y la restricción de la 1-forma de Liouville λ a la subvariedad. Dado un vector v tangente a M , de (1.5) y (2.2) se tiene:

$$(\phi^*\lambda)(v) = \langle \phi_*v, J\phi \rangle = -\langle \phi^\perp, J\phi_*v \rangle = \mp \langle H, J\phi_*v \rangle = \mp \langle \nabla\beta, \phi_*v \rangle$$

Por tanto, $\phi^*\lambda = \mp d\beta$. En particular, cualquier solución lagrangiana autosemejante del flujo de la curvatura media es monótona.

En el siguiente resultado, obtenemos algunas formulas útiles que, en particular, corroboran en el caso lagrangiano una relación entre el funcional de Willmore y el volumen ya obtenida para subvariedades autocontráctiles cualesquiera en la Proposición 1.3.4.

Proposición 2.2.1. *Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una solución autosemejante lagrangiana del flujo de la curvatura media, es decir $\phi^\perp = \pm H$. Entonces:*

$$(2.4) \quad \operatorname{div} \phi^\top = n \pm |H|^2,$$

$$(2.5) \quad \operatorname{div} JH = \mp \langle JH, \phi^\top \rangle,$$

donde ϕ^\top denota la proyección tangente del vector de posición ϕ . En particular, si M es una subvariedad lagrangiana compacta autocontráctil, se tiene que $\int_M |H|^2 = n \operatorname{Vol}(M)$.

Demostración. Derivando $\phi = \phi^\top \pm H$ en la dirección de cualquier vector tangente $v \in TM$ y separando las componentes tangencial y normal, obtenemos

$$(2.6) \quad \mp A_H v = v - \nabla_v \phi^\top$$

donde A_H es el endomorfismo de Weingarten asociado a H y ∇ es la conexión de Levi-Civita conexión de M , y

$$(2.7) \quad \mp \nabla_v^\perp H = \sigma(v, \phi^\top)$$

donde ∇^\perp es la conexión en el fibrado normal. Usando una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ en M obtenemos de (2.6) que

$$\operatorname{div} \phi^\top = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \phi^\top, e_i \rangle = \sum_{i=1}^n (\langle e_i, e_i \rangle \pm \langle A_H e_i, e_i \rangle) = n \pm |H|^2,$$

que prueba (2.4). De modo análogo, usando que (2.7) equivale a $\mp \nabla_v^\perp JH = J\sigma(v, \phi^\top)$, se tiene:

$$\operatorname{div} JH = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} JH, e_i \rangle = \pm \sum_{i=1}^n \langle \sigma(e_i, e_i), J\phi^\top \rangle = \pm \langle H, J\phi^\top \rangle = \mp \langle JH, \phi^\top \rangle,$$

que prueba (2.5). □

Probamos a continuación un resultado muy interesante, cuya prueba se debe a Smoczyk, sobre la no existencia de subvariedades autocontráctiles lagrangianas orientables compactas con clase de Maslov trivial.

Teorema 2.2.2. *Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una subvariedad autocontráctil lagrangiana. Si M es compacta y orientable, entonces $[\alpha_H] \neq 0$.*

Demostración. Supongamos que ϕ tiene clase de Maslov cero, es decir, $[\alpha_H] = 0$. Entonces existe un ángulo lagrangiano globalmente definido β tal que $\alpha_H = -d\beta$ según (2.6). Teniendo en cuenta que $\Delta\beta = -\operatorname{div} JH$ y que $H = -\phi^\perp$, de (1.6) y (2.5) tenemos que β satisface la ecuación elíptica lineal

$$\Delta\beta = \frac{1}{2} \langle \nabla\beta, \nabla|\phi|^2 \rangle.$$

Entonces el principio del máximo dice que β debe ser constante y por tanto $H \equiv 0$. Debido a la no existencia de subvariedades minimales compactas en el espacio euclídeo, llegamos a una contradicción que proviene de haber supuesto que $[\alpha_H] = 0$. \square

Nota 2.2.3. Como consecuencia del Teorema 2.2.2, cabe destacar que *no existen esferas lagrangianas autocontráctiles*.

En [GSSmZ07] se prueba un resultado de clasificación para soluciones autosemejantes lagrangianas en el caso que sean grafos enteros con una condición de crecimiento en el infinito. En este caso, las soluciones deben ser conos lagrangianos minimales.

Anciaux construyó en [An06] soluciones autosemejantes por el flujo lagrangiano de la curvatura media foliadas por $(n-1)$ -esferas para las que el estudio de la ecuación (1.5) se reduce a resolver una ecuación diferencial ordinaria. En el caso autocontráctil, la familia obtenida generaliza en cierto sentido las curvas autocontráctiles de Abresh-Langer [AL86].

Posteriormente, Lee y Wang construyeron en [LWa09] en el caso 2-dimensional nuevos ejemplos de soluciones autosemejantes para el flujo lagrangiano de la curvatura media que son estacionarios hamiltonianos y asintóticos a los conos de Schoen-Wolfson [SWo01]. En [LWa10] generalizan sus resultados previos al caso de dimensión arbitraria obteniendo ejemplos con diferentes topologías.

En [JLT10], Joyce, Lee y Tsui construyeron muchas nuevas soluciones autosemejantes para el flujo lagrangiano de la curvatura media generalizando los previamente mencionados. Desta-

can unas subvariedades autoexpansivas con oscilación arbitrariamente pequeña sobre el ángulo lagrangiano. Dados dos planos \mathbb{R}^n transversos en \mathbb{C}^n (con suma de ángulos característicos menos que π), muestran que existe una subvariedad autoexpansiva lagrangiana asintótica a esa pareja de planos. Por tanto, podrían servir como modelos locales para cirugía en el flujo lagrangiano de la curvatura media.

A la raíz de la Nota 2.2.3, queremos destacar la siguiente cuestión abierta planteada por Neves.

Problema 2.2.4 ([Ne11]). *Encontrar alguna condición sobre un toro lagrangiano de \mathbb{C}^2 que implique que el flujo lagrangiano de la curvatura media $(F_t)_{0 < t < T}$ se extinga en tiempo T y, tras un reescalamiento, F_t converja al toro de Clifford.*

2.2.2. SOLITONES DE TRASLACIÓN LAGRANGIANOS

Recopilamos en el siguiente resultado algunas propiedades interesantes de los solitones de traslación lagrangianos.

Proposición 2.2.5. *Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ un solitón de traslación lagrangiano con vector de traslación \mathbf{e} . Entonces, la aplicación ángulo lagrangiano verifica:*

1. $\beta = -\langle \phi, J\mathbf{e} \rangle + \beta_0$, para alguna constante β_0 .
2. $\Delta\beta + \langle \nabla\beta, \mathbf{e} \rangle = 0$.
3. $\Delta\langle \phi, \mathbf{e} \rangle = |H|^2$.

Demostración. Usando (2.2) y (1.13) tenemos que $\nabla\beta = -JH = -J\mathbf{e}^\perp = -(J\mathbf{e})^\top$ y usando que $\mathbf{v}^\top = \nabla\langle \phi, \mathbf{v} \rangle$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ tenemos que $\nabla\beta + \nabla\langle \phi, J\mathbf{e} \rangle = -(J\mathbf{e})^\top + (J\mathbf{e})^\top = 0$, lo que prueba el apartado 1. Si ahora usamos 1. y (2.2) de nuevo, $\Delta\beta = -\Delta\langle \phi, J\mathbf{e} \rangle = -\langle \nabla\beta, \mathbf{e} \rangle$ que demuestra el apartado 2. Finalmente de (1.13) deducimos 3, usando de nuevo que $\Delta\phi = H$:

$$\Delta\langle \phi, \mathbf{e} \rangle = \langle H, \mathbf{e}^\perp \rangle = |H|^2.$$

□

En particular el apartado 1. de la Proposición 2.2.5. dice que un solitón de traslación lagrangiano siempre tiene clase de Maslov trivial y del apartado 3. de la misma proposición deducimos fácilmente que no hay solitones de traslación lagrangianos compactos.

Podemos encontrar ejemplos sencillos de subvariedades lagrangianas en \mathbb{C}^n como productos de curvas planas. Si buscamos solitones de traslación para el flujo de la curvatura media de este modo, basta involucrar rectas y curvas “grim-reaper”, que dada por

$$F_t(x, y) = (\gamma(y), x) + t(1, 0), \quad \gamma(y) = (-\log \cos y, y), \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podemos reparametrizar γ por el arco $s = 2 \operatorname{arctanh}(\tan y/2)$ obteniendo

$$(2.8) \quad \gamma(s) = (\log \cosh s, 2 \operatorname{arctan}(\tanh s/2)), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Es notable que la curvatura κ_γ de γ verifica

$$(2.9) \quad \kappa_\gamma(s) = -\gamma_2'(s) = -\frac{1}{\cosh s}.$$

Usando (2.9) es un ejercicio comprobar que la inmersión producto

$$(2.10) \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\gamma(s_1), \gamma(s_2))$$

es un solitón de traslación lagrangiano con vector de traslación $(1, 1) \in \mathbb{C}^2$ y, por tanto,

$$(2.11) \quad (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow (\gamma(s_1) + \gamma(s_2), \gamma(s_1) - \gamma(s_2))$$

es un solitón de traslación lagrangiano con vector de traslación $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Ejemplos 2.2.6. Los solitones de traslación descubiertos por Joyce, Lee y Tsui en ([JLT10]) pueden escribirse en el caso $n = 2$, como $F_t = \mathcal{F} + t(1, 0)$ donde \mathcal{F} puede describirse (véase [NeT07, Sección 1.]) como se sigue:

Sea ω una curva plana cuyo vector curvatura \vec{k} satisface $\vec{k} = \omega^\perp$, es decir, ω es una curva autoexpansiva. Se puede tomar ω de modo que el ángulo θ que forma el vector tangente a ω y el eje x tenga una oscilación arbitrariamente pequeña. Entonces \mathcal{F} viene dado por

$$(2.12) \quad \mathcal{F}(x, y) = \left(\frac{|\omega(y)|^2 - x^2}{2} - i\theta(y), x\omega(y) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Además, el ángulo lagrangiano de \mathcal{F} coincide con θ y, por tanto, su oscilación puede hacerse arbitrariamente pequeña.

Sigue estando abierta la cuestión que aparece en [JLT10] y [NeT07] sobre si los solitones de traslación de los Ejemplos 2.2.6 pueden surgir como un “blow-up” de una singularidad en tiempo finito para el flujo lagrangiano de la curvatura media. Sería muy importante responder esta pregunta para desarrollar una teoría de regularidad para el flujo lagrangiano de la curvatura media.

PARTE II
RESULTADOS

3

SOLUCIONES AUTOSEMEJANTES LAGRANGIANAS EN EL PLANO EUCLÍDEO COMPLEJO

El contenido de este capítulo se corresponde mayoritariamente con el del artículo [CL10]. Se obtiene una clasificación local completa de todas las soluciones autosemejantes para el flujo lagrangiano de la curvatura media que son estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo. Es quizás uno de los pocos resultados de clasificación local sobre este tipo de soluciones del flujo de la curvatura media que pueden encontrarse en la literatura, que aprovecha fuertemente técnicas del Análisis Complejo para conseguir una integración explícita en términos de funciones elementales de las ecuaciones que gobiernan localmente este tipo de superficies lagrangianas en \mathbb{C}^2 . En la citada clasificación aparecen por un lado, familias uniparamétricas de superficies autoexpansivas lagrangianas y, por otro lado, dos familias uniparamétricas de superficies autocontráctiles lagrangianas, que generalizan los ejemplos ya existentes estudiados en [LWa09] y en el caso 2-dimensional de [LWa10] y [JLT10]. Desde un punto de vista constructivo, todos nuestros ejemplos pueden interpretarse en términos de una construcción geométrica a partir de sencillas curvas de Legendre esféricas e hiperbólicas.

3.1. CONSTRUCCIÓN CON CURVAS ESFÉRICAS E HIPERBÓLICAS

En esta sección realizamos una ligera generalización de una construcción de superficies lagrangianas en \mathbb{C}^2 en términos de curvas de Legendre en la 3-esfera y en el 3-espacio anti De Sitter, realizada por Castro y Chen en [CCh06]. Destacamos las propiedades geométricas que nos resultarán de interés posteriormente para la construcción de soluciones autosemejantes lagrangianas en \mathbb{C}^2 . En el Apéndice A pueden consultarse algunas de las propiedades de las curvas de Legendre que usaremos en la demostración del siguiente resultado.

Proposición 3.1.1. Sean $\alpha = \alpha(t) : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-\rho) \subseteq \mathbb{C}^2$, $\rho > 0$ y $\gamma = \gamma(s) : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3(R) \subseteq \mathbb{C}^2$, $R > 0$ curvas de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ y $\mathbb{S}^3(R)$ respectivamente, donde I_1 e I_2 son intervalos de \mathbb{R} . Definimos

$$\begin{aligned} \Phi : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ \Phi(t, s) &= (\alpha_1(t)\gamma_1(s), \alpha_2(t)\gamma_2(s)). \end{aligned}$$

Entonces Φ es una inmersión lagrangiana cuya métrica inducida es

$$(3.1) \quad \Phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle = (R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2) \left(\frac{|\alpha'|^2}{\rho^2} dt^2 + \frac{|\dot{\gamma}|^2}{R^2} ds^2 \right)$$

y cuya curvatura media viene dada por

$$(3.2) \quad H = \frac{R\rho}{R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2} \left(\frac{\rho\kappa_\alpha}{R|\alpha'|} J\Phi_t + \frac{R\kappa_\gamma}{\rho|\dot{\gamma}|} J\Phi_s \right),$$

donde $'$ denota derivación respecto a t y $\dot{}$ respecto a s .

Demostración. Por simplicidad, escribimos $\Phi = (\alpha_1\gamma_1, \alpha_2\gamma_2)$.

Veamos en primer lugar que Φ es una inmersión lagrangiana. Tenemos que $\Phi_*\partial_t \equiv \Phi_t = (\alpha'_1\gamma_1, \alpha'_2\gamma_2)$ y $\Phi_*\partial_s \equiv \Phi_s = (\alpha_1\dot{\gamma}_1, \alpha_2\dot{\gamma}_2)$. Calculamos su producto hermítico teniendo en cuenta que γ y α son curvas de Legendre:

$$\langle \Phi_t, \Phi_s \rangle = \alpha'_1 \bar{\alpha}_1 \gamma_1 \bar{\dot{\gamma}}_1 + \alpha'_2 \bar{\alpha}_2 \gamma_2 \bar{\dot{\gamma}}_2 = \alpha'_1 \bar{\alpha}_1 (\overline{\dot{\gamma}_1 \gamma_1} + \overline{\dot{\gamma}_2 \gamma_2}) = 0;$$

se tiene entonces que $\langle \Phi_t, \Phi_s \rangle = 0$ y $\langle \Phi_t, J\Phi_s \rangle = 0$, lo que prueba que Φ es lagrangiana.

Calculamos la métrica inducida por Φ . Usando las propiedades de α y γ obtenemos:

$$(3.3) \quad \begin{aligned} |\Phi_t|^2 &= |\alpha'_1|^2 |\gamma_1|^2 + |\alpha'_2|^2 |\gamma_2|^2 = |\alpha'_1|^2 |\gamma_1|^2 + |\alpha'_1|^2 (R^2 - |\gamma_1|^2) \\ &= |\alpha'_1|^2 |\gamma_1|^2 + R^2 |\alpha'_1|^2 - |\gamma_1|^2 |\alpha'_1|^2 = |\alpha'_1|^2 |\gamma_1|^2 + R^2 |\alpha'_1|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos $\alpha'_1 \bar{\alpha}_1 = \alpha'_2 \bar{\alpha}_2$ por ser α una curva de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$. Tomando módulos en la anterior igualdad resulta

$$\begin{aligned} |\alpha'_1|^2 |\alpha_1|^2 &= |\alpha'_2|^2 |\alpha_2|^2 = |\alpha'_2|^2 (\rho^2 + |\alpha_1|^2) \\ &= \rho^2 |\alpha'_2|^2 + |\alpha_1|^2 |\alpha'_2|^2. \end{aligned}$$

De la igualdad anterior se concluye que $|\alpha_1|^2 |\alpha'|^2 = \rho^2 |\alpha'_2|^2$ y, por tanto, contando con (3.3) se obtiene:

$$|\Phi_t|^2 = |\alpha'|^2 \left(|\gamma_1|^2 + \frac{R^2}{\rho^2} |\alpha_1|^2 \right).$$

Análogamente, usando de nuevo las propiedades de α y γ , se tiene:

$$\begin{aligned} (3.4) \quad |\Phi_s|^2 &= |\alpha_1|^2 |\dot{\gamma}_1|^2 + |\alpha_2|^2 |\dot{\gamma}_2|^2 = |\alpha_1|^2 |\dot{\gamma}_1|^2 + |\dot{\gamma}_2|^2 (\rho^2 + |\alpha_1|^2) \\ &= |\alpha_1|^2 |\dot{\gamma}_1|^2 + \rho^2 |\dot{\gamma}_2|^2 + |\alpha_1|^2 |\dot{\gamma}_2|^2 = |\dot{\gamma}|^2 |\alpha_1|^2 + \rho^2 |\dot{\gamma}_2|^2. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos $\dot{\gamma}_1 \bar{\gamma}_1 = -\dot{\gamma}_2 \bar{\gamma}_2$ por ser γ una curva de Legendre en $\mathbb{S}^3(R)$. Tomando módulos en la anterior igualdad resulta

$$\begin{aligned} |\dot{\gamma}_1|^2 |\gamma_1|^2 &= |\dot{\gamma}_2|^2 |\gamma_2|^2 = |\dot{\gamma}_2|^2 (R^2 - |\gamma_1|^2) \\ &= R^2 |\dot{\gamma}_2|^2 - |\gamma_1|^2 |\dot{\gamma}_2|^2. \end{aligned}$$

Simplificando se llega a que $|\gamma_1|^2 |\dot{\gamma}|^2 = R^2 |\dot{\gamma}_2|^2$ y, por tanto, obtenemos sustituyendo en (3.4) que

$$|\Phi_s|^2 = \frac{\rho^2}{R^2} |\dot{\gamma}|^2 \left(|\gamma_1|^2 + \frac{R^2}{\rho^2} |\alpha_1|^2 \right).$$

Luego la métrica inducida por Φ es $(R^2 |\alpha_1|^2 + \rho^2 |\gamma_1|^2) \left(\frac{|\alpha'|^2}{\rho^2} dt^2 + \frac{|\dot{\gamma}|^2}{R^2} ds^2 \right)$.

Consideramos la base ortonormal orientada $\{e_1 = \frac{\partial_t}{|\Phi_t|}, e_2 = \frac{\partial_s}{|\Phi_s|}\}$ del plano tangente a $\Phi(I_1 \times I_2)$

con objeto de calcular el ángulo lagrangiano β_Φ de Φ .

$$\begin{aligned}
e^{i\beta_\Phi} &= \det_{\mathbb{C}}(\Phi_* e_1, \Phi_* e_2) = \det_{\mathbb{C}} \left(\frac{\Phi_t}{|\Phi_t|}, \frac{\Phi_s}{|\Phi_s|} \right) \\
&= \frac{R\rho}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} \det_{\mathbb{C}}(\Phi_t, \Phi_s) \\
&= \frac{R\rho}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} \begin{vmatrix} \alpha'_1\gamma_1 & \alpha'_2\gamma_2 \\ \alpha_1\dot{\gamma}_1 & \alpha_2\dot{\gamma}_2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{R\rho(\alpha'_1\gamma_1\alpha_2\dot{\gamma}_2 - \alpha_1\dot{\gamma}_1\alpha'_2\gamma_2)}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} = \frac{R\rho(\alpha'_1\gamma_1\alpha_2\dot{\gamma}_2 + \alpha_1\frac{\alpha'_1\bar{\alpha}_1\dot{\gamma}_2\bar{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}\gamma_2)}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} \\
&= \frac{R\rho\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}(|\gamma_1|^2|\alpha_2|^2 + |\alpha_1|^2|\gamma_2|^2)}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} = \frac{R\rho\left(\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}(|\gamma_1|^2(\rho^2 + |\alpha_1|^2) + |\alpha_1|^2(R^2 - |\gamma_1|^2))\right)}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} \\
&= R\rho\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}\frac{\rho^2|\gamma_1|^2 + R^2|\alpha_1|^2}{|\alpha'|\dot{\gamma}|(R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2)} = \frac{R\rho}{|\alpha'|\dot{\gamma}|}\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}.
\end{aligned}$$

De modo similar, calculamos $e^{i\beta_\gamma} e^{i\beta_\alpha}$, donde β_γ y β_α son los ángulos legendrianos de γ y α , respectivamente (véase el Apéndice A):

$$\begin{aligned}
e^{i\beta_\gamma} e^{i\beta_\alpha} &= \frac{1}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \gamma_1 & \dot{\gamma}_1 \\ \gamma_2 & \dot{\gamma}_2 \end{vmatrix} = \frac{(\alpha_1\alpha'_2 - \alpha_2\alpha'_1)(\gamma_1\dot{\gamma}_2 - \gamma_2\dot{\gamma}_1)}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|} \\
&= \frac{\alpha_1\alpha'_2\gamma_1\dot{\gamma}_2 - \alpha_1\alpha'_2\gamma_2\dot{\gamma}_1 - \alpha_2\alpha'_1\gamma_1\dot{\gamma}_2 + \alpha_2\alpha'_1\gamma_2\dot{\gamma}_1}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|} \\
&= \frac{1}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|} \left(\gamma_1\dot{\gamma}_2|\alpha|^2\frac{\alpha'_1}{\bar{\alpha}_2} + \frac{|\alpha_1|^2\alpha'_1\dot{\gamma}_2|\gamma_2|^2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1} - \alpha_2\alpha'_1\gamma_1\dot{\gamma}_2 + \alpha'_1\alpha_2\frac{\dot{\gamma}_2|\gamma_2|^2}{\bar{\gamma}_1} \right) \\
&= \frac{1}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|}\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1} (|\gamma_1|^2|\alpha_1|^2 + |\alpha_1|^2|\gamma_2|^2 - |\alpha_2|^2|\gamma_1|^2 - |\alpha_2|^2|\gamma_2|^2) \\
&= \frac{1}{R\rho|\alpha'|\dot{\gamma}|}\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1} ((|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2)|\gamma_1|^2 + (|\alpha_1|^2 - |\alpha_2|^2)|\gamma_2|^2) \\
&= -\frac{\rho R}{|\alpha'|\dot{\gamma}|}\frac{\alpha'_1\dot{\gamma}_2}{\bar{\alpha}_2\bar{\gamma}_1}.
\end{aligned}$$

Por tanto, $e^{i\beta_\Phi} = -e^{i\beta_\gamma} e^{i\beta_\alpha}$ y se tiene entonces que

$$(3.5) \quad \beta_\Phi = \beta_\gamma + \beta_\alpha + \pi \pmod{2\pi}.$$

Calculamos entonces H a partir de (2.2) y (3.5), utilizando de nuevo la referencia ortonormal $\{e_1, e_2\}$ antes definida.

$$\begin{aligned} H &= J\nabla\beta_\Phi = e_1(\beta_\Phi)Je_1 + e_2(\beta_\Phi)Je_2 \\ &= \frac{R\rho}{R^2|\alpha_1|^2 + \rho^2|\gamma_1|^2} \left(\frac{\rho\kappa_\alpha}{R|\alpha_1|} J\Phi_t + \frac{R\kappa_\gamma}{\rho|\dot{\gamma}|} J\Phi_s \right), \end{aligned}$$

habiendo usado en la última igualdad (3.1) y los Lemas A.1.1 y A.2.1, quedando probado así (3.2). \square

3.2. NUEVOS EJEMPLOS

En esta sección presentamos tres familias uniparamétricas de superficies lagrangianas estacionarias hamiltonianas en \mathbb{C}^2 que son soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura media y describimos sus principales propiedades geométricas.

La primera familia que describimos proporciona nuevas superficies autoexpansivas con la topología de un plano, un cilindro o una banda de Moebius.

Proposición 3.2.1. *Definimos*

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \Phi_\delta : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \delta > 0, \\ \Phi_\delta(s, t) &= \left(is_\delta \cosh t e^{-\frac{is}{c_\delta}}, t_\delta \sinh t e^{ic_\delta s} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\delta = \sinh \delta$, $c_\delta = \cosh \delta$ y $t_\delta = \tanh \delta$. Entonces Φ_δ es una inmersión conforme lagrangiana estacionaria hamiltoniana que verifica $H = \Phi_\delta^\perp$, es decir, es una solución autoexpansiva del flujo de la curvatura media.

Si $\cosh^2 \delta \notin \mathbb{Q}$, Φ_δ es, además, un plano autoexpansivo embebido (véase la Figura 3.1) asintótico al cono lagrangiano estacionario hamiltoniano

$$(3.7) \quad \left\{ \left(i x_1 e^{-\frac{is}{c_\delta}}, x_2 e^{ic_\delta s} \right) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}, x_1^2 = \cosh^2 \delta x_2^2 \right\}.$$

Si $\cosh^2 \delta = p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, $p > q$, entonces Φ_δ viene dado por

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Phi_{p,q} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad p > q, \\ \Phi_{p,q}(s, t) &= \sqrt{p-q} \left(\frac{i}{\sqrt{q}} \cosh t e^{-i\sqrt{\frac{q}{p}}s}, \frac{1}{\sqrt{p}} \sinh t e^{i\sqrt{\frac{p}{q}}s} \right) \end{aligned}$$

y verifica que $\Phi_{p,q}(s + 2\pi\sqrt{pq}, t) = \Phi_{p,q}(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, induciendo una inmersión lagrangiana estacionaria hamiltoniana de un cilindro autoexpansivo (véase la Figura 3.2).

Además, si p es impar y q par, entonces $\Phi_{p,q}(s + \pi\sqrt{pq}, -t) = \Phi_{p,q}(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, induciendo una inmersión lagrangiana estacionaria hamiltoniana de una banda de Moebius autoexpansiva (véase la Figura 3.3).

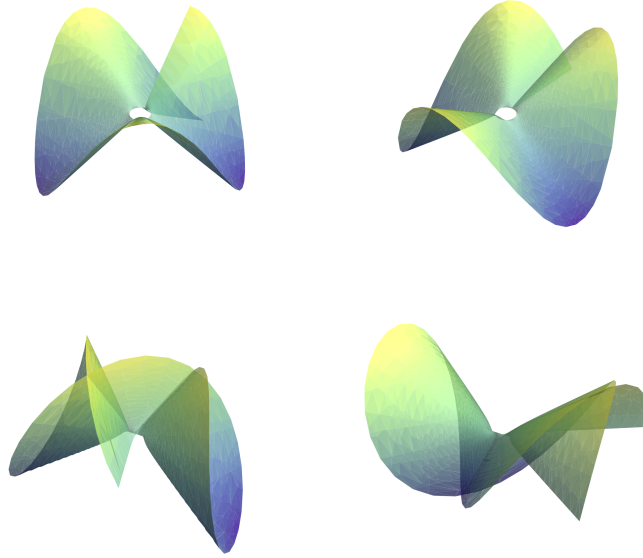


Figura 3.1: Proyecciones de un plano autoexpansivo Φ_δ , $\cosh^2 \delta \neq \mathbb{Q}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Nota 3.2.2. Cada inmersión ϕ_δ , $\delta > 0$, es congruente a la que se obtendría siguiendo la construcción de la Proposición 3.1.1 a partir de la geodésica legendriana de $\mathbb{H}_1^3(-1)$ dada por

$$\alpha_0(t) = (\sinh t, \cosh t)$$

y la curva legendriana de curvatura constante en $\mathbb{S}^3(R_\delta)$

$$\gamma_\delta(s) = (t_\delta e^{i c_\delta s}, i s_\delta e^{-i s/c_\delta})$$

donde $R_\delta = \sqrt{t_\delta^2 + s_\delta^2}$, con $s_\delta = \sinh \delta$, $c_\delta = \cosh \delta$ y $t_\delta = \tanh \delta$.

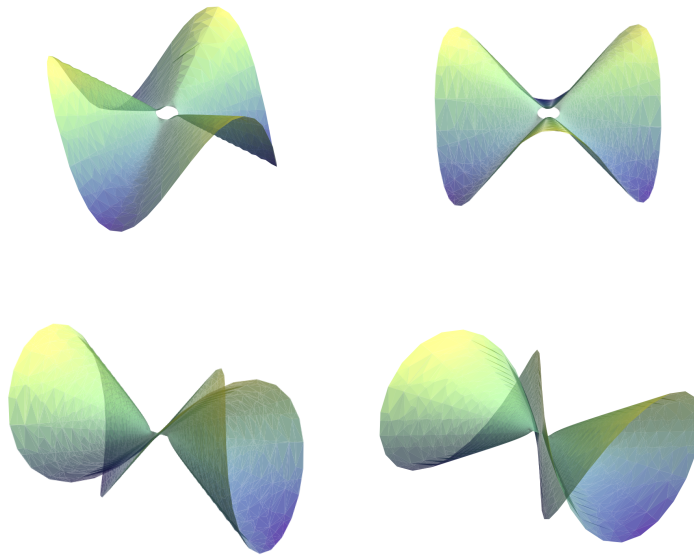


Figura 3.2: Proyecciones del cilindro autoexpansivo $\Phi_{3,1}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

La segunda familia aporta ahora nuevas superficies autocontráctiles con las mismas topologías que las descritas en el Proposición 3.2.1.

Proposición 3.2.3. *Definimos*

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \Upsilon_\varrho : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad 0 < \varrho < \pi/2 \\ \Upsilon_\varrho(s, t) &= \left(-is_\varrho \cosh t e^{\frac{is}{c_\varrho}}, t_\varrho \sinh t e^{-ic_\varrho s} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\varrho = \sin \varrho$, $c_\varrho = \cos \varrho$ y $t_\varrho = \tan \varrho$. Entonces Υ_ϱ es una inmersión conforme lagrangiana estacionaria hamiltoniana que verifica $H = -\Upsilon_\varrho^\perp$, es decir, es una solución autocontráctil del flujo de la curvatura media.

Si $\cos^2 \varrho \neq \mathbb{Q}$, Υ_ϱ es, además, un plano autocontráctil embebido (véase la Figura 3.4) asintótico al cono lagrangiano estacionario hamiltoniano

$$(3.10) \quad \left\{ \left(-ix_1 e^{\frac{is}{c_\varrho}}, x_2 e^{-ic_\varrho s} \right) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}, x_1^2 = \cos^2 \varrho x_2^2 \right\}.$$

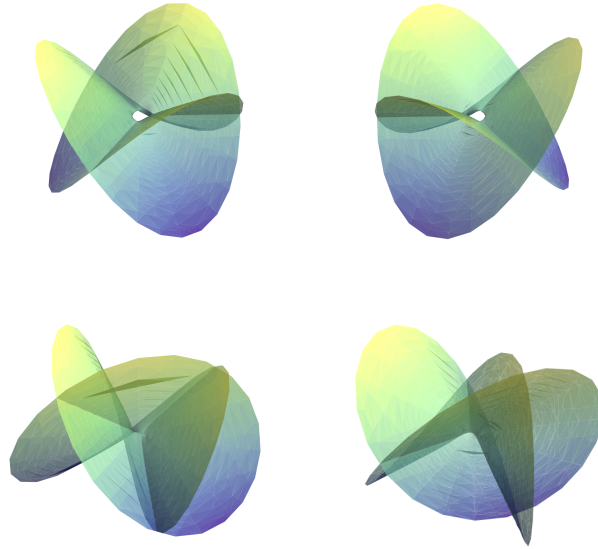


Figura 3.3: Proyecciones de la banda de Moebius autoexpansiva $\Phi_{3,2}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Si $\cos^2 \varrho = p/q \in \mathbb{Q}$, $(p, q) = 1$, $p < q$, entonces Υ_{ϱ} viene dado por

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \Upsilon_{p,q} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad p < q, \\ \Upsilon_{p,q}(s, t) &= \sqrt{q-p} \left(\frac{-i}{\sqrt{q}} \cosh t e^{i\sqrt{\frac{q}{p}}s}, \frac{1}{\sqrt{p}} \sinh t e^{-i\sqrt{\frac{p}{q}}s} \right) \end{aligned}$$

y verifica que $\Upsilon_{p,q}(s + 2\pi\sqrt{pq}, t) = \Upsilon_{p,q}(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, induciendo una inmersión lagrangiana estacionaria hamiltoniana de un cilindro autocontráctil (véase la Figura 3.5).

Además, si q es par y p es impar, entonces $\Upsilon_{p,q}(s + \pi\sqrt{pq}, -t) = \Upsilon_{p,q}(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$, induciendo una inmersión lagrangiana estacionaria hamiltoniana de una banda de Moebius autocontráctil (véase la Figura 3.6).

Nota 3.2.4. Cada inmersión Υ_{ϱ} , $0 < \varrho < \pi/2$, es congruente a la que se obtendría, siguiendo la construcción de la Proposición 3.1.1, a partir de la geodésica legendriana de \mathbb{H}_1^3 dada por

$$\alpha_0(t) = (\sinh t, \cosh t)$$

y la curva legendriana de curvatura constante en $\mathbb{S}^3(R_\varrho)$ dada por

$$\gamma_\varrho(s) = (t_\varrho e^{-i c_\varrho s}, -i s_\varrho e^{i s/c_\varrho})$$

donde $R_\varrho = \sqrt{t_\varrho^2 + s_\varrho^2}$, con $s_\varrho = \sin \varrho$, $c_\varrho = \cos \varrho$ y $t_\varrho = \tan \varrho$.

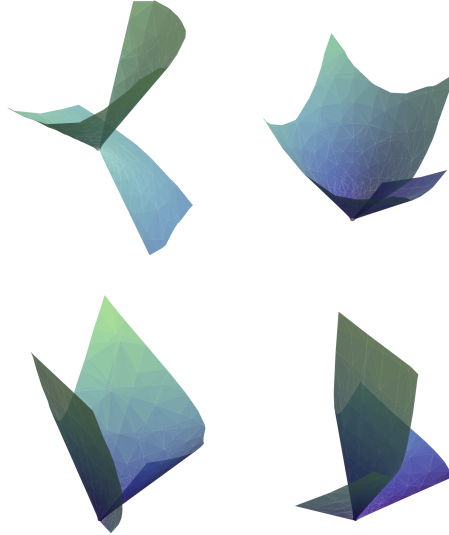


Figura 3.4: Proyecciones de un plano autocontráctil Υ_ϱ , $\varrho \neq \mathbb{Q}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Nota 3.2.5. Podemos recuperar los ejemplos autoexpansivos lagrangianos estacionarios hamiltonianos \mathcal{E} y autocontráctiles \mathcal{S} estudiados por Lee y Wang en la Proposición 2.1 de [LWa09], observando que $\mathcal{E}(u, \theta) = \sqrt{\frac{pq}{p-q}} \Phi_{p,q}(\sqrt{pq}\theta, u)$ y $\mathcal{S}(u, \theta) = i \sqrt{\frac{pq}{q-p}} \Upsilon_{p,q}(\sqrt{pq}\theta, u)$ con $\Phi_{p,q}$ y $\Upsilon_{p,q}$ dados en (3.8) y (3.11), respectivamente.

Nota 3.2.6. Tomando $x_1 = \sqrt{\frac{p-q}{q}} \cosh t > 0$ y $x_2 = \sqrt{\frac{p-q}{p}} \sinh t$, podemos reescribir

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Phi_{p,q}(\sqrt{pq}\theta, t) = (x_1 e^{-iq\theta}, x_2 e^{ip\theta}), \quad -qx_1^2 + px_2^2 = q - p < 0$$

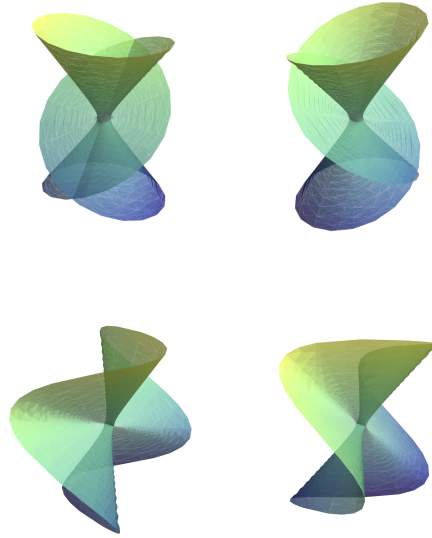


Figura 3.5: Proyecciones del cilindro autocontráctil $\Upsilon_{1,3}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

y tomando $x_1 = \sqrt{\frac{q-p}{q}} \cosh t > 0$ y $x_2 = \sqrt{\frac{q-p}{p}} \sinh t$ reescribimos

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Upsilon_{p,q}(\sqrt{pq}\theta, t) = (x_1 e^{iq\theta}, x_2 e^{-ip\theta}), \quad qx_1^2 - px_2^2 = q - p > 0,$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$. De esta forma se llega a los ejemplos dados en la Proposición 2.1 de [LWa10] en el caso 2-dimensional. Restringiendo $\theta \in [0, \pi)$, en la Proposición 2.2 de [LWa10] se prueba que estos ejemplos son orientados si y sólo si $p - q$ es par y embebidos si y sólo si $q = 1$.

Finalmente, remarcamos que Φ_δ y Υ_ρ los generalizan aunque podrían ser incluidos en la observación que aparece en la Nota 2.1 de [LWa10].

Demostración de las Proposiciones 3.2.1 y 3.2.3. Llamamos $\Phi = \Phi_\delta$ por abreviar la notación. Es un ejercicio probar que

$$(3.12) \quad |\Phi_s|^2 = t_\delta^2 \cosh^2 t + s_\delta^2 \sinh^2 t = |\Phi_t|^2, \quad (\Phi_s, \Phi_t) = 0.$$

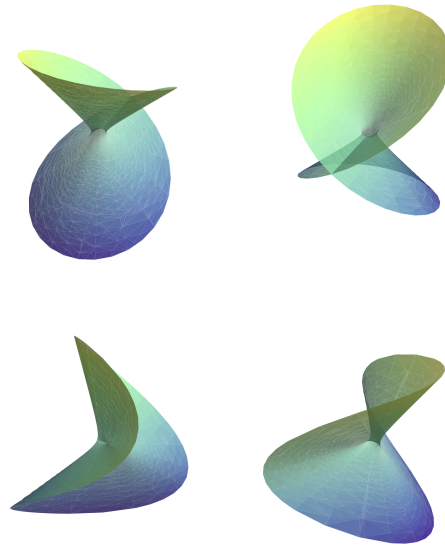


Figura 3.6: Proyecciones de la banda de Moebius autocontráctil $\Upsilon_{1,2}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$.

Esto demuestra que Φ es una inmersión conforme lagrangiana cuya métrica inducida viene dada por

$$\Phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2u(t)}(ds^2 + dt^2), \quad e^{2u(t)} = t_\delta^2 \cosh^2 t + s_\delta^2 \sinh^2 t.$$

Consideramos la base ortonormal orientada $\{e_1 = \frac{\Phi_s \partial_s}{|\Phi_s|}, e_2 = \frac{\Phi_t \partial_t}{|\Phi_t|}\}$ y aplicando (2.1) usando esta referencia se obtiene fácilmente que $e^{i\beta_\Phi} = e^{i s_\delta^2 s / c_\delta}$. Así concluimos que Φ es estacionaria hamiltoniana ya que β_Φ depende sólo de s . Usando (2.2) y la referencia anterior $\{e_1, e_2\}$ no es difícil obtener que el vector curvatura media de Φ viene dado por

$$H_\Phi = \frac{s_\delta^2 e^{-2u}}{c_\delta} J \Phi_s$$

y cumple que $H_\Phi = \Phi^\perp$.

Para probar que Φ es un embebimiento, supongamos que $\Phi(s_1, t_1) = \Phi(s_2, t_2)$, y entonces es claro que cuando $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$ necesariamente c_δ^2 es un número racional.

Finalmente, Φ es asintótico al cono lagrangiano estacionario hamiltoniano dado en (3.7), teniendo en cuenta que si $t \rightarrow +\infty$, entonces $\cosh t$, $\sinh t \simeq e^t/2$ y si $t \rightarrow -\infty$, entonces $\cosh t \simeq e^{-t}/2$ y $\sinh t \simeq -e^{-t}/2$.

El razonamiento para Υ_ρ sería completamente similar, por lo que lo omitimos. \square

La tercera familia que presentamos proporciona finalmente nuevas superficies autocontráctiles con la topología de un cilindro, un toro o una botella de Klein.

Proposición 3.2.7. *Definimos*

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \Psi_\nu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \nu > 0, \\ \Psi_\nu(e^{is}, t) &= \left(c_\nu \cos s e^{\frac{it}{s_\nu}}, t_\nu \sin s e^{is_\nu t} \right), \end{aligned}$$

donde $s_\nu = \sinh \nu$, $c_\nu = \cosh \nu$ y $t_\nu = \coth \nu$. Entonces Ψ_ν es una inmersión conforme lagrangiana estacionaria hamiltoniana que verifica $H = -\Psi_\nu^\perp$, es decir, es una solución autocontráctil del flujo de la curvatura media.

Si $\sinh^2 \nu \neq \mathbb{Q}$, Ψ_ν es, además, un cilindro autocontráctil lagrangiano embebido.

Si $\sinh \nu = m/n \in \mathbb{Q}$, $(m, n) = 1$, entonces Ψ_ν viene dado por

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \Psi_{m,n} : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (m, n) = 1, \\ \Psi_{m,n}(s, t) &= \sqrt{m+n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos s e^{i\sqrt{\frac{n}{m}}t}, \frac{1}{\sqrt{m}} \sin s e^{i\sqrt{\frac{m}{n}}t} \right). \end{aligned}$$

Además, $\Psi \equiv \Psi_{m,n}$ satisface las siguientes propiedades:

- (1) $\Psi(s + 2\pi, t) = \Psi(s, t) = \Psi(s, t + 2\pi\sqrt{mn})$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$; si, además, m y n son impares $\Psi(s + \pi, t + \pi\sqrt{mn}) = \Psi(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$. Sea $\Lambda_{m,n}$ el retículo generado por $(2\pi, 0)$ y $(0, 2\pi\sqrt{mn})$ (respectivamente $(2\pi, 0)$ y $(\pi, \pi\sqrt{mn})$) cuando m o n son pares (respectivamente cuando m y n son impares) y $\mathcal{T}_{m,n} := \mathbb{R}^2/\Lambda_{m,n}$ el correspondiente toro autocontráctil (véase la Figura 3.8). Entonces:

$$\text{Área}(\mathcal{T}_{m,n}) = \begin{cases} \frac{2(m+n)^2 \pi^2}{\sqrt{mn}}, & m \text{ o } n \text{ pares,} \\ \frac{(m+n)^2 \pi^2}{\sqrt{mn}}, & m \text{ y } n \text{ impares} \end{cases}$$

- (2) Si m es impar y n es par, entonces $\Psi(2\pi - s, t + \pi\sqrt{mn}) = \Psi(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$. Si m es par y n impar, entonces $\Psi(\pi - s, t + \pi\sqrt{mn}) = \Psi(s, t)$, $\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2$. En ambos casos, $m + n$ es impar y $\mathcal{T}_{m,n}$ es el recubridor de la correspondiente botella de Klein autocontráctil $\mathcal{K}_{m,n}$ (véase la Figura 3.9).

(3) El toro de Clifford $\mathcal{T}_{1,1}$ (véase la Figura 3.7) es el único toro que es embebido en la familia $\Upsilon_{m,n}$.

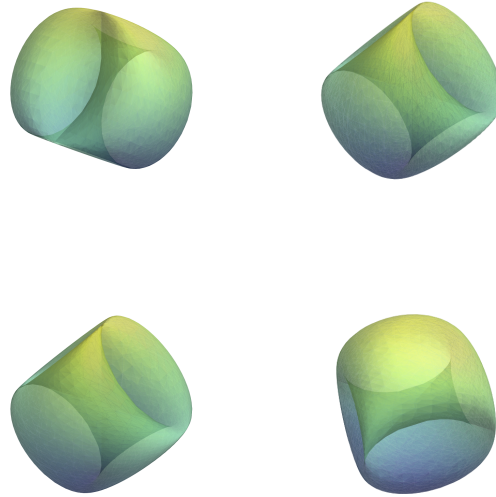


Figura 3.7: Proyecciones del toro de Clifford autocontráctil $\mathcal{T}_{1,1}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Nota 3.2.8. Cada inmersión Ψ_ν , $\nu > 0$, es congruente a la que se obtendría, siguiendo la Proposición 3.1.1, a partir de una curva legendriana de curvatura constante en $\mathbb{H}_1^3(-\rho_\nu)$ dada por

$$\alpha_\nu(t) = (c_\nu e^{it/s_\nu}, t_\nu e^{is_\nu t})$$

donde $\rho_\nu = \sqrt{c_\nu^2 + t_\nu^2}$, con $s_\nu = \sinh \nu$, $c_\nu = \cosh \nu$ y $t_\nu = \coth \nu$, y la geodésica legendriana de $\mathbb{S}^3(1)$ dada por

$$\gamma_0 = (\cos s, \sin s).$$

Nota 3.2.9. La inmersión $\Psi_{\text{arcsenh } 1} \equiv \Psi_{1,1}$, correspondiente al toro de Clifford puede comprobarse que es la única superficie Willmore en esta familia. Salvo isometrías, es suficiente consi-

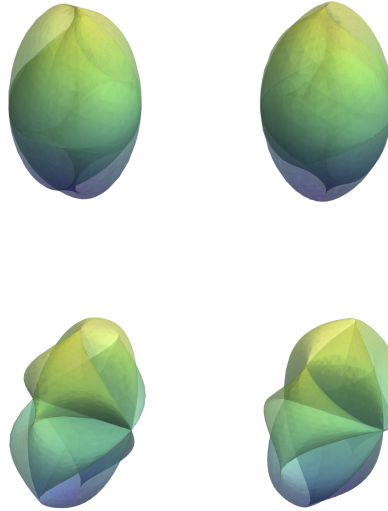


Figura 3.8: Proyecciones del toro autocontráctil $\mathcal{T}_{1,3}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

derar $v \in (0, \operatorname{arcsenh} 1]$ (y por tanto $m \leq n$) ya que $\Psi_{\hat{v}}$, con $\hat{v} = \log(\coth v/2)$, es congruente a Ψ_v .

Tomando $x_1 = \sqrt{\frac{m+n}{n}} \cos s$ y $x_2 = \sqrt{\frac{m+n}{m}} \sin s$, podemos reescribir

$$\Psi_{m,n}(s, \sqrt{mn}\theta) = (x_1 e^{in\theta}, x_2 e^{im\theta}), \quad nx_1^2 + mx_2^2 = C := m+n > 0.$$

Así llegamos de nuevo a otros ejemplos considerados por Lee y Wang en la Proposición 2.1 de [LWa10] en el caso 2-dimensional. Remarcamos que Ψ_v los generaliza aunque, al igual que pasaba con las familias Φ_δ y Υ_ρ , podrían ser incluidos en la observación de la Nota 2.1 de [LWa10].

Nota 3.2.10. Usando la Proposición 2.2.1 también obtenemos que el funcional Willmore $\mathcal{W}(M) := \int_M |H|^2 d\mu$ de los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ viene dado por

$$\mathcal{W}(\mathcal{T}_{m,n}) = \begin{cases} \frac{4(m+n)^2 \pi^2}{\sqrt{mn}}, & m \text{ o } n \text{ pares,} \\ \frac{2(m+n)^2 \pi^2}{\sqrt{mn}}, & m \text{ y } n \text{ impares.} \end{cases}$$

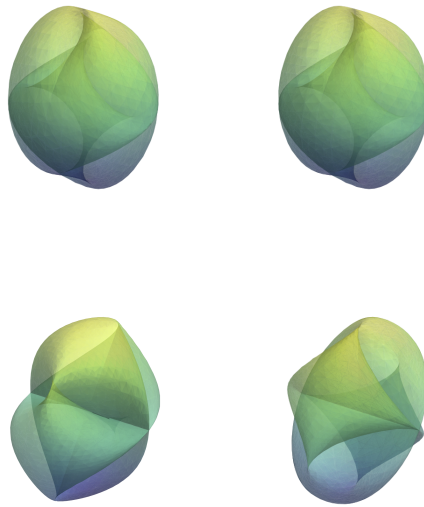


Figura 3.9: Proyecciones de la botella de Klein autocontráctil $\mathcal{K}_{1,2}$, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$.

Por otro lado, es claro que los toros lagrangianos estacionarios hamiltonianos $\mathcal{T}_{m,n}$ admiten un grupo unoparamétrico de isometrías. Usando la notación de [CU98], no es complicado comprobar que sus recubridores universales corresponden con las inmersiones $\mathcal{F}_{0,\beta}^{\pi/2}$, $\text{sen } \beta \in \mathbb{Q}$.

Demostración de la Proposición 3.2.7. Sea $\Psi = \Psi_\nu$ por abreviar la notación. Es un ejercicio comprobar que

$$|\Psi_s|^2 = t_\nu^2 \cos^2 s + c_\nu^2 \text{sen}^2 s = |\Psi_t|^2, \quad (\Psi_s, \Psi_t) = 0.$$

Esto demuestra que Ψ es una inmersión conforme lagrangiana cuya métrica inducida viene dada por

$$(3.15) \quad \Psi^* \langle , \rangle = e^{2\nu(s)} (ds^2 + dt^2), \quad e^{2\nu(s)} = t_\nu^2 \cos^2 s + c_\nu^2 \text{sen}^2 s.$$

Consideramos la base ortonormal orientada $\{e_1 = \frac{\Psi_s \partial_s}{|\partial_s|}, e_2 = \frac{\Psi_s \partial_t}{|\partial_t|}\}$ y usando esta referencia en (2.1), es sencillo obtener que $e^{i\beta_\Psi(t)} = -i e^{i c_\nu^2 t / s_\nu}$. De este modo, concluimos a la vista de (3.15)

que Ψ es estacionaria hamiltoniana ya que β_Ψ sólo depende de t . Usando (2.2) y la anterior referencia $\{e_1, e_2\}$, no es difícil obtener que el vector curvatura media de Ψ viene dado por

$$H_\Psi = \frac{c_v^2 e^{-2v}}{s_v} J\Psi_t$$

y satisface que $H_\Psi = -\Psi^\perp$.

Es fácil obtener que Ψ es un embebimiento ya que $\Psi(s_1, t_1) = \Psi(s_2, t_2)$ y $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2)$ implican que s_v^2 es un número racional.

Las propiedades geométricas de $\Psi_{m,n}$ se deducen de los datos anteriores y la Nota 3.2.8. \square

3.3. CLASIFICACIÓN DE LAS ESTACIONARIAS HAMILTONIANAS

No es fácil encontrar en la literatura resultados de clasificación local de soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura media. En el siguiente teorema clasificamos aquellas que son lagrangianas estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo.

Teorema 3.3.1. *Sea $\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ una solución autosemejante lagrangiana estacionaria hamiltoniana del flujo de la curvatura media.*

- (a) *Si ϕ es autoexpansiva, es decir $H = \phi^\perp$, entonces ϕ es localmente congruente a alguna inmersión $\phi_\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\delta > 0$ (descrita en la Proposición 3.2.1).*
- (b) *Si ϕ es autocontráctil, es decir $H = -\phi^\perp$, entonces ϕ es localmente congruente a una de las siguientes inmersiones:*
 - (i) *el cilindro circular recto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$;*
 - (ii) *el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;*
 - (iii) *$\Upsilon_\varrho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, para algún $\varrho \in (0, \pi/2)$ (descrita en la Proposición 3.2.3);*
 - (iv) *$\Psi_\nu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2$, para algún $\nu > 0$ (descrita en la Proposición 3.2.7).*

Demostración. En primer lugar, seguimos [CU93] para realizar un estudio local de ϕ . Podemos asociar a cualquier inmersión lagrangiana $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ una 3-forma diferencial Θ en M definida por

$$\Theta(z) = f(z)(dz)^3, \text{ con } f(z) = 4C(\partial_z, \partial_z, \partial_z),$$

y una forma diferencial Λ en M definida por

$$\Lambda(z) = \bar{h}(z) dz, \quad h(z) = 2\omega(\partial_{\bar{z}}, H),$$

donde $z = x + iy$ es una carta local isoterma en M de forma que la métrica inducida se escribe de la forma $\phi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle) = e^{2u} |dz|^2$, siendo $|dz|^2$ la métrica euclídea usual, y donde C y ω se extienden \mathbb{C} -linealmente a los fibrados tangente complexificados. Aclaremos que aquí h se corresponde con \bar{h} en [CU93].

Entonces, puede comprobarse que las ecuaciones de Frenet de ϕ vienen dadas por

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \phi_{zz} &= 2u_z \phi_z + \frac{\bar{h}}{2} J\phi_z + \frac{e^{-2u} f}{2} J\phi_{\bar{z}}, \\ \phi_{z\bar{z}} &= \frac{h}{2} J\phi_z + \frac{\bar{h}}{2} J\phi_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

y sus ecuaciones de compatibilidad (véase [CU93, ecuación (3.3)]) vienen dadas por

$$(3.17) \quad \begin{aligned} 4u_{z\bar{z}} + \frac{|h|^2 - e^{-4u} |f|^2}{2} &= 0, \\ \text{Im}(h_z) &= 0, \\ \bar{f}_{\bar{z}} &= e^{2u} (h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}} h). \end{aligned}$$

La ecuación (2.2), que nos relaciona H con el ángulo lagrangiano β , se puede escribir ahora como $h = \beta_{\bar{z}}$.

Debido a que ϕ es una solución autosemejante del flujo de la curvatura media, de (1.5) tenemos que $h = -\varepsilon \langle \phi_{\bar{z}}, J\phi \rangle$, siendo $\varepsilon = \pm 1$, y de (3.16) se deduce que

$$(3.18) \quad h_z = -\frac{\varepsilon}{2} \text{Re} \left(h |\phi|_z^2 \right).$$

Teniendo en cuenta en (3.16) que $\langle \phi_z, \phi_{\bar{z}} \rangle = e^{2u}/2$ y $\langle \phi_z, \phi_z \rangle = 0$ se tiene que

$$(3.19) \quad |\phi|_{z\bar{z}}^2 = 2\varepsilon |h|^2 + e^{2u}$$

y

$$(3.20) \quad |\phi|_{zz}^2 = 2u_z |\phi|_z^2 + \varepsilon (\bar{h}^2 + e^{-2u} fh).$$

Como ϕ es también una inmersión lagrangiana estacionaria hamiltoniana, la segunda ecuación de (3.17) nos dice que $\bar{h}_{\bar{z}} = h_z = \beta_{z\bar{z}} = 0$. De ahí deducimos que Λ es una diferencial

holomorfa, y podemos normalizar $h \equiv \mu$, $\mu > 0$, ya que h y H tienen los mismo ceros y $a \neq 0$. Así, (3.18) dice que la función $g := |\phi|^2$ satisface $g_x = 0$; esto es, $g = g(y)$. Además, de (3.19) se sigue que g satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$(3.21) \quad g'' = 4(2\varepsilon\mu^2 + e^{2u}).$$

En particular, obtenemos que $u = u(y)$ también depende sólo de la variable y . A partir de (3.20), podemos expresar f en términos de g y u como

$$(3.22) \quad f = \frac{e^{2u}}{\mu} \left(\frac{\varepsilon}{2} u' g' - \frac{\varepsilon}{4} g'' - \mu^2 \right).$$

Si ϕ^\top denota la componente tangente de ϕ , usando que $|h| = \frac{e^{2u}}{4} |H|^2$ y tomando módulos en la igualdad

$$\phi = \phi^\top + \varepsilon H,$$

tenemos que

$$(3.23) \quad g = e^{-2u} \left(\frac{g'^2}{4} + 4\mu^2 \right).$$

Esto implica que $g > 0$.

Combinando (3.21) y (3.23) llegamos a la siguiente ecuación diferencial ordinaria para g :

$$(3.24) \quad g g'' - g'^2 = 16\mu^2 \left(1 + \frac{a}{2} g \right).$$

La ecuación (3.24) no admite soluciones constantes si $a \neq -1$ y, para $a = -1$, tiene como única solución constante $g \equiv 2$. En este caso, de (3.21) o de (3.23) se tiene que $e^{2u} \equiv 2\mu^2$ y (3.22) nos dice que $f \equiv -2\mu^3$. La integración de las correspondientes ecuaciones de Frenet (3.16), que en este caso se expresan simplemente como $\phi_{xx} = \phi_{yy} = \mu J\phi_x$, $\phi_{xy} = \mu J\phi_y$, nos lleva al toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Esto prueba del apartado (b)(ii).

En el caso general, obtenemos una integral primera para (3.24) dada por

$$(3.25) \quad g'^2 = P(g) := 4Eg^2 - 16\varepsilon\mu^2 g - 16\mu^2, \quad E \in \mathbb{R}.$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar una ecuación diferencial ordinaria para el parámetro conforme de la métrica inducida. Usando (3.23) y (3.25) tenemos que

$$(3.26) \quad e^{2u} = E g - 4\mu^2/a.$$

Entonces (3.25) se traduce en

$$(3.27) \quad u'^2 - 4\varepsilon\mu^2 E e^{-2u} + 4\mu^2 E^2 e^{-4u} = E,$$

y así

$$(3.28) \quad u'' + 4\varepsilon\mu^2 E e^{-2u} - 8\mu^2 E^2 e^{-4u} = 0.$$

Usando (3.26) y (3.27), (3.22) implica que

$$(3.29) \quad f = \mu (e^{2u} - 4\varepsilon E),$$

que es compatible con las ecuaciones (3.17) y (3.28).

Usando la expresión de f obtenida en (3.29), podemos reescribir las ecuaciones de Frenet (3.16) del siguiente modo:

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \phi_{xx} &= -u' \phi_y + (2\mu - 2\varepsilon\mu E e^{-2u}) J\phi_x, \\ \phi_{xy} &= u' \phi_x + 2\varepsilon\mu E e^{-2u} J\phi_y, \\ \phi_{yy} &= u' \phi_y + 2\varepsilon\mu E e^{-2u} J\phi_x. \end{aligned}$$

Después de un largo cálculo, usando (3.30), (3.27) y (3.28), obtenemos que $\phi_{xyy} = E\phi_x$ y $\phi_{yyy} = E\phi_y$. Salvo traslaciones, podemos considerar

$$(3.31) \quad \phi_{yy} = E\phi,$$

y de (3.30)

$$(3.32) \quad \phi_{xx} = -E\phi + 2\mu J\phi_x.$$

En particular, $H = 2\mu e^{-2u} J\phi_x$.

Por un lado, cuando $E = 0$, de (3.25) se tiene necesariamente que $\varepsilon = -1$. Obtenemos que $e^{2u} \equiv 4\mu^2$ de (3.26) y $f \equiv 4\mu^3$ de (3.29). Integrando las correspondientes ecuaciones de Frenet (3.30), obtenemos simplemente que $\phi_{xx} = 2\mu J\phi_x$, $\phi_{xy} = \phi_{yy} = 0$, lo que conduce al cilindro circular recto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Esto prueba el apartado (b)(i).

Por otro lado, cuando $E \neq 0$, el discriminante del polinomio de segundo grado $P(g)$ en (3.25) es $256\mu^2(\mu^2 + E)$. Como $P(g) = g'^2$, debe ser no negativo para $g > 0$ (y observamos que $P(0) < 0$), distinguimos dos casos según el signo de la energía E para alcanzar las siguientes conclusiones:

- *Caso (a)*: Si $E > 0$, entonces g está acotada inferior y superiormente.
- *Caso (b)*: Si $E < 0$, necesariamente se tiene $E \geq -\mu^2$, y g está inferiormente acotada. Observamos que (3.26) muestra que si $E < 0$, entonces necesariamente $\varepsilon = -1$, y apuntamos también que el caso $E = -\mu^2$ corresponde precisamente con el caso constante $g \equiv 2$.

Procedemos ahora a integrar explícitamente (3.30) a través de (3.31) y (3.32). En vista de (3.26) no se pierde generalidad si suponemos que $u'(0) = 0$. Sea $\alpha := e^{2u(0)} > 0$. Entonces (3.27) nos dice que

$$(3.33) \quad E = \varepsilon \alpha \left(1 + \frac{\varepsilon \alpha}{4\mu^2} \right).$$

Caso (a) ($E > 0$). Usando (3.30), (3.31) y (3.32), obtenemos

$$\phi(x, y) = \cosh(\sqrt{E}y) C_1(x) + \sinh(\sqrt{E}y) C_2(x),$$

donde $C_1(x) = \frac{2\varepsilon\mu}{\alpha} J\phi_x(x, 0)$ y $C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{E}} \phi_y(x, 0)$. Es claro que $(C_1(x), C_2(x)) = 0$ y, además, (3.30) y (3.33) implican que

$$C_1'(x) = \frac{-i\varepsilon\alpha}{2\mu} C_1(x), \quad C_2'(x) = \frac{2i\varepsilon\mu E}{\alpha} C_2(x).$$

Eligiendo en \mathbb{C}^2 la base unitaria $\varepsilon_1 = \phi_x(0, 0)/\sqrt{\alpha}$, $\varepsilon_2 = \phi_y(0, 0)/\sqrt{\alpha}$, llegamos a que

$$\phi(x, y) = \left(\frac{2i\varepsilon\mu}{\sqrt{\alpha}} \cosh(\sqrt{E}y) \exp\left(-\frac{i\varepsilon\alpha}{2\mu}x\right), \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{E}} \sinh(\sqrt{E}y) \exp\left(\frac{2i\varepsilon\mu E}{\alpha}x\right) \right).$$

Introduciendo el nuevo parámetro $b := g(0) > 0$ y usando (3.23), tenemos que $b = \frac{4\mu^2}{\alpha}$. Por tanto, de (3.33) deducimos que $1 + \varepsilon b = \frac{4\mu^2 E}{\alpha^2}$. Observemos que si $\varepsilon = -1$, entonces $0 < b < 1$ ya que estamos en el caso $E > 0$. Haciendo el cambio de coordenadas $x + iy = \frac{1}{\sqrt{E}}(s + it)$, finalmente tenemos

$$\phi(s, t) = \left(\pm i\sqrt{b} \cosh t \exp\left(\frac{\mp i s}{\sqrt{1 + \varepsilon b}}\right), \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1 + \varepsilon b}} \sinh t \exp\left(\pm i\sqrt{1 + \varepsilon b} s\right) \right),$$

siendo el signo \pm según que $\varepsilon = \pm 1$.

Si $\varepsilon = 1$ escribimos que $b = \sinh^2 \delta$, $\delta > 0$, y esto prueba el apartado (a); si $\varepsilon = -1$, ponemos $b = \sin^2 \varrho$, $0 < \varrho < \pi/2$, y esto prueba el apartado (b)(iii).

Caso (b) ($-\mu^2 \leq E < 0$). En este caso, recordamos que necesariamente $\varepsilon = -1$ y el razonamiento es similar. Usando (3.30), (3.31) y (3.32), obtenemos que

$$\phi(x, y) = \cos(\sqrt{-E}y) C_1(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{-E}y) C_2(x),$$

donde $C_1(x) = -\frac{2\mu}{\alpha} J\phi_x(x, 0)$ y $C_2(x) = \frac{1}{\sqrt{-E}} \phi_y(x, 0)$. De nuevo (3.30) y (3.33) implican que

$$C_1'(x) = \frac{i\alpha}{2\mu} C_1(x), \quad C_2'(x) = -\frac{2i\mu E}{\alpha} C_2(x).$$

De esta forma, ϕ viene dada por la expresión

$$\phi(x, y) = \left(-\frac{2i\mu}{\sqrt{\alpha}} \cos(\sqrt{-E}y) \exp\left(\frac{i\alpha}{2\mu}x\right), \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-E}} \operatorname{senh}(\sqrt{-E}y) \exp\left(-\frac{2i\mu E}{\alpha}x\right) \right).$$

Introduciendo el nuevo parámetro $c := g(0) > 0$ y usando (3.23), se tiene que $c = \frac{4\mu^2}{\alpha}$. Usando ahora (3.33), llegamos a que $-1 + c = \frac{-4\mu^2 E}{\alpha^2}$ (observamos que $-\mu^2 \leq E < 0$ implica que $c > 1$). Haciendo el cambio las coordenadas $x + iy = \frac{1}{\sqrt{-E}}(t + is)$, tenemos que

$$\phi(t, s) = \left(-i\sqrt{c} \cos s \exp\left(\frac{it}{\sqrt{-1+c}}\right), \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-1+c}} \operatorname{sen} s \exp\left(i\sqrt{-1+c}t\right) \right),$$

donde $c > 1$. Finalmente poniendo $c = \cosh^2 \nu$, $\nu > 0$, se prueba la parte (b)(iv). \square

Consecuencia del Teorema 3.3.1 es la siguiente caracterización de los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ que estudiaron Lee y Wang (véase la Nota 3.2.9).

Corolario 3.3.2. *Los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ (descritos en la Proposición 3.2.7) son las únicas soluciones auto-semejantes lagrangianas estacionarias hamiltonianas del flujo de la curvatura media compactas y orientables en el plano euclídeo complejo.*

4

SOLITONES DE TRASLACIÓN LAGRANGIANOS EN EL PLANO EUCLÍDEO COMPLEJO

En este capítulo construimos numerosos nuevos ejemplos de solitones de traslación lagrangianos en \mathbb{C}^2 , haciendo uso de ciertas soluciones del flujo de “acortamiento” de curvas, que incluyen curvas autocontráctiles, autoexpansivas o espirales. Nuestros ejemplos generalizan extensiblemente (en el caso 2-dimensional) los sorprendentes solitones de traslación encontrados por Joyce, Lee y Tsui en [JLT10].

Todos ellos quedarán caracterizados localmente en términos de una condición analítica sobre el producto hermitico del vector de posición de la inmersión y el vector de traslación, que nos permitirá una separación de variables en el proceso de integración.

El ejemplo (no trivial) más sencillo de nuestra familia, construido a partir de una recta y una circunferencia, se caracteriza como el único solitón de traslación lagrangiano estacionario hamiltoniano (no totalmente geodésico) para el flujo de la curvatura media en el plano euclídeo complejo.

4.1. CONSTRUCCIÓN DE SUPERFICIES LAGRANGIANAS CON CURVAS PLANAS

En esta sección describimos una construcción de superficies lagrangianas en \mathbb{C}^2 en términos de curvas planas ([CL13]) que goza de buenas propiedades geométricas en el sentido que son similares a una construcción tipo a un producto de curvas. Destacamos en el siguiente resultado aquellas propiedades geométricas que nos resultarán de interés posteriormente para la construcción de solitones de traslación lagrangianos en \mathbb{C}^2 .

Proposición 4.1.1. Sean $\alpha := \alpha(t) : I_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \in I_1$ y $\omega := \omega(s) : I_2 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $s \in I_2$, curvas planas, donde I_1 e I_2 son intervalos de \mathbb{R} . Para cualquier $t_0 \in I_1$ y $s_0 \in I_2$, definimos

$$\Phi := \alpha * \omega : I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

$$\Phi(t, s) = \left(\int_{s_0}^s \dot{\omega}(y) \overline{\omega(y)} dy - \int_{t_0}^t \alpha'(x) \overline{\alpha(x)} dx, \alpha(t) \omega(s) \right),$$

donde ' y ' denota la derivada respecto a t y a s respectivamente.

Entonces Φ es una inmersión lagrangiana cuya métrica inducida es

$$(4.1) \quad \Phi^*(\langle, \rangle) = (|\alpha|^2 + |\omega|^2) (|\alpha'|^2 dt^2 + |\dot{\omega}|^2 ds^2),$$

cuya aplicación ángulo lagrangiano viene dada por

$$(4.2) \quad \beta_\Phi \equiv \arg \alpha' + \arg \dot{\omega} + \pi \pmod{2\pi}$$

y cuya curvatura media es

$$(4.3) \quad H_\Phi = \frac{1}{|\alpha|^2 + |\omega|^2} (\kappa_\alpha J\Phi_t + \kappa_\omega J\Phi_s),$$

donde κ_α y κ_ω denotan las curvaturas de α y ω .

Demostración. Veamos en primer lugar que Φ es una inmersión lagrangiana. Es fácil obtener que

$$(4.4) \quad \Phi_* \partial_t \equiv \Phi_t = \alpha'(-\bar{\alpha}, \omega), \quad \Phi_* \partial_s \equiv \Phi_s = \dot{\omega}(\bar{\omega}, \alpha)$$

Por tanto, deducimos que

$$(4.5) \quad |\Phi_t|^2 = |\alpha'|^2 (|\alpha|^2 + |\omega|^2), \quad (\Phi_t, \Phi_s) = 0, \quad |\Phi_s|^2 = |\dot{\omega}|^2 (|\alpha|^2 + |\omega|^2).$$

Así pues, Φ es una inmersión lagrangiana cuya métrica inducida viene dada por (4.1).

Consideramos ahora la base ortonormal orientada $\{e_1 = \frac{\Phi_* \partial_t}{|\Phi_* \partial_t|}, e_2 = \frac{\Phi_* \partial_s}{|\Phi_* \partial_s|}\}$ del plano tangente a $\Phi(I_1 \times I_2)$ con objeto de calcular el ángulo lagrangiano β_Φ de Φ según (2.1). Usando (4.4) y (4.5), se tiene que

$$\begin{aligned} e^{i\beta_\Phi} &= \det_{\mathbb{C}}(\Phi_* e_1, \Phi_* e_2) = \det_{\mathbb{C}} \left(\frac{\Phi_t}{|\Phi_t|}, \frac{\Phi_s}{|\Phi_s|} \right) \\ &= \frac{\alpha' \dot{\omega}}{|\alpha'| |\omega| (|\alpha|^2 + |\omega|^2)} \begin{vmatrix} -\bar{\alpha} & \bar{\omega} \\ \omega & \alpha \end{vmatrix} = -\frac{\alpha' \dot{\omega}}{|\alpha'| |\dot{\omega}|}, \end{aligned}$$

que implica (4.2). Calculamos finalmente H_Φ a partir de (2.2) utilizando de nuevo la referencia $\{e_1, e_2\}$ antes utilizada. Usando que $(\arg \alpha')' = \langle \alpha'', J\alpha' \rangle / |\alpha'|^2$ y $(\arg \dot{\omega})' = \langle \ddot{\omega}, J\dot{\omega} \rangle / |\dot{\omega}|^2$, es fácil concluir la expresión dada para H_Φ en (4.3). □

Nota 4.1.2.

1. Intercambiando los papeles de α y ω obtenemos superficies congruentes en \mathbb{C}^2 . Igual ocurre con rotaciones de α y/o ω . Pero solo considerando la misma homotecia para α y para ω llegaríamos a conseguir inmersiones lagrangianas homotéticas. Concretamente $l\alpha * l\omega = l^2\alpha * \omega, \forall l > 0$.
2. Observamos además, a la vista de (4.1), que si $(t^*, s^*) \in \mathbb{R}^2$ verificase que $\alpha(t^*) = 0 = \omega(s^*)$, entonces (t^*, s^*) sería un punto singular de $\alpha * \omega$. Por ello, se exige en el Proposición 4.1.1 que las curvas α y ω generatrices de $\alpha * \omega$ no pasen por el origen.

Si tomamos en nuestra construcción $\alpha * \omega$ descrita en la Proposición 4.1.1 las curvas más sencillas posibles, esto es, rectas que pasan por el origen,

$$(4.6) \quad \alpha_0(t) = t, \quad t \in \mathbb{R}; \quad \omega_0(s) = s, \quad s \in \mathbb{R}$$

obtenemos una parametrización del plano lagrangiano totalmente geodésico dada por

$$(4.7) \quad (\alpha_0 * \omega_0)(t, s) = \left(\frac{s^2 - t^2}{2}, ts \right).$$

Cuando consideramos como curvas generatrices circunferencias centradas en el origen,

$$(4.8) \quad \alpha_{R_1}(t) = R_1 e^{it}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad R_1 > 0; \quad \omega_{R_2}(s) = R_2 e^{is}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad R_2 > 0$$

recuperamos el cilindro circular recto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 (R_1 R_2)$ parametrizado por

$$(4.9) \quad (\alpha_{R_1} * \omega_{R_2})(t, s) = (R_1^2 s - R_2^2 t, R_1 R_2 e^{i(s+t)}).$$

De especial interés en este capítulo será la superficie lagrangiana $\mathfrak{P} := \alpha_1 * \omega_0$ (véase la Figura 4.1) dada por

$$(4.10) \quad \mathfrak{P}(t, s) = \left(\frac{s^2}{2} - it, e^{it} s \right), \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

cuyos datos geométricos son

$$(4.11) \quad \mathfrak{P}^*(\cdot, \cdot) = (1 + s^2) (dt^2 + ds^2), \quad \beta_{\mathfrak{P}}(t) = t + 3\pi/2, \quad H_{\mathfrak{P}} = \frac{J\mathfrak{P}_t}{1 + s^2}.$$

Usando (4.11), es fácil concluir que $\beta_{\mathfrak{P}}$ es armónico y, por tanto, se trata de un embebimiento lagrangiano completo del plano \mathbb{R}^2 que es estacionario hamiltoniano.

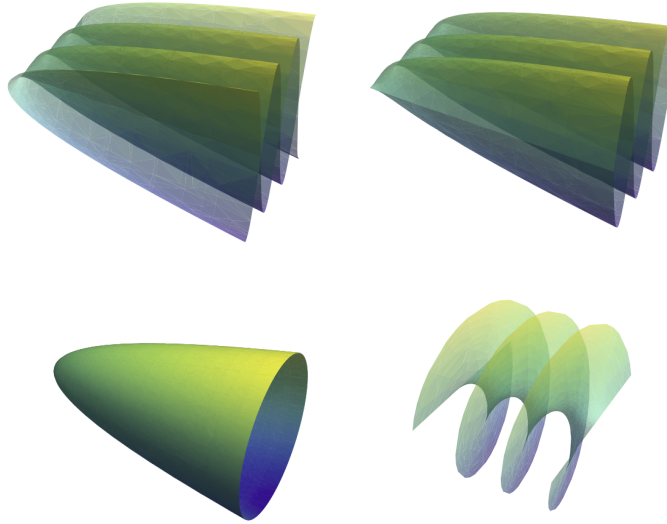


Figura 4.1: Proyecciones del solitón de translación $\alpha_1 * \omega_0$ estacionario hamiltoniano, en los 3-espacios coordenados de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

En [CL13] estudiamos la familia $\alpha * \omega$ introducida en la Proposición 4.1.1 bajo diferentes ecuaciones relacionadas con las curvatura media. Comentar que es posible incluso obtener superficies lagrangianas compactas para adecuadas curvas generatrices α y ω , como Lemniscatas de Gerono o curvas Lissajours.

4.2. NUEVOS EJEMPLOS

Comenzamos esta sección describiendo en el siguiente resultado una familia 2-paramétrica de curvas planas que proporcionan una curiosa solución para el flujo de “acortamiento” de curvas (1.14).

Lema 4.2.1. *Sea α una curva plana parametrizada por el arco. Supongamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$, no nulos simultáneamente, tales que la función curvatura κ_α de α satisface*

$$(4.12) \quad \kappa_\alpha = a \langle \alpha(t), J\alpha'(t) \rangle + b \langle \alpha(t), \alpha'(t) \rangle$$

donde $'$ denota la derivada respecto al parámetro arco de α . Entonces la familia de curvas

$$(4.13) \quad \alpha_t = \sqrt{2at+1} e^{i \frac{b}{2a} \log(2at+1)} \alpha, \quad 2at+1 > 0,$$

es una solución del flujo de la curvatura media para curvas

$$(4.14) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \alpha_t \right)^\perp = \overrightarrow{\kappa_{\alpha_t}}$$

tal que $\alpha_0 = \alpha$. Además, κ_α satisface la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$(4.15) \quad \kappa_\alpha \kappa_\alpha'' - \kappa_\alpha'^2 + \kappa_\alpha^2 (a + \kappa_\alpha^2) + b \kappa_\alpha' = 0.$$

Nota 4.2.2. En los casos límites $b = 0$ y $a \rightarrow 0$ recuperamos soluciones bien conocidas del flujo de la curvatura media para curvas:

- Si $b = 0$, (4.12) nos dice que el vector curvatura de α satisface $\overrightarrow{\kappa_\alpha} = a\alpha^\perp$ y, por tanto, α es una solución autosemejante del flujo para curvas, autocontráctil (véase la Figura 1.3) o autoexpansivo (véase la Figura 1.4) dependiendo de que $a < 0$ o $a > 0$ respectivamente; usando (4.13) el flujo $\alpha_t = \sqrt{2at+1} \alpha$ viene dado por homotecias de α en este caso.

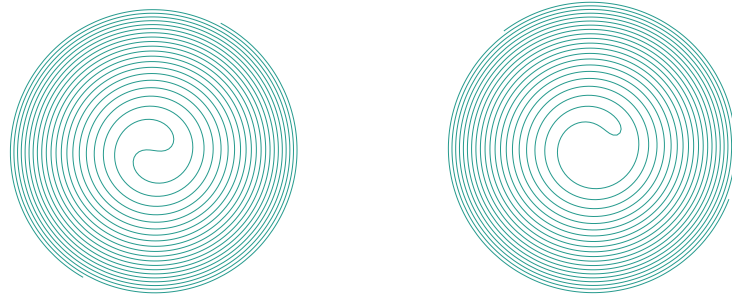


Figura 4.2: Curvas que rotan bajo el flujo de “acortamiento” de curvas.

- Cuando $a \rightarrow 0$, obtenemos de (4.12) que $\vec{\kappa}_\alpha = b(J\alpha)^\perp$ y, por tanto, α es una espiral con velocidad $|b|$ (véase [ChZ01]); usando (4.13) el flujo $\alpha_t = e^{ibt} \alpha$ viene dado por rotaciones de α en este otro caso (véase la Figura 4.2).

Demostración del Lema 4.2.1. Usando que el vector normal de α_t viene dado por $J\alpha'_t/\sqrt{2at+1}$ y que $\kappa_{\alpha_t} = \kappa_\alpha/\sqrt{2at+1}$, resulta que (4.14) es equivalente a $\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t, J\alpha'_t \rangle = \kappa_\alpha$. Es un ejercicio comprobar que

$$(4.16) \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t, J\alpha'_t \right\rangle = \text{Im} \left((a + ib) \overline{\alpha}' \alpha \right).$$

Pero precisamente la condición (4.12) que verifica κ_α puede reescribirse como $\kappa_\alpha = \text{Im}((a + ib) \overline{\alpha}' \alpha)$, lo que prueba que la familia α_t dada en (4.13) verifica (4.14).

Para demostrar la última parte del lema, definimos $f := \langle \alpha', \alpha \rangle$ y $g := \langle \alpha', J\alpha \rangle$; de esta forma, la curvatura de α se expresa de la forma $\kappa_\alpha = bf - ag$. Usando las ecuaciones de Frenet de α , se obtiene que $f' = 1 - \kappa_\alpha g$, $g' = \kappa_\alpha f$ y es claro que $f^2 + g^2 = |\alpha|^2$. Calculamos ahora por separado cada componente de la ecuación diferencial (4.15):

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha \ddot{\kappa}_\alpha &= a^4 g^2 f^2 - 2a^3 b g f^3 + 3a^2 b g f + 6a^3 b g^3 f - 10a^2 b^2 f^2 g^2 \\ &\quad - a^3 g^2 - a^4 g^4 + 6ab^3 f^3 g + ab^2 g^2 - 2ab^3 g^3 f + a^2 b^2 g^4 + a^2 b^2 f^4 \\ &\quad - 2ab^2 f^2 - b^4 f^4 - b^3 g f + b^4 f^2 g^2, \\ \dot{\kappa}_\alpha^2 &= a^4 g^2 f^2 - 2a^3 b g f^3 + a^2 b^2 f^4 + 2a^2 b g f - 2ab^2 f^2 + 2a^3 b g^3 f \\ &\quad - 4a^2 b^2 f^2 g^2 + 2ab^3 g f^3 + b^2 + 2ab^2 g^2 - 2b^3 f g + a^2 b^2 g^4 \\ &\quad - 2ab^3 f g^3 + b^4 f^2 g^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha^2 (a + \kappa_\alpha^2) &= a^3 g^2 - 2a^2 b f g + ab^2 f^2 + a^4 g^4 - 4a^3 b g^3 + 6a^2 b^2 g^2 f^2 \\ &\quad - 4ab^3 f^3 g + b^4 f^4, \\ b\dot{\kappa}_\alpha &= -a^2 b g f + ab^2 f^2 - b^2 - ab^2 g^2 + b^3 f g.\end{aligned}$$

Entonces, tras este cálculo, obtenemos que κ_α satisface (4.15).

□

Nota 4.2.3. El flujo descrito en (4.13) ha sido también estudiado independientemente por Hall-dorsson en [Ha12]. El comportamiento geométrico de las curvas de esta familia 2-paramétrica depende de los valores de las constantes a y b que aparecen en la ecuación (4.12). Destacamos por ejemplo, las siguientes propiedades:

- Si $a > 0$ y $b \neq 0$ las curvas son propiamente embebidas, tienen un punto más cercano al origen y consisten en dos brazos que salen de este punto y se van al infinito. Cada brazo tiene curvatura total infinita y giran infinitamente alrededor del origen. Bajo el flujo de la curvatura de “acortamiento” las curvas rotan y se expanden (véase la Figura 4.3).



Figura 4.3: Curvas que bajo el flujo de “acortamiento” de curvas se expanden y rotan, para los valores $a = 1$ y $b \pm 1$.

- Si $a < 0$ y $b \neq 0$ tenemos dos tipos de curvas: curvas cuyo comportamiento límite es enrollarse alrededor de la circunferencia de radio $1/\sqrt{-a}$, en el sentido de las agujas de reloj cuando $b < 0$ y en sentido contrario si $b > 0$ (véase la Figura 4.4) y curvas cuya curvatura nunca cambia de signo y cuyos finales tienen comportamientos distintos: uno se enrolla alrededor de la circunferencia de radio $1/\sqrt{-a}$ en sentido de las agujas del reloj si $b < 0$ y en sentido contrario si $b > 0$; el otro final gira infinitamente alrededor del

origen y tiene curvatura total infinita (véase la Figura 4.5). Bajo el flujo de la curvatura de “acortamiento” las curvas rotan y se contraen.

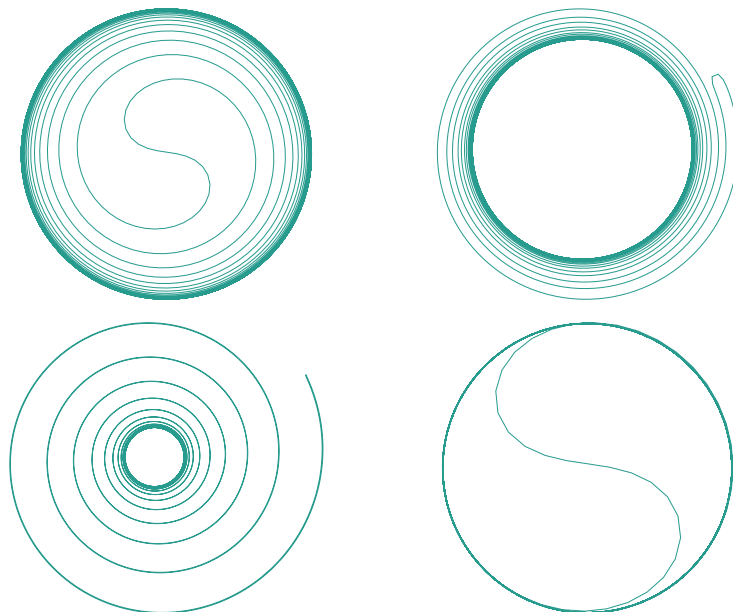


Figura 4.4: Curvas que bajo el flujo de “acortamiento” de curvas se contraen y rotan, para los valores $a = -1$ y $b \neq 0$.

Independientemente del propio interés en sí de las curvas definidas en el Lema 4.2.1 que acabamos de describir, sorprendentemente algunas de ellas van a ser el ingrediente clave para construir nuevos ejemplos de solitones de traslación lagrangianos del flujo de la curvatura media. Esencialmente, tomando en la construcción $\alpha * \omega$ definida en la Proposición 4.1.1 una pareja de curvas generatrices descritas en el Lema 4.2.1 siendo $a = -\cos \varphi$, $b = \sin \varphi$ para α y $a = \cos \varphi$, $b = -\sin \varphi$ para ω , para cierto parámetro angular $\varphi \in [0, \pi)$ fijo.

Proposición 4.2.4. Dado $\varphi \in [0, \pi)$, sean $\alpha = \alpha(t)$, $t \in I_1 \subseteq \mathbb{R}$, y $\omega = \omega(s)$, $s \in I_2 \subseteq \mathbb{R}$, curvas planas parametrizadas por el arco cuyos vectores curvatura satisfacen

$$(4.17) \quad \vec{\kappa}_\alpha = -\cos \varphi \alpha^\perp + \sin \varphi (J\alpha)^\perp, \quad \vec{\kappa}_\omega = \cos \varphi \omega^\perp - \sin \varphi (J\omega)^\perp,$$

donde $^\perp$ denota componente normal e I_1, I_2 son intervalos en \mathbb{R} .

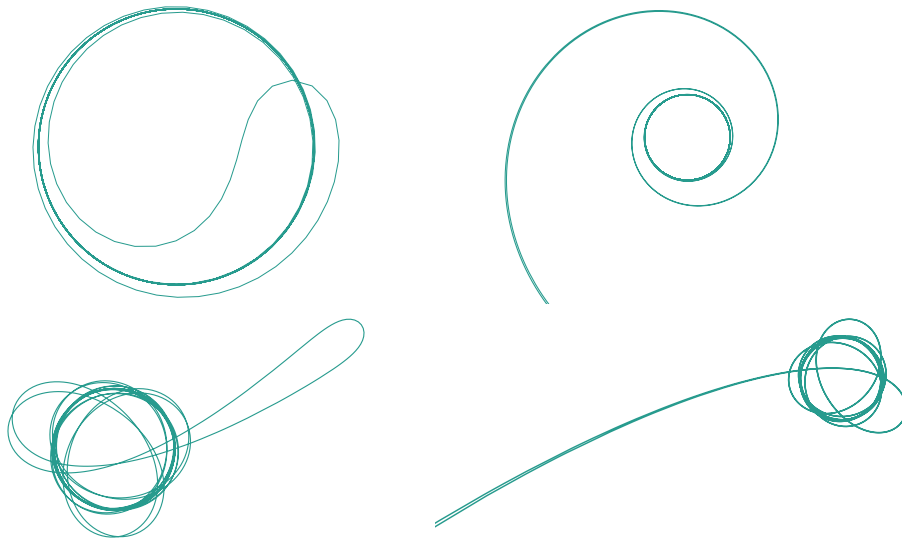


Figura 4.5: Curvas que bajo el flujo de “acortamiento” de curvas se contraen y rotan, para los valores $a = -1$ y $b \neq 0$.

Se define $\mathfrak{p} : I_1 \times I_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ por

$$(4.18) \quad \varphi \neq \pi/2: \quad \mathfrak{p}(t, s) = \left(\frac{|\omega(s)|^2 - |\alpha(t)|^2}{2 \cos \varphi} + (\tan \varphi - i) (\arg \alpha'(t) + \arg \dot{\omega}(s)), \alpha(t) \omega(s) \right)$$

y

$$(4.19) \quad \varphi = \pi/2: \quad \mathfrak{p}(t, s) = \left(\int_{t_0}^t \langle \alpha', J\alpha \rangle(x) dx - \int_{s_0}^s \langle \dot{\omega}, J\omega \rangle(y) dy - i (\arg \alpha'(t) + \arg \dot{\omega}(s)), \alpha(t) \omega(s) \right),$$

donde $'$ y $\dot{}$ denotan las derivadas respecto a t y s respectivamente, $t_0 \in I_1$ y $s_0 \in I_2$. Entonces \mathfrak{p} es un solitón de traslación lagrangiano del flujo de la curvatura media con vector de traslación $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Demostración. Las hipótesis (4.17) sobre α y ω son claramente equivalentes a

$$(4.20) \quad \begin{aligned} \kappa_\alpha &= \cos \varphi \langle \alpha'(t), J\alpha(t) \rangle + \sin \varphi \langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle, \\ \kappa_\omega &= -\cos \varphi \langle \dot{\omega}(s), J\omega(s) \rangle - \sin \varphi \langle \dot{\omega}(s), \omega(s) \rangle. \end{aligned}$$

Considerando $\alpha(t)$ y $\omega(s)$ como funciones complejas, podemos reescribir (4.20) como

$$(4.21) \quad \kappa_\alpha = \operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \alpha'(t) \overline{\alpha(t)} \right), \quad \kappa_\omega = -\operatorname{Im} \left(e^{i\varphi} \dot{\omega}(s) \overline{\omega(s)} \right).$$

Para cualquier $t_0 \in I_1$ y $s_0 \in I_2$, usando (4.20), (4.17) o (4.21), que $(|\alpha|^2)' = 2\langle \alpha', \alpha \rangle$, $(|\omega|^2)' = 2\langle \dot{\omega}, \omega \rangle$ y que $(\arg \alpha')' = \kappa_\alpha$, $(\arg \dot{\omega})' = \kappa_\omega$ ya que α y ω están parametrizadas por el arco, no es difícil comprobar que tanto si $\varphi \neq \pi/2$ como si $\varphi = \pi/2$, \mathfrak{p} puede escribirse, salvo traslaciones, para cualquier $\varphi \in [0, \pi)$ de la siguiente manera

$$(4.22) \quad \mathfrak{p}(t, s) = \left(e^{i\varphi} \left(\int_{s_0}^s \dot{\omega}(y) \overline{\omega(y)} dy - \int_{t_0}^t \alpha'(x) \overline{\alpha(x)} dx \right), \alpha(t) \omega(s) \right) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha * \omega.$$

Por tanto, salvo una rotación \mathfrak{p} es congruente a la inmersión $\alpha * \omega$.

Usando la Proposición 4.1.1 tenemos que \mathfrak{p} es una inmersión lagrangiana conforme con métrica inducida $e^{2u} (dt^2 + ds^2)$, $e^{2u} = (|\alpha|^2 + |\omega|^2)$ y resulta que su ángulo lagrangiano es $\beta_{\mathfrak{p}} = \pi + \varphi + \arg \alpha' + \arg \dot{\omega}$ y su vector curvatura media viene dado por

$$(4.23) \quad H_{\mathfrak{p}} = e^{-2u} (\kappa_\alpha J\mathfrak{p}_t + \kappa_\omega J\mathfrak{p}_s).$$

Finalmente, calculamos $(1, 0)^\perp$ usando que la métrica inducida es conforme, (4.21) y (4.22):

$$(4.24) \quad \begin{aligned} (1, 0)^\perp &= e^{-2u} (\langle (1, 0), J\mathfrak{p}_t \rangle J\mathfrak{p}_t + \langle (1, 0), J\mathfrak{p}_s \rangle J\mathfrak{p}_s) \\ &= e^{-2u} (\operatorname{Im} \langle (1, 0), \mathfrak{p}_t \rangle J\mathfrak{p}_t + \operatorname{Im} \langle (1, 0), \mathfrak{p}_s \rangle J\mathfrak{p}_s) \\ &= e^{-2u} (\operatorname{Im} (e^{i\varphi} \overline{\alpha} \alpha') J\mathfrak{p}_t - \operatorname{Im} (e^{i\varphi} \overline{\omega} \dot{\omega}) J\mathfrak{p}_s) \\ &= e^{-2u} (\kappa_\alpha J\mathfrak{p}_t + \kappa_\omega J\mathfrak{p}_s), \end{aligned}$$

Por tanto de (4.23) y (4.24) se sigue que $(1, 0)^\perp = H_{\mathfrak{p}}$. Así pues, \mathfrak{p} es un solitón de traslación con vector de traslación $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$. \square

Nota 4.2.5. Las condiciones (4.17) y (4.21) son invariantes por rotaciones de las curvas α y ω . En el caso $\varphi = \pi/2$, α y ω deben satisfacer $\overrightarrow{\kappa_\alpha} = (J\alpha)^\perp$ y $\overrightarrow{\kappa_\omega} = -(J\omega)^\perp$, respectivamente. Por

tanto, dos espirales con velocidades opuestas ± 1 (véase la Nota 4.2.2)) nos proporcionan bajo la construcción (4.19) un solitón de traslación lagrangiano para el flujo de la curvatura media. Debido a que en este caso $\kappa_\alpha = \langle \alpha, \alpha' \rangle$ y $\kappa_\omega = -\langle \dot{\omega}, \omega \rangle$, tenemos que el ángulo lagrangiano en el caso (4.20) se reduce a $\varphi = \pi/2$ viene dado, salvo constantes, por $(|\alpha(t)|^2 - |\omega(s)|^2)/2$.

En el siguiente resultado, prestamos nuestra atención al caso $\varphi = 0$.

Corolario 4.2.6. Sean $\alpha_{\mathcal{G}}$ y $\omega_{\mathcal{E}}$ dos soluciones autosemejantes del flujo de la curvatura para curvas con diferente carácter, es decir, $\alpha_{\mathcal{G}}$ es una curva autocontráctil verificando $\overrightarrow{\kappa}_{\alpha_{\mathcal{G}}} = -\alpha_{\mathcal{G}}^\perp$ y $\omega_{\mathcal{E}}$ una curva autoexpansiva verificando $\overrightarrow{\kappa}_{\omega_{\mathcal{E}}} = \omega_{\mathcal{E}}^\perp$. Entonces $\alpha_{\mathcal{G}} * \omega_{\mathcal{E}} : I_1 \times I_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ viene dada por

$$(4.25) \quad (\alpha_{\mathcal{G}} * \omega_{\mathcal{E}})(t, s) = \left(\frac{|\omega(s)|^2 - |\alpha(t)|^2}{2} - i(\arg \alpha'(t) + \arg \dot{\omega}(s)), \alpha(t)\omega(s) \right)$$

y es un solitón de traslación lagrangiano para el flujo de la curvatura media con vector de traslación $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$.

En particular, considerando las rectas $\alpha_0(t) = t$ y $\omega_0(s) = s$, y circunferencia $\alpha_1(t) = e^{it}$ obtenemos los siguientes ejemplos:

(i)

$$(\alpha_0 * \omega_{\mathcal{E}})(t, s) = \left(\frac{|\omega_{\mathcal{E}}(s)|^2}{2} - i \arg \dot{\omega}_{\mathcal{E}}(s) - \frac{t^2}{2}, t \omega_{\mathcal{E}}(s) \right),$$

que se corresponden con los Ejemplos 2.2.6 de Joyce, Lee y Tsui descritos en (2.12).

(ii)

$$(\alpha_1 * \omega_{\mathcal{E}})(t, s) = \left(\frac{|\omega_{\mathcal{E}}(s)|^2}{2} - i \arg \dot{\omega}_{\mathcal{E}}(s) - it, e^{it} \omega_{\mathcal{E}}(s) \right)$$

para los que ∂_t es un campo de Killing.

(iii)

$$(\alpha_{\mathcal{G}} * \omega_0)(t, s) = \left(\frac{s^2}{2} - \frac{|\alpha_{\mathcal{G}}(t)|^2}{2} - i \arg \alpha'_{\mathcal{G}}(t), \alpha_{\mathcal{G}}(t)s \right)$$

cuyo ángulo lagrangiano es el ángulo que forma el vector tangente $\alpha'_{\mathcal{G}}(t)$ con una dirección fija.

Demostración. El resultado se obtiene directamente tomando $\varphi = 0$ en la Proposición 4.2.4 teniendo en cuenta (4.22). La observación del caso particular (ii) se sigue del hecho que la métrica viene dada por $(1 + |\omega_{\mathcal{S}}(t)|^2)(dt^2 + ds^2)$. Para el caso (iii), el ángulo lagrangiano de $\alpha_{\mathcal{S}} * \omega_0$, salvo constantes, es el argumento de $\alpha'_{\mathcal{S}}(t)$. \square

Para finalizar esta sección, consideramos en el Corolario 4.2.6 (ii) el ejemplos $\mathfrak{F} = \alpha_1 * \omega_0$, que ya presentamos en el Sección 4.1.

Corolario 4.2.7. Sea $\mathfrak{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ dada por

$$\mathfrak{F}(t, s) = \left(\frac{s^2}{2} - it, e^{it}s \right).$$

Entonces \mathfrak{F} es un solitón de traslación del flujo de la curvatura media (con vector de traslación $(1, 0) \in \mathbb{C}^2$) embebido completo que es lagrangiano estacionario hamiltoniano. Además, $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{M}$, donde

$$\mathcal{M} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = 2\operatorname{Re} z e^{-2i\operatorname{Im} z}, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

Demostración. Es obvio que \mathfrak{F} es un embebimiento. Según lo comentado en la Sección 4.1 y la Proposición 4.2.4 \mathfrak{F} es un solitón de traslación. Sólo resta probar que $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{M}$.

Es un ejercicio comprobar que $\mathfrak{F}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{M}$. Por otro lado, $(z, w) \in \mathcal{M}$, tomamos $t = -\operatorname{Im} z$ y $s = w e^{i\operatorname{Im} z}$ ya que $s^2 = 2\operatorname{Re} z \geq 0$ por la definición de \mathfrak{F} , s está bien definido y es fácil ver que $\mathfrak{F}(t, s) = (z, w)$. \square

4.3. CARACTERIZACIÓN DE LOS NUEVOS EJEMPLOS Y CLASIFICACIÓN DE LAS ESTACIONARIAS HAMILTONIANAS

En esta sección caracterizamos localmente los solitones de traslación lagrangianos introducidos en la Proposición 4.2.4 bajo una hipótesis analítica que nos permitirá separar variables en la integración de las ecuaciones que se deducen de (1.13).

Teorema 4.3.1. Sea $\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ un solitón de traslación lagrangiano para el flujo de la curvatura media con vector de traslación \mathbf{e} . Supongamos que existe una coordenada local isoterma $z = x + iy$ tal que la función compleja diferenciable (ϕ, \mathbf{e}) satisface $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\phi, \mathbf{e}) = 0$. Entonces ϕ es (salvo homotecias) localmente congruente a una de las siguientes inmersiones:

- (i) el producto de una “curva grim-reaper” (1.4) y una recta;
- (ii) el producto de dos “curvas grim-reaper” (véase (2.10) o (2.11));
- (iii) la inmersión \mathfrak{p} descrita en la Proposición 4.2.4 para algún $\varphi \in [0, \pi)$.

Demostración. Comenzamos considerando sin restricción el vector de traslación $\mathbf{e} = (1, 0) \in \mathbb{C}^2$ y denotamos por

$$F := \langle \phi, \mathbf{e} \rangle, \quad G := \langle \phi, J\mathbf{e} \rangle.$$

Entonces

$$\phi = (F + iG, \psi),$$

donde $\psi : M \rightarrow \mathbb{C}$ es la segunda componente de ϕ . Trabajamos en la carta local isoterma $z = x + iy$ de M , de forma que la métrica inducida, se escribe de la forma $\phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle = e^{2u}|dz|^2$, siendo $|dz|^2$ la métrica euclídea usual.

Dado que $\phi_*\partial_x \equiv \phi_x = (F_x + iG_x, \psi_x)$ y $\phi_*\partial_y \equiv \phi_y = (F_y + iG_y, \psi_y)$, el carácter conforme de ϕ en la coordenada isoterma $z = x + iy$ se traduce en

$$(4.26) \quad F_x^2 + G_x^2 + |\psi_x|^2 = e^{2u} = F_y^2 + G_y^2 + |\psi_y|^2, \quad F_x F_y + G_x G_y + \langle \psi_x, \psi_y \rangle = 0$$

y el carácter lagrangiano de ϕ implica que

$$(4.27) \quad G_x F_y - F_x G_y + \langle \psi_x, J\psi_y \rangle = 0.$$

Puesto que ψ_x y ψ_y son ambos vectores en \mathbb{C} , podemos escribir $\psi_x = \lambda \psi_y$ para alguna función compleja λ . Usando (4.26) tenemos que

$$(4.28) \quad |\lambda|^2 = \frac{|\psi_x|^2}{|\psi_y|^2} = \frac{e^{2u} - F_x^2 - G_x^2}{e^{2u} - F_y^2 - G_y^2}.$$

Por otro lado, ya que $\psi_x = \lambda \psi_y$, de (4.26) se sigue que

$$\psi_x \bar{\psi}_y = \lambda |\psi_y|^2 = \lambda (e^{2u} - F_y^2 - G_y^2),$$

y de (4.27)

$$\langle \psi_x, \psi_y \rangle + i \langle \psi_x, J\psi_y \rangle = -F_x F_y - G_x G_y + i (F_x G_y - G_x F_y).$$

De estas dos últimas ecuaciones, deducimos que

$$(4.29) \quad |\lambda|^2 = \frac{(F_x F_y + G_x G_y)^2 + (F_x G_y - G_x F_y)^2}{(e^{2u} - F_y^2 - G_y^2)^2}.$$

Igualando las dos expresiones obtenidas para $|\lambda|^2$, (4.28) y (4.29), obtenemos que

$$(4.30) \quad e^{2u} = F_x^2 + F_y^2 + G_x^2 + G_y^2$$

y por tanto, usando (4.26) junto con la ecuación (4.30) obtenida para la métrica, tenemos que

$$(4.31) \quad |\psi_x|^2 = F_y^2 + G_y^2, \quad |\psi_y|^2 = F_x^2 + G_x^2.$$

De la Proposición 2.2.5, junto con (1.13) y (2.2) también deducimos que F y G deben cumplir las ecuaciones en derivadas parciales

$$(4.32) \quad F_{xx} + F_{yy} = G_x^2 + G_y^2, \quad G_{xx} + G_{yy} = -F_x G_x - F_y G_y$$

y ψ verifica a su vez esta otra ecuación en derivadas parciales:

$$(4.33) \quad \psi_{xx} + \psi_{yy} = -G_x J\psi_x - G_y J\psi_y.$$

Desde ahora, por la hipótesis de separabilidad del enunciado del Teorema 4.3.1, podemos asumir que la coordenada isoterma en la que estamos trabajando verifica que $(\phi, (1, 0))_{xy} = 0$. Esto significa precisamente que

$$(4.34) \quad F_{xy} = 0 = G_{xy}.$$

Observamos que sumar una constante a F o G produce inmersiones congruentes. Hacemos uso de (4.34) del siguiente modo:

Por un lado, existen funciones reales diferenciables $\xi = \xi(x)$ y $\theta = \theta(y)$ tales que

$$G(x, y) = -(\xi(x) + \theta(y)).$$

Consideramos entonces las curvas planas $\alpha = \alpha(x)$, $x \in I_1 \subset \mathbb{R}$ y $\omega = \omega(y)$, $y \in I_2 \subset \mathbb{R}$, parametrizadas por el arco, cuyas funciones curvatura son precisamente $\kappa_\alpha(x) = \xi'(x)$ y $\kappa_\omega(y) = \dot{\theta}(y)$, respectivamente. Salvo rotaciones, podemos escribir

$$(4.35) \quad \alpha'(x) = e^{i\xi(x)}, \quad \dot{\omega}(y) = e^{i\theta(y)},$$

y salvo una constante, también podemos escribir

$$(4.36) \quad G(x, y) = -\arg \alpha'(x) - \arg \omega(y) = -\int_{x_0}^x \kappa_\alpha(t) dt - \int_{y_0}^y \kappa_\omega(t) dt,$$

con $x_0 \in I_1, y_0 \in I_2$.

Remarcamos que, acorde con la Proposición 2.2.5 (1), el ángulo lagrangiano β de ϕ viene dado por

$$\beta(x, y) = \xi(x) + \theta(y) + \beta_0, \quad \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, existen funciones reales diferenciables $A = A(x)$ y $B = B(y)$ tales que

$$(4.37) \quad F(x, y) = A(x) + B(y).$$

Sustituyendo (4.36) y (4.37) en (4.32) obtenemos que

$$A'' + \ddot{B} = \kappa_\alpha^2 + \kappa_\omega^2, \quad \kappa'_\alpha + \dot{\kappa}_\omega = -\kappa_\alpha A' - \kappa_\omega \dot{B}.$$

Por tanto, existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que A y B satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$(4.38) \quad A'' = \kappa_\alpha^2 - \lambda, \quad \kappa_\alpha A' = \mu - \kappa'_\alpha$$

$$(4.39) \quad \ddot{B} = \kappa_\omega^2 + \lambda, \quad \kappa_\omega \dot{B} = -\dot{\kappa}_\omega - \mu.$$

Notemos que el sistema (4.38) que obtenemos para A es el mismo que el que obtenemos para B (4.39), intercambiando los papeles de λ y μ por $-\lambda$ y $-\mu$, respectivamente. Estudiamos, por ejemplo sólo las ecuaciones para A . Si $\kappa_\alpha = 0$, entonces $\mu = 0$ y $A'' = -\lambda$; es decir, salvo constantes, $A(x) = -\lambda x^2/2 - b_1 x$, con $b_1 \in \mathbb{R}$. Si, por el contrario, $\kappa_\alpha \neq 0$, fuera de los ceros de κ_α , la segunda ecuación de (4.38) nos dice que $A' = (\mu - \kappa'_\alpha)/\kappa_\alpha$ e integrando llegamos a que

$$A(x) = \int \frac{\mu}{\kappa_\alpha(x)} dx - \log |\kappa_\alpha(x)|.$$

Si ahora sustituimos esta solución $A(x)$, en la primera ecuación del sistema (4.38) obtenemos que κ_α debe verificar la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$(4.40) \quad \kappa_\alpha \kappa''_\alpha - \kappa'^2_\alpha + \mu \kappa'_\alpha = \kappa_\alpha^2 (\lambda - \kappa_\alpha^2).$$

Por un razonamiento análogo tras la anterior observación, si $\kappa_\omega = 0$ entonces $\mu = 0$ y $B(y) = \lambda y^2/2 + b_2 y$, con $b_2 \in \mathbb{R}$, salvo suma de una constante y si $\kappa_\omega \neq 0$, fuera de los ceros de κ_ω , tenemos que

$$B(y) = - \int \frac{\mu}{\kappa_\omega(y)} dy - \log |\kappa_\omega(y)|,$$

donde κ_ω es una solución de la ecuación diferencial

$$(4.41) \quad \kappa_\omega \ddot{\kappa}_\omega - \dot{\kappa}_\omega^2 - \mu \dot{\kappa}_\omega = \kappa_\omega^2 (-\lambda - \kappa_\omega^2).$$

Por tanto estamos obligados a estudiar las ecuaciones (4.40) y (4.41). Lo hacemos en el siguiente lema que tiene interés por sí mismo en el ámbito de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Reconocemos (4.40) y (4.41) en el Lema 4.2.1 tomando $a = \mp \lambda$ y $b = \pm \mu$ respectivamente. Esto nos va a dar la pista clave para probar el siguiente resultado.

Lema 4.3.2. *Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, consideramos la ecuación diferencial ordinaria*

$$(4.42) \quad \kappa \ddot{\kappa} - \dot{\kappa}^2 + \kappa^2 (\lambda + \kappa^2) = \mu \dot{\kappa}.$$

- Si $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, entonces $\dot{\kappa}^2/\kappa^2 + \kappa^2 = \rho^2 \geq 0$ es una integral primera de (4.42) y $\kappa(y) = \rho / \cosh(\rho y)$, $y \in \mathbb{R}$, es la solución que satisface $\dot{\kappa}(0) = 0$.
- Si $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, sea κ_ω la curvatura de una curva ω plana, parametrizada por el arco, que verifica $\kappa_\omega = -\lambda \langle \dot{\omega}, J\omega \rangle - \mu \langle \dot{\omega}, \omega \rangle$. Entonces κ_ω es la solución general de (4.42). Además, κ_ω verifica:

$$(1) \quad \frac{(\dot{\kappa}_\omega + \mu)^2}{\kappa_\omega^2} + \kappa_\omega^2 = (\lambda^2 + \mu^2) |\omega|^2,$$

$$(2) \quad -\log |\kappa_\omega| - \int \mu/\kappa_\omega - i \int \kappa_\omega = (\lambda + i\mu) \int \dot{\omega} \bar{\omega}, \text{ fuera de los ceros de } \kappa_\omega.$$

Demostración del Lema 4.3.2. El caso $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ es un simple ejercicio. Cuando $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, se demostró en el Lema 4.2.1 que κ_ω verifica (4.42). Volvemos a usar la misma notación que usamos en la demostración del Lema 4.3.2, es decir, sea $f = \langle \dot{\omega}, \omega \rangle$ y $g = \langle \dot{\omega}, J\omega \rangle$; de esta forma, la curvatura de ω se expresa de la forma $\kappa_\omega = -\lambda g - \mu f$. Volviendo a usar que

$$(4.43) \quad \dot{f} = 1 - \kappa_\omega g, \quad \dot{g} = \kappa_\omega f, \quad f^2 + g^2 = |\omega|^2,$$

puede comprobarse directamente la parte (1) de lema.

Para probar la parte (2) derivamos en el primer miembro y volvemos a usar (4.43)

$$\begin{aligned} \left(-\log|\kappa_\omega| - \int \frac{\mu}{\kappa_\omega} dy - i \int \kappa_\omega dy \right)' &= -\frac{\dot{\kappa}_\omega}{\kappa_\omega} - \frac{\mu}{\kappa_\omega} - i\kappa_\omega = \frac{\lambda\dot{g} + \mu\dot{f} - \mu}{\kappa_\omega} + i(\lambda g + \mu f) \\ &= \lambda f - \mu g + i(\lambda g + \mu f) = (\lambda + i\mu)(f + ig) \\ &= (\lambda + i\mu)\dot{\omega}\bar{\omega}, \end{aligned}$$

lo que demuestra la parte (2).

Finalmente, dadas condiciones iniciales arbitrarias $\kappa_0 = \kappa(0)$ y $\kappa_1 = \dot{\kappa}(0)$ para (4.42), el sistema de ecuaciones $-\lambda g(0) - \mu f(0) = \kappa_0$, $\mu g(0) - \lambda f(0) = \mu + \kappa_1$ tiene una única solución gracias a que $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Esto muestra que κ_ω es la solución general de (4.42) y concluye la demostración del lema. \square

Procedemos ahora a integrar $\phi = (F + iG, \psi)$ usando la información obtenida de (4.37), (4.36), (4.30) y (4.31). Distinguiamos los siguientes casos según la posible nulidad de las curvaturas de α y ω :

Caso (1): $\kappa_\alpha \equiv 0 \equiv \kappa_\omega$. En particular $\mu = 0$ y G es constante. Por tanto β es también constante y, por consiguiente, ϕ minimal. Además tenemos que

$$F(x, y) = -\frac{\lambda}{2}x^2 - b_1x + \frac{\lambda}{2}y^2 + b_2y, \quad e^{2u(x,y)} = (\lambda x + b_1)^2 + (\lambda y + b_2)^2.$$

Caso (2): $\kappa_\alpha \equiv 0$ y $\kappa_\omega \neq 0$. En particular $\mu = 0$. Por tanto, F y G quedan de la siguiente manera:

$$F(x, y) = -\frac{\lambda}{2}x^2 - b_1x - \log|\kappa_\omega(y)|, \quad G(y) = -\int \kappa_\omega(y) dy,$$

y el factor conforme de la métrica inducida es

$$e^{2u(x,y)} = (\lambda x + b_1)^2 + \frac{\dot{\kappa}_\omega(y)^2}{\kappa_\omega(y)^2} + \kappa_\omega(y)^2,$$

donde κ_ω es una solución de (4.41) con $\mu = 0$.

Caso (3): $\kappa_\alpha \neq 0$ y $\kappa_\omega \equiv 0$. En particular $\mu = 0$. Análogamente al caso anterior, obtenemos que F y G quedan de la forma

$$F(x, y) = -\log|\kappa_\alpha(x)| + \frac{\lambda}{2}y^2 + b_2y, \quad G(x) = -\int \kappa_\alpha(x) dx,$$

y el factor conforme de la métrica inducida se escribe como

$$e^{2u(x,y)} = \frac{\kappa'_\alpha(x)^2}{\kappa_\alpha(x)^2} + \kappa_\alpha(x)^2 + (\lambda y + b_2)^2,$$

donde κ_α es una solución de (4.40) con $\mu = 0$.

Caso (4): $\kappa_\alpha \neq 0$ y $\kappa_\omega \neq 0$. En este caso, $\mu \neq 0$ y F y G quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} F(x,y) &= -\log|\kappa_\alpha(x)| + \int \frac{\mu}{\kappa_\alpha(x)} dx - \log|\kappa_\omega(y)| - \int \frac{\mu}{\kappa_\omega(y)} dy, \\ G(x,y) &= -\int \kappa_\alpha(x) dx - \int \kappa_\omega(y) dy, \end{aligned}$$

y el factor conforme de la métrica inducida se escribe como

$$e^{2u(x,y)} = \frac{(\kappa'_\alpha(x) - \mu)^2}{\kappa_\alpha(x)^2} + \kappa_\alpha(x)^2 + \frac{(\kappa'_\omega(y) + \mu)^2}{\kappa_\omega(y)^2} + \kappa_\omega(y)^2,$$

donde κ_α es una solución de (4.40) y κ_ω una solución de (4.41).

Para usar el Lema 4.3.2 analizamos las dos posibilidades dadas en el mismo. En primer lugar, consideramos $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Usando el Lema 4.3.2, sabemos que ω y α deben satisfacer $\kappa_\omega = -\lambda \langle \dot{\omega}, J\omega \rangle - \mu \langle \dot{\omega}, \omega \rangle$ y $\kappa_\alpha = \lambda \langle \alpha', J\alpha \rangle + \mu \langle \alpha', \alpha \rangle$ y, salvo constantes, tenemos además que

$$(4.44) \quad (F + iG)(x,y) = (\lambda + i\mu) \left(\int \dot{\omega}(y) \bar{\omega}(y) dy - \int \alpha'(x) \bar{\alpha}(x) dx \right)$$

y

$$(4.45) \quad e^{2u(x,y)} = (\lambda^2 + \mu^2) (|\alpha(x)|^2 + |\omega(y)|^2)$$

En los casos (1), (2), (3), necesariamente tenemos que $\lambda \neq 0$ ya que $\mu = 0$. Si hacemos el cambio de variables $(x \rightarrow x + b_1/\lambda, y \rightarrow y + b_2/\lambda)$ entonces las ecuaciones (4.44) y (4.45) también se verifican (salvo una traslación) considerando $\alpha(x) = x$ y $\omega(y) = y$, cuando $\kappa_\alpha = 0$ y $\kappa_\omega = 0$ respectivamente.

Además, teniendo en cuenta (4.26), (4.27), (4.30), (4.31) y (4.45) junto con el Lema 4.3.2, no es difícil comprobar que

$$(4.46) \quad |\psi_x|^2 = (\lambda^2 + \mu^2) |\omega|^2, \quad |\psi_y|^2 = (\lambda^2 + \mu^2) |\alpha|^2, \quad (\psi_x, \psi_y) = (\lambda^2 + \mu^2) \alpha' \bar{\alpha} \bar{\omega} \omega.$$

Analizando (4.33) tras considerar (4.36), usando (4.35) y (4.46), concluimos que existen dos funciones complejas $c_i = c_i(x, y)$, $i = 1, 2$ tales que

$$(4.47) \quad \psi_x = c_1 \alpha', \quad \psi_y = c_2 \dot{\omega}, \quad (c_1)_x \alpha' + (c_2)_y \dot{\omega} = 0, \quad \alpha c_1 = \omega c_2.$$

Ya que $|c_1|^2 = |\psi_x|^2$ y $|c_2|^2 = |\psi_y|^2$, de (4.46) y (4.47) podemos encontrar dos funciones reales $v_i = v_i(x, y)$, $i = 1, 2$, de forma que

$$c_1 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} |\omega| e^{iv_1}, \quad c_2 = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} |\alpha| e^{iv_2}.$$

Podemos reescribir ahora, las dos últimas ecuaciones de (4.47) del siguiente modo

$$(4.48) \quad |\omega| (v_1)_x \alpha' e^{iv_1} + |\alpha| (v_2)_y \dot{\omega} e^{iv_2} = 0, \quad |\omega| \alpha e^{iv_1} = |\alpha| \omega e^{iv_2},$$

que conducen a $(v_1)_x \omega \alpha' + (v_2)_y \dot{\omega} \alpha = 0$. Como α y α' (respectivamente, ω y $\dot{\omega}$) son necesariamente linealmente independientes en este caso, de (4.48) deducimos que $(v_1)_x = 0 = (v_2)_y$ y por tanto existe una constante v_0 tal que $|\omega| e^{iv_1} / \omega = |\alpha| e^{iv_2} / \alpha = e^{iv_0}$ gracias a la última ecuación de (4.48). Usando la primera dos ecuación de (4.47), llegamos a que

$$\psi_x = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} e^{iv_0} \alpha' \omega, \quad \psi_y = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} e^{iv_0} \alpha \dot{\omega}.$$

Por consiguiente, salvo rotaciones y traslaciones, tenemos que

$$(4.49) \quad \psi(x, y) = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \alpha(x) \omega(y).$$

Así pues, de (4.44) y (4.49) concluimos que

$$\phi(x, y) = \left((\lambda + i\mu) \left(\int \dot{\omega}(y) \overline{\omega(y)} dy - \int \alpha'(x) \overline{\alpha(x)} dx \right), \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} \alpha(x) \omega(y) \right),$$

donde α y ω satisfacen $\kappa_\omega = -\lambda \langle \dot{\omega}, J\omega \rangle - \mu \langle \dot{\omega}, \omega \rangle$ y $\kappa_\alpha = \lambda \langle \alpha', J\alpha \rangle + \mu \langle \alpha', \alpha \rangle$. Salvo homotecias, podemos tomar sin restricción $\lambda + i\mu = e^{i\varphi}$, con $\varphi \in [0, 2\pi)$. Luego la expresión de ϕ obtenida coincide con la expresión (4.22) de los ejemplos $\alpha * \omega$ introducidos en la Proposición 4.2.4. Intercambiando los papeles de α y ω es suficiente considerar $\varphi \in [0, \pi)$. Concluimos pues, que ϕ es uno de los ejemplos mencionados en la parte (iii) del Teorema 4.3.1.

Por último, estudiamos el caso $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Remarcamos que en los casos (1), (2) y (3) sólo tenemos que considerar $\lambda = 0$ ya que μ es necesariamente cero en esos casos.

En el caso (1), $\lambda = 0$ implica que u es constante y por tanto, la inmersión es llana además de minimal. Por tanto, es totalmente geodésica. Recordamos que $\alpha_0 * \omega_0$ recupera al plano lagrangiano totalmente geodésico.

En el caso (2), siguiendo el Lema 4.3.2, salvo constantes tenemos que

$$(4.50) \quad (F + iG)(x, y) = -b_1 x + \log \cosh(\rho y) - i\rho \int \frac{dy}{\cosh(\rho y)}.$$

Haciendo el cambio de coordenadas $(t, s) = -\rho(x, y)$ y tomando $-b_1/\rho = \sinh \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$, reescribimos (4.50) del siguiente modo:

$$(F + iG)(t, s) = -\sinh \delta t + \log \cosh s + i \int \frac{ds}{\cosh s} = -\sinh \delta t + \gamma(s),$$

donde $\gamma(s)$ es justo el grafo $(-\log v, v)$, $v \in (-\pi/2, \pi/2)$ parametrizado por el arco. Estudiando (4.33) de forma similar al caso anterior, usando ahora (4.26), (4.27) y (4.30) junto con las expresiones de F y G tenemos que

$$\psi(t, s) = t + \sinh \delta \gamma(s).$$

Entonces tenemos que $\phi(t, s) = A(\gamma(s), t)$, siendo A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\sinh \delta \\ \sinh \delta & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, llegamos al apartado (i) del Teorema 4.3.1.

El caso (3) es completamente análogo al caso (2) cambiando ω por α y b_1 por $-b_2$, con lo que llegamos a la misma conclusión.

En el caso (4), aplicando dos veces el Lema 4.3.2 y el mismo razonamiento del caso (2) deducimos que

$$(F + iG)(s_1, s_2) = \gamma(s_1) + \gamma(s_2), \quad \psi(s_1, s_2) = \gamma(s_1) - \gamma(s_2).$$

Por tanto, llegamos al apartado (ii) del Teorema 4.3.1. □

Corolario 4.3.3. Sea $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ un solitón de traslación lagrangiano estacionario hamiltoniano (no totalmente geodésico) del flujo de la curvatura media. Entonces ϕ es, salvo homotecias, localmente congruente a la inmersión \mathfrak{F} descrita en el Corolario 4.2.7.

Demostración. Realizamos la siguiente elección del vector de traslación y usamos la misma notación que al principio de la demostración del Teorema 4.3.1. Podemos asociar a cualquier Lagrangiana $\phi : M \rightarrow \mathbb{C}^2$ una forma diferencial Υ en M siguiendo [CU93], definida por

$$\Upsilon(z) = \bar{h}(z) dz, \quad h(z) = \omega(\partial_{\bar{z}} H),$$

donde $z = x + iy$ es una coordenada local isoterma en M y ω se extiende \mathbb{C} -linealmente a los fibrados tangente complejificados. Entonces (2.2) se traduce en $h = \beta_{\bar{z}}$, con β el ángulo lagrangiano de ϕ . La ecuación de Coddazi de ϕ viene dada por $\text{Im}(h_z) = 0$ (véase [CU93]).

Así $\bar{h}_{\bar{z}} = h_z = \beta_{z\bar{z}} = 0$, ya que β es una función armónica por ser ϕ estacionaria hamiltoniana. Por tanto, Υ es una diferencial holomorfa. Si $\Upsilon \equiv 0$, es fácil deducir que ϕ es totalmente geodésica. En otro caso, los ceros de h están aislados y podemos trabajar en una carta isoterma local donde normalizamos $h \equiv -1/2$.

Usando la Proposición 2.2.5 (1), tenemos que $\beta = -G + \beta_0$, y por tanto $h = \beta_{\bar{z}} = -G_{\bar{z}}$ y así $G_x = -1$ y $G_y = 0$, tras la anterior normalización. En particular, $G_{xy} = 0$. De la segunda ecuación de (4.32) se sigue que $F_x = 0$ y entonces $F_{xy} = 0$. Con lo que hemos probado que ϕ verifica la hipótesis del Teorema 4.3.1 y necesariamente debe ser uno de los ejemplos $\alpha * \omega$ asociado a cierto $\varphi \in [0, \pi)$. De la Proposición 4.2.4 sabemos que la métrica inducida es conforme y, usando la expresión de su ángulo lagrangiano, tenemos que $\alpha * \omega$ es estacionaria hamiltoniana si y sólo si $\kappa'_\alpha + \kappa_\omega = 0$. Usando (4.15) obtenemos que $\kappa_\alpha = c_1 \in \mathbb{R}$ y $\kappa_\omega = c_2 \in \mathbb{R}$, tales que

$$(4.51) \quad c_1^2 (c_1^2 - \cos \varphi) = 0 = c_2^2 (c_2^2 + \cos \varphi).$$

Si $c_1 = 0$, α debe ser una recta y esto implica que $\varphi = 0$ y siguiendo la notación del Corolario 4.2.6, $\alpha = \alpha_0$. Usando ahora (4.51) tenemos que $c_2 = 0$ y, con un razonamiento similar llegamos a que $\omega = \omega_0$. En este caso, ϕ es totalmente geodésica.

Si $c_1 \neq 0$, de (4.51) tenemos que $c_1^2 = \cos \varphi$, $0 \leq \varphi < \pi/2$, y $c_2 = 0$. Esto último implica que ω debe ser una recta, $\varphi = 0$ y $\omega = \omega_0$. Así $c_1 = 1$ y finalmente deducimos que $\alpha = \alpha_1$. Por consiguiente, se llega al ejemplo $\Phi = \alpha_1 * \omega_0$ y el Corolario 4.2.7 termina la demostración. \square

5

EL TORO DE CLIFFORD COMO SUPERFICIE AUTOCONTRÁCTIL

En el último capítulo de esta memoria nos centramos en el toro de Clifford (véase la Figura 5.1), que es el ejemplo topológicamente más sencillo de superficie autocontráctil compacta lagrangiana de \mathbb{C}^2 debido a la no existencia de esferas en esta clase (véase el Teorema 2.2.2). Aportamos tres nuevas caracterizaciones del mismo en este contexto que lo revelan como el ejemplo más regular de esta clase de superficies autocontráctiles de \mathbb{R}^4 . El contenido de este capítulo, que se corresponde con el artículo [CL12b] (publicado online a primeros de diciembre de 2012), puede resultar útil en el intento de resolver la cuestión abierta planteada por Neves en [Ne11] (véase el Problema 2.2.4), acerca de la existencia de alguna condición inicial compacta lagrangiana que converja al toro de Clifford tras reescalamiento. Ya que, para tener una oportunidad de resolver esta cuestión, es crucial comprender primero al toro de Clifford como superficie autocontráctil.

Aunque las demostraciones de nuestros resultados puedan parecer elementales, ciertamente son consecuencia de resultados mucho más fuertes que, aplicados adecuadamente en este contexto, conducen a los resultados de unicidad obtenidos.

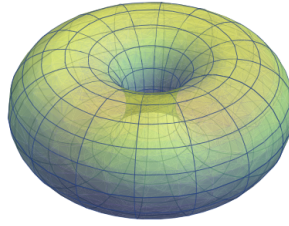


Figura 5.1: Proyección estereográfica del toro de Clifford.

5.1. EJEMPLOS COMPACTOS DE SUBVARIETADES AUTOCONTRÁCTILES

Recordamos (véase la Definición 1.3.1) que una inmersión $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ define una subvariedad autocontráctil si

$$(5.1) \quad H = -\phi^\perp,$$

donde $H = \text{traza } \sigma$ es la curvatura media de ϕ y ϕ^\perp denota la componente normal del vector de posición de ϕ .

Podemos encontrar muchos ejemplos de subvariedades autocontráctiles en la clase de las *subvariedades autocontráctiles esféricas*. Concretamente, estudiamos cuándo una inmersión esférica $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(R) \subset \mathbb{R}^m$, $R > 0$, es una subvariedad autocontráctil. Notamos por $\hat{\sigma}$ y \hat{H} la segunda forma fundamental y el vector curvatura media de $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(R)$.

Dados $v, w \in TM$ se tiene que

$$(5.2) \quad \sigma(v, w) = \hat{\sigma}(v, w) - \frac{\langle v, w \rangle}{R^2} \phi.$$

Por tanto, deducimos de (5.2) que

$$(5.3) \quad H = \hat{H} - \frac{n \phi}{R^2}.$$

Asumiendo que ϕ es esférica, de (1.6) resulta que $\phi^\top = 0$, esto es, $\phi = \phi^\perp$. Así pues, de (5.3) se sigue que $H = -\phi^\perp$ si y sólo si $\hat{H} = 0$ y $R = \sqrt{n}$. Es decir, M es una subvariedad minimal en la

hiperesfera de radio \sqrt{n} . En este caso, $H = -\phi$ y por tanto $|H|^2 = |\phi|^2 = n$. Además, de (5.2) se tiene que

$$(5.4) \quad |\sigma|^2 = 1 + |\hat{\sigma}|^2.$$

Siguiendo esta idea, las subvariedades autocontráctiles esféricas más sencillas serán las totalmente geodésicas ($\hat{\sigma} \equiv 0$), que conducen al ejemplo más conocido de subvariedad autocontráctil compacta: la esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con $|\sigma|^2 = 1$. Destacamos otros tres ejemplos en esta línea (considerando subvariedades minimales en hiperesferas de radio \sqrt{n}) todos ellos con norma de la segunda forma fundamental también constante.

Ejemplo 5.1.1. Para cualesquiera $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $n_1 + n_2 = n$, la que llamaremos inmersión de Clifford

$$\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}$$

es una subvariedad autocontráctil compacta de codimensión 2 con $|\sigma|^2 = 2$.

Ejemplo 5.1.2. El producto de n -circunferencias de radio uno

$$\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

es una subvariedad autocontráctil compacta llana con $|\sigma|^2 = n$ que es, además, lagrangiana en $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$.

Ejemplo 5.1.3. La inmersión

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}, \quad (e^{it}, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto \sqrt{n} e^{it} (x_1, \dots, x_n)$$

es una subvariedad autocontráctil compacta con $|\sigma|^2 \equiv \frac{3n-2}{n} \in [2, 3)$, que también es lagrangiana en $\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$.

Nota 5.1.4. Merece la pena destacar que las tres subvariedades autocontráctiles compactas reseñadas en los Ejemplos 5.1.1, 5.1.2 y 5.1.3 coinciden cuando $n = 2$, obteniendo sencillamente el conocido *toro de Clifford*

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C}^2$$

que es una superficie autocontráctil compacta llana de codimensión 2 en \mathbb{R}^4 , con norma de la segunda forma fundamental constante $|\sigma|^2 = 2$ y, además, es el ejemplo estándar de superficie lagrangiana monótona en \mathbb{C}^2 .

La observación comentada en la Nota 5.1.4 podría llevar a pensar que el toro de Clifford es un ejemplo muy peculiar de superficie autocontráctil compacta. Pondremos de manifiesto en la Sección 5.3 que, en cierto sentido, es así en tanto en cuanto posee interesantes caracterizaciones en el seno de la familia de superficies autocontráctiles compactas de \mathbb{R}^4 . Esta clase es enorme si se tiene en cuenta que cualquier superficie minimal en la 3-esfera pertenece a la citada familia. Pero incluso restringiéndonos a la topología de género 1, podemos encontrar hasta cuatro familias infinitas numerables de toros autocontráctiles de \mathbb{R}^4 , geoméricamente diferentes, que incluyen todas al toro de Clifford como el miembro más regular de las mismas. Estudiamos a continuación cada una de ellas describiendo sus propiedades geométricas más interesantes de cara a nuestros posteriores resultados de rigidez de la Sección 5.3.

Ejemplos 5.1.5. Toros de Abresh-Langer. Los toros de Abresch-Langer se definen simplemente como el producto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ de dos curvas cerradas de Abresch y Langer [AL86] (véase la Figura 1.3). Es decir, son el producto de dos curvas cerradas autocontráctiles.

El vector curvatura de dichas curvas satisface

$$(5.5) \quad \vec{\kappa}_{\Gamma_i} = -\Gamma_i^\perp \Leftrightarrow \kappa_{\Gamma_i} = \langle \Gamma_i', i\Gamma_i \rangle, \quad i = 1, 2$$

donde $'$ denota la derivada respecto al parámetro arco. La única cerrada simple en la familia de las curvas Abresh-Langer es la circunferencia unidad y el producto de dos circunferencias de radio 1 proporciona obviamente el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. La ecuación (5.5) admite una familia numerable de soluciones cerradas no circulares, la cual está parametrizada por primos relativos p_i y q_i tales que $p_i/q_i \in (1/2, 1/\sqrt{2})$, $i = 1, 2$. Además, se puede deducir de (5.5) que

$$\kappa_{\Gamma_i} = \rho_i e^{r_i^2/2}, \quad r_i := |\Gamma_i|, \quad r_i^2 (1 - r_i'^2) e^{-r_i^2} = \rho_i^2, \quad i = 1, 2$$

siendo $\rho_i > 0$ una constante positiva dependiendo de p_i y q_i , $i = 1, 2$.

Los toros de Abresch-Langer son toros lagrangianos llanos cuya segunda forma fundamental y vector curvatura media satisfacen

$$(5.6) \quad |\sigma|^2 = |H|^2 = \kappa_{\Gamma_1}^2 + \kappa_{\Gamma_2}^2 = \rho_1^2 e^{|\Gamma_1|^2} + \rho_2^2 e^{|\Gamma_2|^2} > 0.$$

El único toro de Abresch-Langer embebido es el toro de Clifford.

Ejemplos 5.1.6. Toros de Anciaux. Usando el caso $n = 2$ en el Teorema 1 de [An06], podemos definir los toros de Anciaux mediante las inmersiones dadas por

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \phi_{p,q} : I \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1, \quad p/q \in (1/4, 1/2) \\ \phi_{p,q}(t, s) &= \gamma_{p,q}(t)(\cos s, \sin s) \end{aligned}$$

donde $\gamma = \gamma_{p,q}(t)$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, es una curva cerrada (véase la Figura 5.2) tal que su curvatura satisface la ecuación

$$(5.8) \quad \kappa_\gamma = \frac{\langle \gamma', i\gamma \rangle}{|\gamma|^2} (|\gamma|^2 - 1)$$

donde $'$ denota la derivada respecto al parámetro arco. Es claro que $\gamma(t) = \sqrt{2} e^{it/\sqrt{2}}$ satisface (5.8) dando lugar al toro de Clifford en el seno de esta familia.

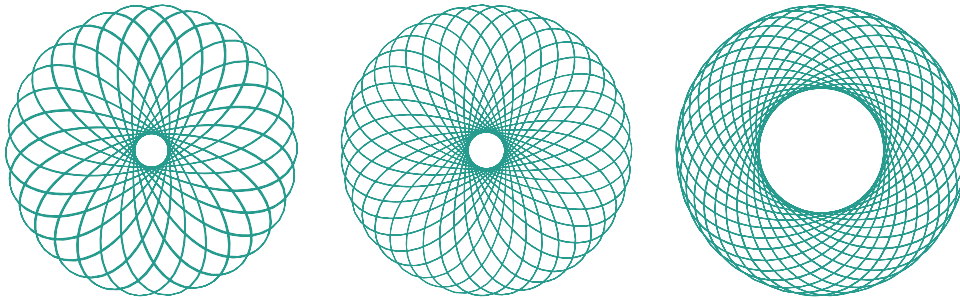


Figura 5.2: Curvas cerradas de Anciaux ($n = 2$).

Siguiendo [An06] deducimos de (5.8) que

$$(5.9) \quad \kappa_\gamma = \frac{E e^{r^2/2} (r^2 - 1)}{r^3}, \quad r = |\gamma|, \quad r^4 (1 - r'^2) e^{-r^2} = E^2$$

siendo $E > 0$ una constante positiva que depende de p y q .

La norma del vector curvatura media de un toro de Anciaux viene dada por

$$(5.10) \quad |H_{p,q}|^2 = \frac{E^2 e^{r^2}}{r^2}$$

y la norma de la segunda forma fundamental de un toro de Anciaux se expresa como

$$(5.11) \quad |\sigma_{p,q}|^2 = \frac{E^2 e^{r^2}}{r^6} (r^4 - 2r^2 + 4).$$

Todos los toros de Anciaux son lagrangianos en \mathbb{C}^2 , pero el único toro embebido en esta familia es el toro de Clifford aplicando el Teorema 3 de [An06]. Puesto que los toros de Anciaux son $SO(2)$ -invariantes, pueden considerarse como toros autocontráctiles de revolución.

Ejemplos 5.1.7. Toros de Lee-Wang. A partir de [CL10] y [LWa10], definiremos los toros de Lee-Wang, que notaremos por $\mathcal{T}_{m,n}$, mediante las inmersiones doblemente periódicas dadas por

$$(5.12) \quad \begin{aligned} \Psi_{m,n} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad m, n \in \mathbb{N}, \quad (m, n) = 1, \quad m \leq n, \\ \Psi_{m,n}(s, t) &= \sqrt{m+n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos s e^{i\sqrt{\frac{n}{m}}t}, \frac{1}{\sqrt{m}} \sin s e^{i\sqrt{\frac{m}{n}}t} \right). \end{aligned}$$

El toro de Clifford se corresponde con $\mathcal{T}_{1,1}$, ya que $\Psi_{1,1}(s, t) = \sqrt{2} e^{it} (\cos s, \sin s)$.

Los toros de Lee-Wang son toros lagrangianos estacionarios hamiltonianos y verifican que

$$(5.13) \quad \frac{m+n}{n} \leq |\Psi_{m,n}|^2 = \frac{m+n}{m n} (m \cos^2 s + n \sin^2 s) \leq \frac{m+n}{m}.$$

Tras un cálculo sencillo, puede comprobarse que la norma del vector curvatura media de un toro de Lee-Wang viene dada por

$$(5.14) \quad 1 < \frac{m+n}{n} \leq |H_{m,n}|^2 = \frac{m+n}{n \cos^2 s + m \sin^2 s} \leq \frac{m+n}{m}$$

y la norma de la segunda forma fundamental y la curvatura de Gauss de un toro de Lee-Wang verifican que

$$(5.15) \quad \frac{3m^2 + n^2}{n(m+n)} \leq |\sigma_{m,n}|^2 \leq \frac{m^2 + 3n^2}{m(m+n)}$$

y

$$(5.16) \quad -\frac{n(n-m)}{m(m+n)} \leq K_{m,n} \leq \frac{m(n-m)}{n(m+n)}.$$

El único toro de Lee-Wang embebido es el toro de Clifford, teniendo en cuenta la Proposición 3.2.7.

Ejemplos 5.1.8. Toros de Lawson. Definiremos los toros de Lawson (véase [La70]), que notaremos por \mathcal{T}_α , mediante las inmersiones doblemente periódicas dadas por

$$(5.17) \quad \begin{aligned} \Phi_\alpha : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2, \quad \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \geq 1, \\ \Phi_\alpha(x, y) &= \sqrt{2} (\cos x e^{i\alpha y}, \sin x e^{iy}). \end{aligned}$$

El toro de Clifford se corresponde con \mathcal{T}_1 , ya que $\Phi_1(x, y) = \sqrt{2} e^{iy} (\cos x, \sin x)$.

Los toros de Lawson son toros esféricos (y, por tanto, $|H_\alpha|^2 = |\Phi_\alpha|^2 = 2$, $\forall \alpha \geq 1$) cuya norma de la segunda forma fundamental viene dada por

$$(5.18) \quad 1 + \frac{1}{\alpha^2} \leq |\sigma_\alpha|^2 = 1 + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 \cos^2 x + \sin^2 x)^2} \leq 1 + \alpha^2.$$

La curvatura de Gauss de un toro de Lawson verifica que

$$(5.19) \quad 1 - \alpha^2 \leq K_\alpha \leq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

El único toro de Lawson embebido es el toro de Clifford, que es además la única superficie lagrangiana en esta familia.

5.2. RESULTADOS SOBRE CLASIFICACIÓN DE SUBVARIEDADES AUTOCONTRÁCTILES

Gracias al Teorema 1.2.3, sabemos que la comprensión de las singularidades de Tipo I para el flujo de la curvatura media está estrictamente relacionada con las clasificación de las subvariedades autocontráctiles. Pero una clasificación total de las mismas está aún muy lejos de conseguirse, por tratarse de un problema de considerable dificultad que permanece abierto en su versión más general.

Solamente en el caso de curvas ($n = 1$), se tiene la clasificación de las curvas autocontráctiles dada por Abresh y Langer en [AL86] (véase Sección 1.3.1).

Existen muchos trabajos interesantes sobre resultados de rigidez para subvariedades (hipersuperficies, principalmente) autocontráctiles bajo diferentes hipótesis de tipo geométrico. Algunos de ellos ya se han comentado en la Sección 1.3.1. En esta sección, prestamos nuestra atención a resultados de rigidez para subvariedades autocontráctiles *compactas (sin borde)* de *codimensión arbitraria*.

Pero comenzamos con el caso $m = n + 1$ (con $n \geq 2$), en el que Huisken probó en [Hu90] que la única hipersuperficie autocontráctil compacta “convexa en media” es la n -esfera (de radio \sqrt{n}):

Teorema 5.2.1 ([Hu90]). *Sea M^n una superficie autocontráctil compacta de dimensión $n \geq 2$ en \mathbb{R}^{n+1} . Si $H \geq 0$ entonces M^n es la n -esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ en \mathbb{R}^{n+1} .*

La situación se complica notablemente conforme la codimensión aumenta. Una extensión natural del Teorema 5.2.1 de Huisken es el siguiente resultado de Smoczyk que caracteriza las subvariedades autocontráctiles esféricas que estudiamos en la Sección 5.1.

Teorema 5.2.2 ([Sm05]). Sea $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una inmersión autocontráctil de una variedad compacta M . Entonces son equivalentes:

1. ϕ es esférica (esto es, ϕ es una inmersión minimal en la hiperesfera $\mathbb{S}^{m-1}(\sqrt{n})$ de \mathbb{R}^m).
2. $|H| > 0$ y el normal principal de ϕ , $\nu := H/|H|$, es paralelo en el fibrado normal de ϕ , esto es, $\nabla^\perp \nu = 0$.

Ya comprobamos en la Sección 5.1 que las subvariedades autocontráctiles esféricas satisfacen que $|H|^2 \equiv n$.

El ejemplo más simple de subvariedad autocontráctil esférica fue caracterizado en el siguiente resultado de salto sobre la norma de la segunda forma fundamental, debido a Cao y Li [CaLi11] (que Le y Sesum en [LeSe11] demostraron primero para el caso de hipersuperficies).

Teorema 5.2.3 ([LeSe11, CaLi11]). Sea M^n una subvariedad autocontráctil compacta en \mathbb{R}^m . Si $|\sigma|^2 \leq 1$, entonces $|\sigma|^2 = 1$ y M^n es la n -esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ en \mathbb{R}^{n+1} .

Observamos en los dos resultados anteriores (Teoremas 5.2.2 y 5.2.3) que, con el fin de caracterizar la esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ en el seno de las subvariedades autocontráctiles, se necesita alguna hipótesis adicional bien en la curvatura media o bien, en la norma de la segunda forma fundamental.

Muy recientemente, Li y Wei en [LiWe12] han obtenido el siguiente resultado de rigidez para otros ejemplos de subvariedades autocontráctiles bajo ambos tipos de hipótesis (sobre H y sobre $|\sigma|^2$), en codimensión 2 y para superficies.

Teorema 5.2.4 ([LiWe12]).

1. Sea M^n una subvariedad autocontráctil compacta en \mathbb{R}^{n+2} . Si $H \neq 0$ y $\nabla^\perp \nu = 0$, donde $\nu = H/|H|$ es el normal principal, y $1 \leq |\sigma|^2 \leq 2$ entonces:
 - a) $|\sigma|^2 \equiv 1$ y M es la n -esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ en \mathbb{R}^{n+1} , o
 - b) $|\sigma|^2 \equiv 2$ y M es la inmersión de Clifford de $\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2})$, $n_1 + n_2 = n$ en \mathbb{R}^{n+2} .
2. Sea M^2 una superficie autocontráctil compacta en \mathbb{R}^{2+p} , $p > 0$. Si $H \neq 0$ y $\nabla^\perp \nu = 0$, donde $\nu = H/|H|$ es el normal principal, y $1 \leq |\sigma|^2 \leq \frac{5}{3}$ entonces:
 - a) $|\sigma|^2 \equiv 1$ y M es la esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$ en \mathbb{R}^3 , o

b) $|\sigma|^2 \equiv \frac{5}{3}$ y M es la superficie de Veronese $\mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \rightarrow \mathbb{S}^4(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^5$.

3. Sea M^2 es una superficie autocontráctil compacta en \mathbb{R}^{2+p} , $p > 0$. Si $H \neq 0$ y $\nabla^\perp v = H/|H| = 0$, donde v es el normal principal, y $\frac{5}{3} \leq |\sigma|^2 \leq \frac{11}{6}$ entonces:

a) $|\sigma|^2 \equiv \frac{5}{3}$ y M es la superficie de Veronese $\mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \rightarrow \mathbb{S}^4(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^5$, o

b) $|\sigma|^2 \equiv \frac{11}{6}$ y M es la esfera de Boruvka $\mathbb{S}^2(\sqrt{12}) \rightarrow \mathbb{S}^4(\sqrt{6}) \hookrightarrow \mathbb{R}^7$.

También Cheng y Peng obtuvieron un resultado de rigidez en la línea de los apartados 2 y 3 del Teorema 5.2.4, pero considerando ahora como hipótesis sobre la norma de la segunda forma fundamental que sea constante.

Teorema 5.2.5 ([ChPe12]). Sea M^2 una superficie autocontráctil compacta en \mathbb{R}^{2+p} , $p > 0$. Si $|H| > 0$ y el vector normal principal $v = H/|H|$ es paralelo en el fibrado normal de M^2 y $|\sigma|^2$ es constante, entonces:

1. M es la esfera $\mathbb{S}^2(\sqrt{2})$ en \mathbb{R}^3 , con $|\sigma|^2 \equiv 1$, o

2. M es la esfera de Boruvka $\mathbb{S}^2(\sqrt{m(m+1)}) \rightarrow \mathbb{S}^{2m}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^{2m+1}$ con $|\sigma|^2 \equiv 2 - \frac{2}{m(m+1)}$, o

3. M es una superficie minimal, llana y compacta en $\mathbb{S}^{2m+1}(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{2m+2}$ con $|\sigma|^2 \equiv 2$.

5.3. NUEVAS CARACTERIZACIONES DEL TORO DE CLIFFORD

Nuestra primera contribución en la línea de los Teoremas 5.2.3 y 5.2.4 es un resultado de rigidez sobre subvariedades autocontráctiles compactas de dimensión y codimensión arbitrarias, que involucra una hipótesis sobre la norma de la curvatura media (más débil que la de los Teoremas 5.2.3 y 5.2.4) y una cota sobre la norma de la segunda forma fundamental en términos de la codimensión de la subvariedad.

La clave de su demostración consiste simplemente en trasladar resultados clásicos de Simon [Si68], Lawson [La69] y Chern-Do Carmo-Kobayashi [ChCK78] sobre rigidez intrínseca para subvariedades minimales en la esfera unidad y usar algunas observaciones ya referidas en [CaLi11].

Teorema 5.3.1. *Sea M^n una subvariedad autocontráctil compacta en \mathbb{R}^{n+p} . Si $|H|^2$ es constante o verifica que $|H|^2 \leq n$ o $|H|^2 \geq n$ y,*

$$(5.20) \quad |\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

entonces:

- (1) $|\sigma|^2 \equiv 1$ y M es la n -esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ en \mathbb{R}^{n+1} (i.e. $p = 1$),
- (2) o $|\sigma|^2 \equiv \frac{3p-4}{2p-3}$ y M es bien
 - (a) la inmersión de Clifford de $\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2})$, $n_1 + n_2 = n$, (con $|\sigma|^2 \equiv 2$) en \mathbb{R}^{n+2} (i.e. $p = 2$),
 - (b) o la inmersión Veronese de $\mathbb{S}^2(\sqrt{6})$ (con $|\sigma|^2 \equiv 5/3$) en \mathbb{R}^5 (i.e. $n = 2$, $p = 3$).

Demostración. En primer lugar, por tratarse M de una subvariedad autocontráctil tenemos que $0 = \int_M (n - |H|^2) d\mu$ sin más que integrar en (1.7) y aplicar el Teorema de la Divergencia. Es sencillo entonces concluir simultáneamente, bajo cualquiera de las tres posibles hipótesis sobre $|H|^2$, que necesariamente $|H|^2 \equiv n$. Poniendo esta información en (1.7) concluimos que $\Delta|\phi|^2 = 0$, esto es, $|\phi|^2$ es armónica, luego constante por la compacidad de M . Razonando como en la Sección 5.1, deducimos que $|\phi|^2 \equiv n$ y que ϕ es pues una subvariedad minimal de la esfera $\mathbb{S}^{n+p-1}(\sqrt{n})$.

Además, de (5.4) y (5.20), obtenemos que la segunda forma fundamental $\hat{\sigma}$ de ϕ como inmersión esférica satisface

$$(5.21) \quad |\hat{\sigma}|^2 \leq \frac{p-1}{2p-3}.$$

Ahora aprovecharemos los resultados bien conocidos de [Si68], [La69] y [ChCK78] sobre rigidez intrínseca para subvariedades minimales de la esfera unidad, que podemos recuperar de la siguiente manera:

Si M^n es una subvariedad minimal compacta de \mathbb{S}^{n+q} con segunda forma fundamental $\hat{\sigma}$ tal que $|\hat{\sigma}|^2 \leq n/(2-1/q)$, entonces o $|\hat{\sigma}|^2 \equiv 0$ y M^n es la n -esfera unidad \mathbb{S}^n , o $|\hat{\sigma}|^2 \equiv n/(2-1/q)$ y M^n es la inmersión de Clifford de $\mathbb{S}^k(\sqrt{\frac{k}{n}}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$ en \mathbb{S}^{n+1} , $1 \leq k \leq n-1$, o la inmersión Veronese de $\mathbb{S}^2(\sqrt{3})$ en \mathbb{S}^4 .

Salvo una dilatación en $\mathbb{R}^{n+q} \supset \mathbb{S}^{n+q}$ de radio \sqrt{n} , podemos reescribir el anterior resultado del siguiente modo:

Si M^n es una subvariedad minimal compacta de $\mathbb{S}^{n+q}(\sqrt{n})$ con segunda forma fundamental $\hat{\sigma}$ tal que $|\hat{\sigma}|^2 \leq q/(2q-1)$, entonces o $|\hat{\sigma}|^2 \equiv 0$ y M^n es la n -esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$, o $|\hat{\sigma}|^2 \equiv q/(2q-1)$ y M^n es la inmersión de Clifford de $\mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{n-k})$ en $\mathbb{S}^{n+1}(\sqrt{n})$, $1 \leq k \leq n-1$, o la inmersión de Veronese de $\mathbb{S}^2(\sqrt{6})$ en $\mathbb{S}^4(\sqrt{2})$.

Tomando $q = p-1$, gracias a (5.21), estamos en condiciones de aplicar el resultado anterior para terminar la demostración del Teorema 5.3.1. \square

Nota 5.3.2. Según (5.20), la hipótesis sobre la norma de la segunda forma fundamental en nuestro Teorema 5.3.1 es $|\sigma|^2 \leq 1$ si $p = 1$, $|\sigma|^2 \leq 2$ si $p = 2$ y $|\sigma|^2 \leq 5/3$ si $p = 3$. Puesto que nuestra hipótesis sobre la curvatura media es más débil que la exigida del paralelismo del normal principal en el fibrado normal, podemos decir que nuestro resultado generaliza los apartados 1. y 2. del Teorema 5.2.4 de Li y Wei [LiWe12].

Para nuestro propósito en esta sección, el verdadero interés del Teorema 5.3.1 es observar qué ocurre si la dimensión n y la codimensión p de la subvariedad autocontráctil M coinciden (lo que ocurre, por ejemplo, cuando M es lagrangiana). Notemos que en (1) $p = 1$ y estamos suponiendo $n \geq 2$, en (2.a) $p = 2$ y en (2.b) $n = 2$ y $p = 3$. Consecuentemente obtenemos la siguiente sorprendente caracterización del toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Corolario 5.3.3. Sea M^n una subvariedad autocontráctil compacta de codimensión $n \geq 2$ en \mathbb{R}^{2n} . Si $|H|^2$ es constante, o verifica que $|H|^2 \leq n$ o $|H|^2 \geq n$ y

$$(5.22) \quad |\sigma|^2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$$

entonces necesariamente $n = 2$, $|\sigma|^2 \equiv 2$ y M es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en \mathbb{R}^4 .

Nota 5.3.4. Como reafirmación de este resultado, es conveniente señalar que la norma de la segunda forma fundamental de los Ejemplos 5.1.5, 5.1.6 y 5.1.7 satisface la condición (5.22) sólo en el caso $n = 2$, pues es un ejercicio comprobar que $2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$, $n \leq \frac{3n-4}{2n-3}$ y $\frac{3n-2}{n} \leq \frac{3n-4}{2n-3}$ si, y sólo si, $n = 2$.

El Corolario 5.3.3 pone de manifiesto que pueden ser esperables algunos otros resultados de rigidez sobre el toro de Clifford. Resultados que además serían deseables pues recordemos que este regular ejemplo no está ni mucho menos aislado, pues de la Sección 5.1 conocemos infinitos ejemplos de toros autocontráctiles de \mathbb{R}^4 . Así pues, cualquier nuevo resultado de ca-

racterización del toro de Clifford en este contexto es bienvenido y puede resultar de gran utilidad para tratar de obtener algún progreso relacionado con el problema abierto planteado por Neves en [Ne11].

Nuestra contribución en esta línea va a centrarse en el contexto lagrangiano donde el toro de Clifford es el candidato natural en virtud del Teorema 5.3.1. En los tres siguientes resultados, sólo impondremos un tipo de hipótesis geométrica: bien sobre la curvatura media H o bien sobre la norma de la segunda forma fundamental $|\sigma|^2$.

Teorema 5.3.5. *Sea M^2 una superficie autocontráctil compacta lagrangiana en \mathbb{R}^4 . Si $|H|^2$ es constante o verifica que $|H|^2 \leq 2$ o $|H|^2 \geq 2$, entonces M es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Demostración. El mismo argumento de la primera parte de la demostración del Teorema 5.3.1 implica que ϕ es esférica. Sabemos de la Sección 5.1 que $|\phi|^2 = |H|^2 \equiv 2$ y el Teorema 5.2.2 (de Smoczyk) nos dice que $\nabla^\perp H = 0$. Pero al ser M lagrangiana, tenemos que JH es un campo tangente paralelo sin ceros en M , por lo que M ha de ser llana necesariamente. Usamos entonces el Teorema 3 de [Ur87] para deducir que M debe ser necesariamente un toro estándar, $\mathbb{S}^1(\sqrt{r_1}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{r_2})$, producto de dos circunferencias de radios arbitrarios. Usando finalmente que M es autocontráctil, M sólo puede ser el toro de Clifford, es decir, $r_1 = r_2 = 1$. \square

Como consecuencia del Teorema 5.3.5 obtenemos que *el toro de Clifford es la única superficie autocontráctil compacta esférica lagrangiana en \mathbb{R}^4 .*

Nota 5.3.6. El Teorema 5.3.5 podríamos decir que juega el papel del Teorema 5.2.1 de Huisken [Hu90] en el contexto lagrangiano 2-dimensional, sin olvidar que no existen esferas autocontráctiles lagrangianas en \mathbb{R}^4 (véase el Teorema 2.2.2). Cualquiera de las condiciones sobre $|H|^2$ podrían interpretarse como la versión de convexidad sobre H que caracteriza al toro de Clifford en este contexto. Es obvio que la hipótesis del carácter lagrangiano de la superficie autocontráctil en el Teorema 5.3.5 es necesaria, pues cualquier superficie compacta minimal de $\mathbb{S}^3(\sqrt{2})$ es autocontráctil y satisface que $|H|^2 = 2$ (véase Sección 5.1). Por otro lado, a la vista de los Ejemplos 5.1.5, 5.1.6 y 5.1.7, que son todos lagrangianos, no puede prescindirse de la hipótesis sobre $|H|^2$ que se considera en el enunciado del Teorema 5.3.5 para caracterizar al toro de Clifford en este contexto.

Considerando todos los resultados previos, parece interesante el estudio de las superficies autocontráctiles compactas con $|\sigma|^2 \leq 2$, en la búsqueda de un resultado análogo al Teore-

ma 5.2.3. Usando fuertemente que no existen esferas autocontráctiles lagrangianas (véase el Teorema 2.2.2) y haciendo una combinación apropiada del Teorema de Gauss-Bonnet con la fórmula (1.8), que expresa el funcional de Willmore como un múltiplo entero del área de una superficie autocontráctil compacta, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.3.7. *Sea M^2 una superficie autocontráctil compacta orientable lagrangiana de \mathbb{R}^4 . Si $|\sigma|^2 \leq 2$, entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$ y M es un toro. Si, además, la curvatura de Gauss K de M es no negativa o no positiva, entonces M es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Demostración. Usamos el Teorema de Gauss-Bonnet en la ecuación de Gauss de M

$$(5.23) \quad 2K = |H|^2 - |\sigma|^2$$

obteniendo

$$(5.24) \quad 8\pi(1 - \text{gen}(M)) = 2 \int_M K d\mu = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu,$$

la última igualdad gracias a (1.8).

El Teorema 2.2.2 implica que M no puede ser una esfera. Por tanto, de (5.24) se tiene que $0 \geq \int (2 - |\sigma|^2) d\mu$. Justo entonces la hipótesis $|\sigma|^2 \leq 2$ implica que $|\sigma|^2 \equiv 2$ y deducimos también de (5.24) que M es un toro.

Así, volviendo a (5.23) se tiene que $2K \equiv |H|^2 - 2$. Si $K \geq 0$ o $K \leq 0$, obtenemos que $|H|^2 \geq 2$ o $|H|^2 \leq 2$. Entonces el Teorema 5.3.5 nos dice que M es el toro de Clifford. \square

Para conseguir un resultado completamente semejante (en nuestro contexto lagrangiano 2-dimensional) al obtenido en el Teorema 5.2.3 que caracteriza la esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ como la única subvariedad autocontráctil compacta con $|\sigma|^2 \leq 1$, tendríamos que evitar la hipótesis adicional sobre la curvatura de Gauss de la superficie en nuestro Teorema 5.3.7, que es la que permite determinar al toro de Clifford. Aplicando fórmulas de tipo Simon sobre $\Delta|\sigma|^2$ no hemos sido capaces de suprimir la necesidad de tal hipótesis. Pero el estudio de los Ejemplos 5.1.5, 5.1.6, 5.1.7 y 5.1.8 tampoco nos permite concluir que la citada imposición sobre K sea absolutamente necesaria. Por todo ello, nos atrevemos a establecer la siguiente conjetura:

Conjetura 5.3.8. *Sea M^2 una superficie autocontráctil compacta orientable lagrangiana en \mathbb{R}^4 . Si $|\sigma|^2 \leq 2$, entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$ y M^2 es el toro de Clifford $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

En el Teorema 3.3.1 clasificamos todas las superficies autosemejantes lagrangianas estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo. La hipótesis de tipo varacional (ser estacionaria hamiltoniana) equivale a una ecuación diferencial sobre el campo tangente JH de la superficie; concretamente, que su divergencia sea idénticamente nula. Basándonos en esta clasificación, añadiendo una hipótesis de tipo topológico como es el ser embebida, obtenemos nuestro último resultado de rigidez para el toro de Clifford.

Teorema 5.3.9. *Sea M^2 una superficie compacta autocontráctil lagrangiana embebida en \mathbb{R}^4 . Si M es estacionaria hamiltoniana, entonces M es el toro de Clifford.*

Demostración. En el Corolario 3.3.2 demostramos que los toros de Lee-Wang $\mathcal{T}_{m,n}$ descritos en los Ejemplos 5.1.7 son las únicas superficies compactas orientables autocontráctiles lagrangianas estacionarias hamiltonianas en \mathbb{C}^2 . Puesto que el toro de Clifford es el único embebido en esta familia (véase la Proposición 3.2.7), concluimos la demostración del Teorema 5.3.9 haciendo uso del hecho (probado en [Nm09, Sh09]) que las botellas de Klein no admiten embebimientos lagrangianos en \mathbb{C}^2 . \square

Finalizamos este capítulo proponiendo una nueva conjetura que persigue suprimir la hipótesis relativa al vector curvatura media ($\operatorname{div} JH = 0$, esto es, estacionaria hamiltoniana) en el Teorema 5.3.9 para intentar caracterizar al toro de Clifford asumiendo solamente una hipótesis de tipo topológico, en la línea de la famosa Conjetura de Lawson, recientemente resuelta en sentido positivo por Brendel en [Br12].

Conjetura 5.3.10. *El toro de Clifford es la única superficie autocontráctil compacta lagrangiana embebida en \mathbb{R}^4 .*



REPRESENTACIÓN DE CURVAS DE LEGENDRE

A.1. CURVAS DE LEGENDRE EN LA 3-ESFERA Y CURVAS ESFÉRICAS

Sea $\mathbb{S}^3(R)$ la hipersfera de radio $R > 0$ en $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ dada por

$$\mathbb{S}^3(R) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = R^2\}.$$

Sea $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3(R)$ una curva regular en $\mathbb{S}^3(R)$. Diremos que γ es de Legendre si

$$\langle \dot{\gamma}, J\gamma \rangle = \langle \dot{\gamma}_1, i\gamma_1 \rangle + \langle \dot{\gamma}_2, i\gamma_2 \rangle = 0.$$

Definimos el ángulo de Legendre o ángulo legendriano de γ , que notaremos por β_γ , mediante la expresión

$$e^{i\beta_\gamma} := \frac{1}{R|\dot{\gamma}|} \det_{\mathbb{C}}(\gamma, \dot{\gamma}).$$

Por ejemplo, el ángulo de Legendre de la geodésica $\gamma(s) = R(\cos s, \sin s)$ es $0 \pmod{2\pi}$.

Lema A.1.1. Sea $\gamma : I_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^3(R) \subset \mathbb{C}^2$ una curva parametrizada por el arco.

a) Si γ es una curva de Legendre, entonces es solución de la ecuación diferencial

$$(A.1) \quad \ddot{\gamma} + \frac{\dot{\gamma}}{R^2} = \kappa_\gamma J\dot{\gamma},$$

donde κ_γ es la curvatura de γ en $\mathbb{S}^3(R)$.

b) El ángulo de Legendre β_γ satisface $\dot{\beta}_\gamma = \kappa_\gamma$.

Demostración. a) Consideramos la base ortonormal de $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ $\{\frac{\dot{\gamma}}{R}, \frac{J\dot{\gamma}}{R}, \dot{\gamma}, J\dot{\gamma}\}$. Por caer γ en $\mathbb{S}^3(R)$ y estar parametrizada por el arco se tiene que $\langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = -1$ y $\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$. Por ser de Legendre, $\langle \ddot{\gamma}, J\dot{\gamma} \rangle = 0$. Luego $\ddot{\gamma}$ en dicha base se expresa de la forma

$$\ddot{\gamma} = -\frac{1}{R^2} \gamma + \langle \ddot{\gamma}, J\dot{\gamma} \rangle J\dot{\gamma} = -\frac{1}{R^2} \gamma + \kappa_\gamma J\dot{\gamma}.$$

b) De la definición de ángulo legendriano de γ se tiene que $R e^{i\beta_\gamma} = \gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1 \gamma_2$. Entonces

$$\begin{aligned} i R e^{i\beta_\gamma} \dot{\beta}_\gamma &= (\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1 \gamma_2)' = \gamma_1 \left(i \kappa_\gamma \dot{\gamma}_2 - \frac{\dot{\gamma}_2}{R^2} \right) - \left(i \kappa_\gamma \dot{\gamma}_1 - \frac{\dot{\gamma}_1}{R^2} \right) \gamma_2 \\ &= i \kappa_\gamma (\gamma_1 \dot{\gamma}_2 - \dot{\gamma}_1 \gamma_2) = i R \kappa_\gamma e^{i\beta_\gamma}, \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad se ha utilizado (A.1).

□

Nota A.1.2. Si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ es una curva de Legendre en $\mathbb{S}^3(R)$, es fácil comprobar que $(e^{i\theta} \gamma_1, \gamma_2)$ y $(\gamma_1, e^{i\theta} \gamma_2)$ son también curvas de Legendre para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Vía la fibración de Hopf, las curvas de Legendre en $\mathbb{S}^3(R)$ son proyectadas en curvas esféricas. Sea $\mathbb{S}^2(R/2) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2/4\}$ la 2-esfera de radio $R/2$ en \mathbb{R}^3 . La fibración de Hopf $\pi : \mathbb{S}^3(R) \rightarrow \mathbb{S}^2(R/2)$ viene dada por

$$\pi(z, w) = \frac{1}{2R} (2z\bar{w}, |z|^2 - |w|^2), \quad (z, w) \in \mathbb{S}^3(R) \subset \mathbb{C}^2.$$

π está bien definida ($|2z\bar{w}|^2 + (|z|^2 - |w|^2)^2 = R^4$) y es una submersión Riemanniana. Para cada curva de Legendre $\gamma = \gamma(s)$ en $\mathbb{S}^3(R)$, la proyección $\xi = \pi \circ \gamma$ es una curva en $\mathbb{S}^2(R/2)$. Por otro lado, toda curva $\xi \subset \mathbb{S}^2(R/2)$ se levanta horizontalmente vía π a una única curva $\tilde{\xi}$ en $\mathbb{S}^3(R)$ salvo rotaciones. Esta curva $\tilde{\xi}$ es una curva de Legendre en $\mathbb{S}^3(R)$.

Puesto que la fibración de Hopf π es una submersión Riemanniana, toda curva de Legendre γ en $\mathbb{S}^3(R)$ se proyecta en una curva ξ en $\mathbb{S}^2(R/2)$ con la misma curvatura. De la propia definición de π es fácil ver que

$$|\gamma_1|^2 = R \left(\xi_3 + \frac{R}{2} \right), \quad \langle \dot{\gamma}_1, J\gamma_1 \rangle = (\xi \times \dot{\xi})_3,$$

donde el subíndice 3 denota la proyección en la tercera coordenada de \mathbb{R}^3 donde cae $\mathbb{S}^2(R/2)$.

Estudiamos una posible representación de una curva γ de Legendre en $\mathbb{S}^3(R)$. Usando las funciones latitud φ y longitud λ de la curva en $\mathbb{S}^2(R/2)$

$$(A.2) \quad \xi = \frac{R}{2} \left(\cos \varphi e^{i\lambda}, \sin \varphi \right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi,$$

la cual se proyecta en γ vía la aplicación de Hopf ($\pi \circ \gamma = \xi$).

Tomamos $\gamma = R (\cos \psi e^{i\nu}, \sin \psi e^{i\mu})$ en $\mathbb{S}^3(R)$, para que γ sea de Legendre se tiene que verificar

$$(A.3) \quad \dot{\nu} \cos^2 \psi + \dot{\mu} \sin^2 \psi = 0.$$

Si imponemos que $\pi \circ \gamma = \xi$, la condición ser de Legendre A.3 se traduce en la ecuación $2\dot{\mu} = -\dot{\lambda}(1 + \sin \varphi)$. Podemos escribir $\mu = -\frac{1}{2} \int \dot{\lambda}(1 + \sin \varphi) ds$, en función de las funciones φ y λ .

Por tanto, γ puede representarse en función de φ y λ del siguiente modo:

$$\gamma(s) = \frac{R}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{2} \int \dot{\lambda}(s)(1 + \sin \varphi(s)) ds} \left(\sqrt{1 + \sin \varphi(s)} e^{i\lambda(s)}, \sqrt{1 - \sin \varphi(s)} \right).$$

A.2. CURVAS DE LEGENDRE EN EL 3-ESPACIO ANTI DE SITTER Y CURVAS HIPERBÓLICAS

Sea $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ el espacio anti De Sitter en \mathbb{C}^2 dado por

$$\mathbb{H}_1^3(-\rho) = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 - |w|^2 = -\rho^2\}.$$

Consideramos $\mathbb{H}_1^3(-\rho) \subset (\mathbb{C}_1^2, \langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle)$.

Sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-\rho)$ una curva en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$. Diremos que α es de Legendre si

$$\langle \langle \alpha', J\alpha \rangle \rangle = \langle \alpha'_1, i\alpha_1 \rangle - \langle \alpha'_2, i\alpha_2 \rangle = 0.$$

Definimos el ángulo de Legendre o ángulo legendriano de α , β_α , a partir de la expresión

$$e^{i\beta_\alpha} := \frac{1}{\rho |\alpha'|} \det_{\mathbb{C}}(\alpha, \alpha').$$

Por ejemplo, el ángulo de Legendre de $\alpha(t) = (\sinh t, \cosh t)$ es $0 \pmod{2\pi}$.

Lema A.2.1. Sea $\alpha : I_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1^3(-\rho) \subset \mathbb{C}_1^2$ una curva parametrizada por el arco.

a) Si α es una curva de Legendre, entonces es solución de la ecuación diferencial

$$(A.4) \quad \alpha'' - \frac{\alpha}{\rho^2} = \kappa_\alpha J\alpha',$$

donde κ_α es la curvatura de α en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$.

b) El ángulo de Legendre β_α satisface $\beta'_\alpha = \kappa_\alpha$.

Demostración. a) Consideramos la base ortonormal de $\mathbb{C}_1^2 \cong \mathbb{R}^4 \{ \alpha', J\alpha', \frac{\alpha}{|\alpha|}, \frac{J\alpha}{|\alpha|} \}$. Por caer α en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ y estar parametrizada por el arco se tiene que $\langle \alpha'', \alpha \rangle = -1$ y $\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0$. Por ser de Legendre, $\langle \alpha'', J\alpha \rangle = 0$. Luego α'' en dicha base se expresa de la forma

$$\alpha'' = \frac{\alpha}{\rho^2} + \langle \alpha'', J\alpha' \rangle J\alpha' = \frac{\alpha}{\rho^2} + \kappa_\alpha J\alpha'.$$

b) La demostración de este apartado es análoga a la del apartado b) del Lema A.1.1.

□

Nota A.2.2. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es una curva de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$, es fácil comprobar que $(e^{i\theta} \alpha_1, \alpha_2)$ y $(\alpha_1, e^{i\theta} \alpha_2)$ son también curvas de Legendre para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Vía la correspondiente fibrición de Hopf, las curvas de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ son proyectadas en curvas del plano hiperbólico. Sea $\mathbb{H}^2(-\rho/2) := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -\rho^2/4, x_3 \geq \rho/2\}$ el modelo real del plano hiperbólico de curvatura $-4/\rho^2$. La fibrición de Hopf $\pi : \mathbb{H}_1^3(-\rho) \rightarrow \mathbb{H}^2(-\rho/2)$ viene dada por

$$\pi(z, w) = \frac{1}{2\rho} (2z\bar{w}, |z|^2 + |w|^2), \quad (z, w) \in \mathbb{H}_1^3(-\rho) \subset \mathbb{C}^2.$$

π está bien definida ($|2z\bar{w}|^2 - (|z|^2 + |w|^2)^2 = -\rho^4$) y es una submersión Riemanniana. Para cada curva de Legendre $\alpha = \alpha(t)$ en $\mathbb{H}_1^3(\rho)$, la proyección $\eta = \pi \circ \alpha$ es una curva en $\mathbb{H}^2(-\rho/2)$. Por

otro lado, toda curva η en $\mathbb{H}^2(-\rho/2)$ se levanta horizontalmente vía π a una única curva $\tilde{\eta}$ en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ salvo rotaciones. Esta curva $\tilde{\eta}$ es una curva de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$.

Ya que fibración de Hopf π es una submersión Riemanniana, toda curva de Legendre α en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$ se proyecta en una curva η en $\mathbb{H}^2(-\rho/2)$ con la misma curvatura. De la propia definición de π es fácil ver que

$$|\alpha_1|^2 = \rho \left(\eta_3 - \frac{\rho}{2} \right), \quad \langle \alpha'_1, J\alpha_1 \rangle = (\eta \times \eta')_3$$

donde el subíndice 3 denota la proyección de la tercera coordenada de \mathbb{R}^3 donde cae $\mathbb{H}^2(-\rho/2)$.

Estudiamos una posible representación de una curva α de Legendre en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$. En función de las funciones θ y δ provenientes de la curva en $\mathbb{H}^2(-\rho/2)$

$$(A.5) \quad \eta = \frac{\rho}{2} \left(\cosh \theta e^{i\delta}, \sinh \theta \right), \quad \theta \geq 0, \quad -\pi \leq \delta \leq \pi,$$

la cual se proyecta en α vía la aplicación de Hopf ($\pi \circ \alpha = \eta$).

Tomamos $\alpha = \rho (\sinh r e^{i\nu}, \cosh r e^{i\mu})$ en $\mathbb{H}_1^3(-\rho)$, para que α sea de Legendre se tiene que verificar

$$(A.6) \quad \nu' \sinh^2 r - \mu' \cosh^2 r = 0.$$

Si imponemos que $\pi \circ \gamma = \xi$, la condición ser de Legendre A.6 se traduce en la ecuación $2\dot{\mu} = \delta'(\cosh \theta - 1)$. Podemos escribir $\mu = \frac{1}{2} \int \delta'(\cosh \theta - 1) dt$, en función de las funciones θ y δ .

Por tanto, α puede representarse en función de θ y δ del siguiente modo:

$$\alpha(t) = \frac{\rho}{\sqrt{2}} e^{\frac{i}{2} \int \delta'(t)(\cosh \theta(t)-1) dt} \left(\sqrt{\cosh \theta(t) - 1} e^{i\delta(t)}, \sqrt{\cosh \theta(t) + 1} \right).$$

ABSTRACT AND CONCLUSIONS

The mean curvature flow is possibly the most important geometric evolution equation of submanifolds in the Geometric Analysis. A family of smooth submanifolds $F = F(\cdot, t)$ evolves under the mean curvature flow if the speed $\frac{dF}{dt}$ at each point of the submanifold is given by the mean curvature vector at that point. Hence the mean curvature flow is an evolution process under which a submanifold deforms in the direction of its mean curvature vector. By the first variation formula, the mean curvature vector points towards the direction where the volume decreases most quickly.

Mullins [Mu56] proposed mean curvature flow to model the formation of grain boundaries in annealing metals. The applications in picture treatment, Symplectic Topology and Mirror Symmetry are quite important as well.

Classically, the mean curvature flow has been studied from several points of view, such as Partial Differential Equations, Geometric Measure Theory, Level Sets or Numerical Methods.

There are very interesting results on regularity, global existence and convergence of the mean curvature flow in several ambient spaces. In this thesis we are interested in the Euclidean ambient space. In this situation, the mean curvature flow is the solution to a system of parabolic equations that can be considered as the heat equation for submanifolds. We first fix an immersion, which plays the role of the initial condition, and once the existence and uniqueness of solutions of the mean curvature flow are guaranteed in a maximal time interval $[0, T)$, the asymptotic behaviour of the mean curvature flow is studied by the immersed submanifolds when $t \rightarrow T$. Unless the flow has an eternal solution (i.e., it is defined for all t), the mean curvature flow fails to exist after a finite time, giving rise to a singularity. This behaviour appears, for instance, when the submanifold is compact in the Euclidean ambient space. The singularities

are completely determined by the blow up of the second fundamental form σ (see the Section 1.1).

A natural question is to understand the geometric and analytic nature of these singularities. As a first approximation, the singularities of the mean curvature flow are classified depending on the blow-up rate of the second fundamental form. The so-called Type I singularities (see Definition 1.2.1) are those such that the second fundamental form blow-up rate is best controlled; the rest of the singularities are known as Type II singularities. It is interesting to mention that there are many similarities between the Ricci flow singularities and the mean curvature flow singularities. In fact, both flows, the singularities often model on soliton solutions.

The main objective of this thesis is to study a special class of solutions that preserve the shape of the evolving submanifolds: the *self-similar solutions*. They are those whose evolution is by homotheties of the ambient space, and their study is essential to understand the Type I singularities, as we will see later. Moreover, the so-called *translating solitons*, which are submanifolds evolving by translations of the ambient space with constant speed, are the mean curvature flow eternal solutions and the most important Type II singularities.

Eliminating the time variable, the self-similar solutions reduce the mean curvature flow parabolic equation to a non-linear elliptic equation on the initial submanifold. More precisely, it is given by

$$(\star) \quad H = a\phi^\perp, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

where H denotes the mean curvature vector (defined as the trace of the second fundamental form) and ϕ^\perp denotes the normal component of the initial immersion $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. In this case, the family of immersions homotetic to ϕ is given by

$$F_t = \sqrt{2at + 1} \phi, \quad 2at + 1 > 0,$$

and it is a solution of the mean curvature flow with initial condition $F_0 = \phi$. If $a = 0$, the submanifold is minimal and stationary under the action of the flow. If $a \neq 0$, then we can restrict to the cases $a = \pm 1$ up to dilations. When $H = -\phi^\perp$, it is said that M is a *self-shrinker submanifold* and the submanifold shrinks in finite time to a single point under the action of the mean curvature flow. If, on the contrary, $H = \phi^\perp$, it is said that M is a *self-expander submanifold* and the submanifold will expand with the same shape and, in this case, it is necessarily non-compact.

The flow for hypersurfaces in arbitrary Riemannian manifolds is well understood. Nevertheless, little is known when the codimension is greater than one. In higher codimension the mean curvature H is a vector whose direction we are not able to control, in contrast to the codimension one case, where H is essentially a scalar function whose sign is preserved along the flow. In

the last few years, the mean curvature flow in higher codimension submanifolds has attracted special attention, mainly when the initial submanifold is Lagrangian in complex Euclidean space \mathbb{C}^n ; see [An06], [ChChH09], [ChLi04], [GSSmZ07], [HLi09], [JLT10], [LWa09], [LWa10], [Ne07], [Ne10], [Ne11], [Ne13], [NeT07], [SWo03], [Sm96], [Sm99], [Sm02], [Sm04], [Sm12], [SmWa02], [SmWa11], [TY02], [Wa01], [Wa08]. for example. A reason for this increasing interest is that the Lagrangian condition is preserved by mean curvature flow (see [Sm96]). In addition, as the gradient flow of the volume functional, the mean curvature flow seems to be a powerful approach to the construction of special Lagrangians, which are volume minimizers that play a critical role in the T-duality formulation of Mirror Symmetry [SYZ96].

Some interesting problems rather far from trivial in this setting are, on the one hand, to understand the possible singularities that can occur along the flow in finite time and, on the other hand, to determine if it is possible to show that the singularities for Lagrangian mean curvature flow are isolated. A. Neves constructed in [Ne07] examples of Lagrangians in \mathbb{C}^2 whose Lagrangian angle is as small as desired, and for which the Lagrangian mean curvature flow develops a finite-time singularity. But he also proved in [Ne07] that assuming certain properties on the initial Lagrangian surface, like almost calibrated (i.e. the oscillation of the Lagrangian angle to be strictly smaller than π), if one rescales the flow around a fixed point in space-time, the connected components of this rescaled flow converge to an area-minimizing union of planes.

The study of this type of solutions is hoped to give a better understanding of the flow at a singularity since, by Huisken's monotonicity formula [Hu90], any central blow-up of a finite-time singularity of the mean curvature flow is a self-similar solution.

Examples of self-similar solutions for mean curvature flow in \mathbb{C}^n were first constructed by Anciaux [An06] in 2006. In order to produce eternal solutions of the Brakke flow (a weak formulation of the mean curvature flow), Lee and Wang [LWa09], [LWa10] constructed in 2007 interesting examples of Hamiltonian stationary self-shrinkers and self-expanders for Lagrangian mean curvature flows, which are asymptotic to Hamiltonian stationary cones generalizing Schoen-Wolfson ones [SWo01]. All of them have been generalized very recently by Joyce, Lee and Tsui in [JLT10] providing examples with different topologies.

As mentioned before, and due to results of Huisken [Hu90], it is expectable that the understanding of the singularities of the mean curvature flow will rely on the classification of self-similar solutions. But it is a hard and open problem to classify the vast family of self-similar solutions for the mean curvature flow.

The first important contribution we highlight in this thesis [CL10] is *the classification of those ones in complex Euclidean plane that are, in addition, Hamiltonian stationary Lagrangians* (see

Theorem 3.3.1). The classification result is purely local and, a part from the cylinder $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ and the Clifford torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (which are the standard examples), the following three one parameter families, which are described in terms of elementary functions, are characterized:

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \phi_\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \delta > 0 \\ &\phi_\delta(s, t) = \left(i s_\delta \cosh t e^{-\frac{is}{c_\delta}}, t_\delta \sinh t e^{i c_\delta s} \right), \end{aligned}$$

with $s_\delta = \sinh \delta$, $c_\delta = \cosh \delta$ and $t_\delta = \tanh \delta$. If $\cosh^2 \delta \notin \mathbb{Q}$, then ϕ_δ is an embedded self-expander plane, whereas we can recover the 2-dimensional examples of Lee-Wang ([LWa09]) for $\cosh^2 \delta = p/q \in \mathbb{Q}$; they are either self-expander cylinders or self-expander Moebius strips.

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \Upsilon_\varrho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0 < \varrho < \pi/2 \\ &\Upsilon_\varrho(s, t) = \left(-i s_\varrho \cosh t e^{\frac{is}{c_\varrho}}, t_\varrho \sinh t e^{-i c_\varrho s} \right), \end{aligned}$$

where $s_\varrho = \sin \varrho$, $c_\varrho = \cos \varrho$ and $t_\varrho = \tan \varrho$. If $\cos^2 \varrho \notin \mathbb{Q}$, then Υ_ϱ is an embedded self-shrinker plane. If $\cos^2 \varrho = p/q \in \mathbb{Q}$, we then recover the 2-dimensional surfaces studied by Lee and Wang ([LWa09]), whose possible topologies are cylinders and Moebius strips.

$$\begin{aligned} &\blacktriangleright \Psi_\nu : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^2, \nu > 0 \\ &\Psi_\nu(e^{is}, t) = \left(c_\nu \cos s e^{\frac{it}{c_\nu}}, t_\nu \sin s e^{i s_\nu t} \right), \end{aligned}$$

where $s_\nu = \sinh \nu$, $c_\nu = \cosh \nu$ and $t_\nu = \coth \nu$. If $\sinh^2 \nu \notin \mathbb{Q}$, then Ψ_ν is an embedded self-shrinker cylinder. If $\sinh^2 \nu = m/n$, we obtain the self-shrinker tori of Lee and Wang [LWa10], which cover Klein bottles provided that $m+n$ is odd. The Clifford torus is the only embedded example in this family and it corresponds to the case $m=n=1$.

The classification we have obtained is based on techniques of Complex Analysis, as well as the fact that the Hamiltonian stationary Lagrangian condition is equivalent to the existence of a certain holomorphic differential. The normalization of this differential allows us to integrate explicitly the Frenet equations of immersion, which is possible because we have previously obtained the norm function of the position vector, in terms of elemental functions, by solving the differential equation it satisfies.

It is worth to mention that these three families can be included in a more general construction of Lagrangian surfaces by means of spherical and hyperbolic curves (a slightly more general procedure than the method appearing in [CCh06]). Our examples are obtained by the

aforementioned construction when only geodesics and constant curvature curves are considered.

Returning to the study of singularities which appear in the Lagrangian mean curvature flow, we highlight that, under certain conditions on the initial submanifold (e.g., when it is almost calibrated, see [Wa01] and Chen and Li [ChLi04]). Therefore it is of great interest to understand dilations of the flow where the point at which we center the dilation changes with the scale, called Type II dilations, which converge to an eternal solution with second fundamental form uniformly bounded. One of the most important examples of Type II singularities is a class of eternal solutions known as translating solitons, as mentioned before. All of them have the Lagrangian angle globally defined and, eliminating the time variable, these solitons reduce the mean curvature flow parabolic equation to the following equation:

$$(\star\star) \quad H = \mathbf{e}^\perp,$$

where \mathbf{e} is a fixed nonzero vector which indicates the direction of the translation. Such a translation has constant speed and the corresponding solutions are given by

$$F_t = \phi + t\mathbf{e}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

The simplest examples of translating solitons are obtained by the cartesian product of straight lines and the only convex solution of $(\star\star)$ restricted to curves: the so-called *grim-reaper*. It is defined as the graph $x = -\log \cos y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

The first results in this direction are due to Neves and Tian ([NeT07]), who gave conditions that exclude the existence of nontrivial translating solutions to Lagrangian mean curvature flow. More precisely, they proved that translating solutions with an L^2 bound on the mean curvature vector are planes and almost calibrated translating solutions which are static are also planes. Nevertheless, Joyce, Lee and Tsui found out in [JLT10] new surprising translating solitons for Lagrangian mean curvature flow with oscillation of the Lagrangian angle arbitrarily small. They play the same role as cigar solitons in Ricci flow and are important in studying the regularity of Lagrangian mean curvature flow. Moreover, together with the grim-reaper, these examples show that the geometric conditions on the above results in [NeT07] are optimal.

Our contribution to this problem [CL12a] in this thesis is double. On the one hand, we generalize Joyce, Lee and Tsui [JLT10] 2-dimensional examples to a considerable extent. It is remarked in [NeT07] that they are associated to planar curves ω in \mathbb{C} such that $\omega_t := \sqrt{2t}\omega$, for $t > 0$, is a solution to curve shortening flow in \mathbb{C} . However, our general construction is based on two families of planar curves α and ω depending on an angular parameter $\varphi \in [0, \pi)$ that are special

solutions to curve shortening flow, in the sense that their flows are a kind of composition of dilations and rotations with suitable velocities depending on φ . For instance, in the case $\varphi = \pi/2$ we must consider α and ω spirals (i.e., travelling waves in the polar angle, see [ChZ01]) with opposite velocities; and in the case $\varphi = 0$, we require this time self-similar solutions for the curve shortening flow of opposite characters, that is, α must be a self-shrinking curve while ω must be a self-expanding one. Just when in this particular case $\varphi = 0$ we consider α as a straight line passing through the origin, we arrive at the above Joyce, Lee and Tsui examples [JLT10].

We characterize (see Theorem 4.3.1) locally *all our examples in terms of an analytical condition on the Hermitian product of the position vector of the immersion and the translating vector that allows us separation of variables*. As a consequence, we get *the classification of the Hamiltonian stationary Lagrangian translating solitons for Lagrangian mean curvature flow in complex Euclidean plane*. In contrast to the self-similar case, only one example appears: a embedded complete nontrivial plane given by

$$\mathcal{M} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = 2 \operatorname{Re} z e^{-2i \operatorname{Im} z}, \operatorname{Re} z \geq 0\}.$$

It corresponds in our construction to the simplest nontrivial possible choice of α (the circle $\alpha(t) = e^{it}$) and ω (the line $\omega(s) = s$) in the particular case $\varphi = 0$.

We consider now the problem of studying self-similar solutions from a global point of view. An elegant result due to Smoczyk (see Theorem 2.2.2) allows us to conclude that Lagrangian self-shrinker spheres do not exist. When we think about more complicated topologies, the first observation to take into account is the fact that the class of self-shrinker tori in \mathbb{R}^4 is enormous. Since they include infinite families of Lagrangian tori in \mathbb{C}^2 , such as the product of self-shrinker Abresh-Langer curves (see Examples 5.1.5), Anciaux tori (see Examples 5.1.6) or the Lee-Wang tori (see Examples 5.1.7), as well as minimal tori in the 3-sphere (e.g., the Lawson tori, see Examples 5.1.8).

It is quite remarkable that the above families coincide when $n = 2$, giving rise to the Clifford torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ in \mathbb{R}^4 . Thus, rigidity theorems in the family of compact (Lagrangian) self-shrinkers in \mathbb{R}^4 are welcome and the Clifford torus is the natural candidate for this purpose. This sort of results may be useful to try to get some progress related with the open Question 7.4 of [Ne11]. Our contribution [CL12b] to this problem consists of three different new characterizations of the Clifford torus in the class of compact Lagrangian self-shrinker surfaces in \mathbb{C}^2 . Another motivation to find new theorems about this regular example is the following surprising result in the direction of the recent results in [LiWe12] and [ChPe12]:

Let M^n be a compact self-shrinker submanifold with codimension $n \geq 2$ in \mathbb{R}^{2n} . If $|H|^2$ is constant or $|H|^2 \leq n$ or $|H|^2 \geq n$ and $|\sigma|^2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$, then $n = 2$, $|\sigma|^2 \equiv 2$ and M is the Clifford torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ in \mathbb{R}^4 .

Then, if we pay attention to the 2-dimensional case in the Lagrangian setting, we can characterize the Clifford torus with only one geometrical hypothesis, either on the mean curvature vector H or on squared norm of the second fundamental form.

The first result (see Theorem 5.3.5) can be considered as the 2-dimensional Lagrangian version for the Clifford torus of the classical result of Huisken [Hu90] that the sphere is the only compact self-shrinker with $H \geq 0$.

The Clifford torus is the only compact Lagrangian self-shrinker in \mathbb{C}^2 such that $|H|^2$ is constant or $|H|^2 \leq 2$ or $|H|^2 \geq 2$.

Any condition about $|H|^2$ would play the role of the convexity hypothesis about the mean curvature in the previous cited result of Huisken.

Trying to prove a gap result similar to that obtained by Le and Sesum [LeSe11] and Cao and Li [CaLi11] that the sphere $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ is the only compact self-shrinker submanifold in \mathbb{R}^m with $|\sigma|^2 \leq 1$, we obtain the following result (see Theorem 5.3.7):

Let M^2 be a compact orientable Lagrangian self-shrinker in \mathbb{C}^2 with $|\sigma|^2 \leq 2$, then $|\sigma|^2 \equiv 2$ and M^2 is a torus. If, in addition, the Gauss curvature K of M^2 is non-negative or non-positive, then M^2 is the Clifford torus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Finally, if we introduce the topological hypothesis of being embedded, we prove in Theorem 5.3.9 the following weak version of the characterization of Clifford torus in the sense of the famous Lawson's conjecture, which has been recently solved by Brendel [Br12].

The Clifford torus is the only compact embedded self-shrinker Hamiltonian stationary Lagrangian surface in \mathbb{C}^2 .

The Hamiltonian stationary condition is equivalent to the vanishing of the divergence of the tangent vector field JH , which is precisely the Euler-Lagrange equation to the corresponding variational problem.

The proofs of these three uniqueness results are certainly elementary, though they are based on stronger results which, combined in an appropriate way, lead us to the desired uniqueness of the Clifford torus with the natural hypothesis explained above.

BIBLIOGRAFÍA

- [AL86] U. Abresch and J. Langer. *The normalized curve shortening flow and homothetic solutions*. J. Differential Geom. **23** (1986), no. 2, 175-196. (Citado en las páginas 15, 27, 80 y 83.)
- [Al91] S. J. Altschuler. *Singularities of the curve shrinking flow for space curves*. J. Differential Geom. **34** (1991), no. 2, 491-514. (Citado en la página 19.)
- [AlGr92] S. J. Altschuler and M. Grayson. *Shortening space curves and flow through singularities*. J. Differential Geom. **35** (1992), no. 2, 283-298. (Citado en la página 19.)
- [An03] H. Anciaux. *Construction of many Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in Euclidean four-space*. Calc. Var. Partial Differential Equations **17** (2003), no. 2, 105-120. (Citado en la página v.)
- [An06] H. Anciaux. *Construction of Lagrangian self-similar solutions to the mean curvature flow in \mathbb{C}^n* . Geom. Dedicata **120** (2006), 37-48. (Citado en las páginas iv, v, 15, 19, 27, 80, 81 y 99.)
- [AnC11] H. Anciaux and I. Castro. *Constructions of Hamiltonian-minimal Lagrangian submanifolds in complex Euclidean space*. Results Math. **60** (2011), no. 1-4, 325-349. (Citado en la página v.)
- [And03] B. Andrews. *Classification of limiting shapes for isotropic curve flows*. J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 2, 443-459. (Citado en la página 15.)
- [AndB10] B. Andrews and C. Baker. *Mean curvature flow of pinched submanifolds to spheres*. J. Differential Geom. **85** (2010), no. 3, 357-395. (Citado en la página 19.)

- [Ang89] S. B. Angenent. *Shrinking doughnuts*. Nonlinear diffusion equations and their equilibrium states, 3 (Gregynog, 1989), 21-38, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 7, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1992. (Citado en las páginas 16 y 18.)
- [AngV97] S. B. Angenent and J. J. L. Velázquez. *Degenerate neckpinches in mean curvature flow*. J. Reine Angew. Math. **482** (1997), 15-66. (Citado en la página 12.)
- [Br12] S. Brendel. *Embedded minimal tori in \mathbb{S}^3 and the Lawson conjecture*. Aparecerá en Acta Math. (Citado en las páginas x, 90 y 103.)
- [CaLi11] H.-D. Cao and H. Li. *A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension*. Aparecerá en Calc. Var. Partial Differential Equations. (Citado en las páginas ix, 84, 85 y 103.)
- [CCh06] I. Castro and B.-Y. Chen. *Lagrangian surfaces in complex Euclidean plane via spherical and hyperbolic curves*. Tohoku Math. J. (2) **58** (2006), no. 4, 565-579. (Citado en las páginas vi, 34 y 100.)
- [ChChH09] A. Chau, J. Chen and W. He. *Entire self-similar solutions to Lagrangian mean curvature flow*. arXiv:0905.3869 [math.DG]. (Citado en las páginas iv, 19 y 99.)
- [CL10] I. Castro and A. M. Lerma. *Hamiltonian stationary self-similar solutions for Lagrangian mean curvature flow in complex Euclidean plane*. Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 5, 1821-1832. (Citado en las páginas v, 33, 82 y 99.)
- [CL12a] I. Castro and A. M. Lerma. *Translating solitons for Lagrangian mean curvature flow in complex Euclidean plane*. Internat. J. Math. **23** (2012), no. 10, 1250101-1-1250101-16. (Citado en las páginas vii y 101.)
- [CL12b] I. Castro and A. M. Lerma. *The Clifford torus as a self-shrinker for the Lagrangian mean curvature flow*. Aparecerá en Int. Math. Res. Not. (Citado en las páginas ix, 77 y 102.)
- [CL13] I. Castro and A. M. Lerma. *A new construction of Lagrangians in \mathbb{C}^2 in terms of planar curves*. Preprint. (Citado en las páginas 56 y 59.)
- [CLSm13] I. Castro, A. M. Lerma and K. Smoczyk. *New examples of Lagrangian self-shrinkers and self-expanders in complex Euclidean space*. En preparación. (Citado en la página vi.)
- [ClScSc07] J. Clutterbuck, O.C. Schnürer and F. Schulze. *Stability of translating solutions to mean curvature flow*. Calc. Var. Partial Differential Equations **29** (2007), no. 3, 281-293. (Citado en la página 19.)

- [CU93] I. Castro and F. Urbano. *Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form*. Tohoku Math. J. (2) **45** (1993), no. 4, 565-582. (Citado en las páginas 48, 49, 74 y 75.)
- [CU98] I. Castro and F. Urbano. *Examples of unstable Hamiltonian-minimal Lagrangian tori in \mathbb{C}^2* . Compositio Math. **111** (1998), no. 1, 1-14. (Citado en las páginas v y 47.)
- [ChLi04] J. Chen and J. Li. *Singularity of mean curvature flow of Lagrangian submanifolds*. Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 25-51. (Citado en las páginas iv, vii, 19, 25, 99 y 101.)
- [ChPe12] Q.-M. Cheng and Y. Peng. *Complete self-shrinkers of the mean curvature flow*. arXiv:1202.1053 [math.DG]. (Citado en las páginas ix, 85 y 102.)
- [ChCK78] S. S. Chern, M. Do Carmo and S. Kobayashi. *Minimal submanifolds of sphere with second fundamental form of constant length*. Shiing-Shen Chern Selected Papers, Springer-Verlag 1978, pp. 393-409. (Citado en las páginas 85 y 86.)
- [ChZ01] K.-S. Chou and X.-P. Zhu. *The curve shortening problem*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2001. ISBN: 1-58488-213-1 (Citado en las páginas 60 y 102.)
- [CoMi12] T. H. Colding and W. P. Minicozzi II. *Generic mean curvature flow I: generic singularities*. Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 755-833. (Citado en las páginas 15, 19 y 20.)
- [EHu89] K. Ecker and G. Huisken. *Mean curvature evolution of entire graphs* Ann. of Math. (2) **130** (1989), no. 3, 453-471. (Citado en las páginas 7 y 11.)
- [EW87] C. L. Epstein and M. I. Weinstein. *A stable manifold theorem for the curve shortening equation*. Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 1, 119-139. (Citado en la página 15.)
- [Ga84] M. E. Gage. *Curve shortening makes convex curves circular*. Invent. Math. **76** (1984), no. 2, 357-364. (Citado en la página 18.)
- [GaH86] M. Gage and R. S. Hamilton. *The heat equation shrinking convex plane curves*. J. Differential Geom. **23** (1986), no. 1, 69-96. (Citado en la página 18.)
- [Gr87] M. A. Grayson. *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*. J. Differential Geom. **26** (1987), no. 2, 285-314. (Citado en la página 18.)
- [Gr89] M. A. Grayson. *Shortening embedded curves*. Ann. of Math. (2) **129** (1989), no. 1, 71-111. (Citado en las páginas 7 y 18.)

- [GSSmZ07] K. Groh, M. Schwarz, K. Smoczyk, and K. Zehmisch. *Mean curvature flow of monotone Lagrangian submanifolds*. Math. Z. **257** (2007), no. 2, 295-327. (Citado en las páginas [iv](#), [19](#), [25](#), [27](#) y [99](#).)
- [Ha12] H. P. Halldorsson. *Self-similar solutions to the curve shortening flow*. Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), no. 10, 5285-5309. (Citado en la página [61](#).)
- [HLi09] X. Han and J. Li. *Translating solitons to symplectic and Lagrangian mean curvature flows*. Internat. J. Math. **20** (2009), no. 4, 443-458. (Citado en las páginas [iv](#), [19](#) y [99](#).)
- [HL82] R. Harvey and H. B. Lawson. *Calibrated geometries*. Acta Math. **148** (1982), 47-157. (Citado en la página [iv](#).)
- [HR02] F. Hélein and P. Romon. *Hamiltonian stationary Lagrangian surfaces in \mathbb{C}^2* . Comm. Anal. Geom. **10** (2002), no. 1, 79-126. (Citado en la página [v](#).)
- [Hu84] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*. J. Differential Geom. **20** (1984), no. 1, 237-266. (Citado en la página [18](#).)
- [Hu86] G. Huisken, *Contracting convex hypersurfaces in Riemannian manifolds by their mean curvature*. Invent. Math. **84** (1986), no. 3, 463-480. (Citado en la página [18](#).)
- [Hu90] G. Huisken. *Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow*. J. Differential Geom. **31** (1990), no. 1, 285-299. (Citado en las páginas [v](#), [v](#), [ix](#), [8](#), [9](#), [10](#), [19](#), [83](#), [88](#), [99](#) y [103](#).)
- [Hu93] G. Huisken. *Local and global behaviour of hypersurfaces moving by mean curvature*. Differential geometry: partial differential equations on manifolds (Los Angeles, CA, 1990), 175-191, Proc. Sympos. Pure Math., 54, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993. (Citado en la página [19](#).)
- [HuSin09] G. Huisken and C. Sinestrari. *Mean curvature flow with surgeries of two-convex hypersurfaces*. Invent. Math. **175** (2009), no. 1, 137-221. (Citado en la página [19](#).)
- [JLT10] D. Joyce, Y.-I. Lee, and M.-P. Tsui. *Self-similar solutions and translating solitons for Lagrangian mean curvature flow*. J. Differential Geom. **84** (2010), no. 1, 127-161. (Citado en las páginas [iv](#), [v](#), [vii](#), [vii](#), [viii](#), [17](#), [19](#), [27](#), [29](#), [33](#), [55](#), [99](#), [101](#) y [102](#).)
- [KM10] S. Kleene and N. M. Möller. *Self-shrinkers with a rotational symmetry*. Preprint. (Citado en la página [16](#).)

- [La69] H.B. Lawson. *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*. Ann. of Math. (2) **89** (1969) 187-197. (Citado en las páginas 85 y 86.)
- [La70] H.B. Lawson. *Complete minimal surfaces in \mathbb{S}^3* . Ann. of Math. (2) **92** (1970), 335-374. (Citado en la página 82.)
- [LeSe10] N.Q. Le and N. Sesum. *The mean curvature at the first singular time of the mean curvature flow*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **27** (2010), no. 6, 1441-1459. (Citado en la página 19.)
- [LeSe11] N.Q. Le and N. Sesum. *Blow-up rate of the mean curvature during the mean curvature flow and a gap theorem for self-shrinkers*. Comm. Anal. Geom. **19** (2011), no. 4, 633-659. (Citado en las páginas ix, 19, 84 y 103.)
- [LWa09] Y.-I. Lee and M.-T. Wang. *Hamiltonian stationary shrinkers and expanders for Lagrangian mean curvature flows*. J. Differential Geom. **83** (2009), no. 1, 27-42. (Citado en las páginas iv, v, vi, vi, 27, 33, 41, 99 y 100.)
- [LWa10] Y.-I. Lee and M.-T. Wang. *Hamiltonian stationary cones and self-similar solutions in higher dimension*. Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 3, 1491-1503. (Citado en las páginas iv, v, vi, 27, 33, 42, 46, 82, 99 y 100.)
- [LiWe12] H. Li and Y. Wei. *Classification and rigidity of self-shrinkers in the mean curvature flow*. arXiv: 1201.4623 [math.DG]. (Citado en las páginas ix, 84, 87 y 102.)
- [Mi95] W. P. Minicozzi II. *The Willmore functional on Lagrangian tori: Its relation to area and existence of smooth minimizers*. J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 4, 761-791. (Citado en la página v.)
- [Mu56] W. Mullins. *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*. J. Appl. Phys. **27** (1956), 900-904. (Citado en las páginas i y 97.)
- [Nm09] S. Y. Nemirovski. *Homology class of a Lagrangian Klein bottle*. Izv. Math. **73** (2009), 689. (Citado en la página 90.)
- [Ne07] A. Neves. *Singularities of Lagrangian Mean Curvature Flow: Zero-Maslov class*. Invent. Math. **168** (2007), no. 3, 449-484. (Citado en las páginas iv, iv, iv, iv, 25 y 99.)
- [Ne10] A. Neves. *Singularities of Lagrangian Mean Curvature Flow: Monotone case*. Math. Res. Lett. **17** (2010), no. 1, 109-126. (Citado en las páginas iv, iv y 99.)

- [Ne11] A. Neves. *Recent progress on singularities of Lagrangian Mean Curvature Flow*. Surveys in geometric analysis and relativity, 413-438, Adv. Lect. Math. (ALM), 20, Int. Press, Somerville, MA, 2011. (Citado en las páginas [iv](#), [iv](#), [ix](#), [28](#), [77](#), [88](#), [99](#) y [102](#).)
- [Ne13] A. Neves. *Finite time singularities for Lagrangian Mean Curvature Flow*. Aparecerá en Ann. of Math. **177** (2013). (Citado en las páginas [iv](#) y [99](#).)
- [NeT07] A. Neves and G. Tian. *Translating solutions to Lagrangian mean curvature flow*. Aparecerá en Trans. Amer. Math. Soc. (Citado en las páginas [iv](#), [vii](#), [vii](#), [29](#), [99](#) y [101](#).)
- [Oh93] Y. G. Oh. *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*. Math. Z. **212** (1993), no. 2, 175-192. (Citado en las páginas [v](#) y [23](#).)
- [SWo01] R. Schoen and J. Wolfson. *Minimizing area among Lagrangian surfaces: the mapping problem*. J. Differential Geom. **58** (2001), no. 1, 1-86. (Citado en las páginas [iv](#), [v](#), [27](#) y [99](#).)
- [SWo03] R. Schoen and J. Wolfson. *Mean curvature flow and Lagrangian embeddings*. Preprint 2003. (Citado en las páginas [iv](#), [iv](#) y [99](#).)
- [Sh09] V. Shevchishin. *Lagrangian embeddings of the Klein bottle and combinatorial properties of mapping class groups*. Izv. Math. **73** (2009), no. 4, 797-859. (Citado en la página [90](#).)
- [Si68] J. Simons. *Minimal varieties in Riemannian manifolds*. Ann. of Math. (2) **88** 1968 62-105. (Citado en las páginas [85](#) y [86](#).)
- [Sm96] K. Smoczyk. *A canonical way to deform a Lagrangian submanifold*. arXiv:9605005 [math.DG] (1996). (Citado en las páginas [iii](#), [iv](#), [24](#) y [99](#).)
- [Sm99] K. Smoczyk. *Harnack inequality for the Lagrangian mean curvature flow*. Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (1999), no. 3, 247-258. (Citado en las páginas [iv](#) y [99](#).)
- [Sm02] K. Smoczyk. *Angle theorems for the Lagrangian mean curvature flow*. Math. Z. **240** (2002), no. 4, 849-883. (Citado en las páginas [iv](#), [7](#) y [99](#).)
- [Sm04] K. Smoczyk. *Longtime existence of the Lagrangian mean curvature flow*. Calc. Var. Partial Differential Equations **20** (2004), no. 1, 25-46. (Citado en las páginas [iv](#), [7](#), [19](#) y [99](#).)
- [Sm05] K. Smoczyk. *Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension*. Int. Math. Res. Not. **48** (2005), 2983-3004. (Citado en la página [84](#).)
- [Sm12] K. Smoczyk. *Mean curvature flow in higher codimension: Introduction and survey*. Global Differential Geometry, Springer Proceedings in Mathematics, vol. 17, part 2, 231-274, 2012. (Citado en las páginas [iii](#), [iv](#), [6](#), [7](#), [11](#) y [99](#).)

- [SmWa02] K. Smoczyk and M.-T. Wang. *Mean curvature flows of Lagrangian submanifolds with convex potentials*. J. Differential Geom. **62** (2002), no. 2, 243-257. (Citado en las páginas [iv](#), [7](#), [19](#) y [99](#).)
- [SmWa11] K. Smoczyk and M.-T. Wang. *Generalized Lagrangian mean curvature flows in symplectic manifolds*. Asian J. Math. **15** (2011), no. 1, 129-140. (Citado en las páginas [iv](#) y [99](#).)
- [SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau and E. Zaslow. *Mirror symmetry is T-duality*. Nuclear Phys. B **479** (1996), no. 1-2, 243-259. (Citado en las páginas [iv](#) y [99](#).)
- [TWa04] M.-P. Tsui and M.-T. Wang. *Mean curvature flows and isotropy of maps between spheres*. Comm. Pure Appl. Math. **57** (2004), no. 8, 1110-1126. (Citado en la página [7](#).)
- [TY02] R. P. Thomas and S.-T. Yau. *Special Lagrangians, stable bundles and mean curvature flow*. Comm. Anal. Geom. **10** (2002), no. 5, 1075-1113. (Citado en las páginas [iv](#), [23](#) y [99](#).)
- [Ur87] F. Urbano. *Totally real submanifolds*. Geometry and topology of submanifolds (Marseille, 1987), 198-208, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989. (Citado en la página [88](#).)
- [Wa01] M.-T. Wang. *Mean curvature flow of surfaces in Einstein four-manifolds*. J. Differential Geom. **57** (2001), no. 2, 301-338. (Citado en las páginas [iv](#), [vii](#), [19](#), [25](#), [99](#) y [101](#).)
- [Wa02] M.-T. Wang. *Long time existence and convergence of graphic mean curvature flow in arbitrary codimension*. Invent. Math. **148** (2002), no. 3, 525-543. (Citado en las páginas [7](#) y [19](#).)
- [Wa08] M.-T. Wang. *A convergence result of the Lagrangian mean curvature flow*. Third International Congress of Chinese Mathematicians. Part 1, 2, 291-295, AMS/IP Stud. Adv. Math., 42, pt. 1, 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. (Citado en las páginas [iv](#) y [99](#).)
- [Wh05] B. White. *A local regularity theorem for mean curvature flow*. Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 3, 1487-1519. (Citado en la página [6](#).)
- [Wh09] B. White. *Currents and flat chains associated to varifolds, with an application to mean curvature flow*. Duke Math. J. **148** (2009), no. 1, 41-62. (Citado en la página [6](#).)
- [Wo05] J. Wolfson. *Lagrangian homology classes without regular minimizers*. J. Differential Geom. **71** (2005), no. 2, 307-313. (Citado en la página [iv](#).)

