

C-08-2023

Comunicación científico-técnica

## Modelo analítico simplificado para el flujo de agua en el suelo bajo condiciones de simetría esférica

del Vigo, Á

Profesor Ayudante Doctor. Universidad Politécnica de Madrid. Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía. Calle Mercator 2, 28031. Madrid (España). Correspondencia: a.delvigo@upm.es

**Resumen:** Los métodos de riego tradicional como el riego por inundación a manta, o en menor medida el riego por surcos y aspersión, implican grandes pérdidas por filtración de agua profunda o evaporación en superficie. Por el contrario, en el riego por goteo se aplica una menor cantidad de agua en el suelo que se distribuye localmente, y de forma homogénea, alrededor de la raíz de la planta, favoreciendo su crecimiento. En este tipo de riego, considerando que el suelo es homogéneo e isótropo, despreciando el efecto gravitatorio y si el caudal aplicado no excede un cierto límite (para el que se produce acumulación de agua en la superficie) se puede asumir que el flujo tiene simetría radial, o esférica, respecto a la fuente superficial (o gotero). Diferentes soluciones analíticas a este problema arquetípico han ido apareciendo desde mediados del s.XX habiéndose obtenido resultados de interés; sin embargo, el problema aún no está cerrado ya que todos estos modelos de base física están sujetos a condiciones de simplificación que, siendo necesarias para la resolución de las ecuaciones, no siempre se adecúan a la realidad del riego por goteo.

En este artículo se presenta una revisión de algunos modelos analíticos y modelos analíticos simplificados existentes en la bibliografía [1-5] que describen la evolución temporal del frente de avance del flujo de agua en el suelo, bajo condiciones de riego por goteo superficial con simetría esférica. Además, se presenta un nuevo modelo analítico simplificado que se ha deducido a través de la integración directa de la ecuación de Darcy combinada con la ecuación de continuidad, y asumiendo las condiciones de contorno antes mencionadas para este tipo de simetría. Al final del trabajo, se presenta una comparación de la predicción que arrojan estos seis modelos analíticos frente a resultados de simulación (que se toman como referencia) para la evolución temporal del frente de avance del bulbo. Las simulaciones fueron obtenidas a través de un modelo numérico de elaboración propia validado y presentado en publicaciones previas [6-7].

**Palabras clave:** Simetría radial; riego por goteo; frente de avance; ecuación Darcy.



---

## Water flow spherical symmetry analytical model for superficial trickle irrigation

**Abstract:** Traditional irrigation methods such furrow and sprinkler irrigation, involve large water losses due to deep water filtration or surface evaporation. On the contrary, in drip irrigation, a smaller amount of water is applied to the soil that is distributed locally, and homogeneously, around the plant's root, what encourage its growth. In this type of irrigation, when it is assumed that the soil is homogeneous and isotropic, neglecting the gravitational effect and if the applied flow does not exceed a certain limit (for which water accumulation occurs on the surface), it can be assumed that, the flow is radial (spherical) symmetric respect to the surface source (dripper). Different analytical solutions to this archetypal problem were developed since the mid-20th century, obtaining interesting results. However, the problem is not yet closed since all these physically based models are subject to simplification conditions that, while necessary for the resolution of the equations, do not always adapt to the reality of drip irrigation.

This article presents a review of some analytical models and simplified analytical models existing in the literature [1-5] that describe the temporal evolution of the water front advance, under surface drip irrigation conditions, with spherical symmetry. Furthermore, a new simplified analytical model is presented in this article derived through the direct integration of Darcy and continuity equations, when it is assumed the aforementioned boundary conditions according to this type of symmetry. At the end of the work, a comparison of the prediction provided by these six analytical models against simulation results (which are taken as a reference) for the temporal evolution of the bulb front advance is presented. The simulations were obtained via a numerical model that was validated and presented in previous publications [6-7].

**Keywords:** radial symmetry; front advance; Darcy equation.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos de base física para el análisis del flujo de agua en suelo se fundamentan en la resolución de las ecuaciones de la filtración en un medio poroso: la ecuación de Darcy-Buckingham [8-9], la ecuación de continuidad, y la ecuación de Richards [10], que es una combinación de las dos primeras. Se habla de modelos analíticos de filtración cuando estas ecuaciones se pueden integrar de forma exacta. En este contexto, se suele referir a modelos analíticos simplificados cuando se realiza alguna simplificación sobre las condiciones iniciales, condiciones de contorno, o la simetría del sistema, que permita la integración analítica de las ecuaciones, como por ejemplo, el modelo de Green-Ampt [11]. En caso contrario, para obtener una solución analítica es necesario asumir funciones de caracterización del medio poroso lo suficientemente sencillas como para poder resolver la ecuación de Richards; este es el caso de modelos como Wooding, Raats, Warrick, Lomen o Philip [2,12-15], que, basándose en las funciones de caracterización del suelo tipo Gardner [16], fueron capaces de integrar la ecuación de Richards con éxito para diferentes condiciones de contorno. Sin embargo, las funciones del tipo Gardner, que representan la conductividad hidráulica como una función exponencial del potencial matricial del suelo, no siempre describen de una forma adecuada la complejidad inherente al suelo.

Alternativamente, se desarrollan modelos numéricos para la resolución de la ecuación de Richards, que, sin restricciones tan severas, pueden alcanzar soluciones aproximadas a la realidad en ausencia de simetría y con funciones de caracterización del suelo más complejas, capaces de describir las condiciones del suelo con mayor precisión. Este es el caso de modelos como Brandt, Šimůnek o del Vigo [17-20].

Los modelos analíticos simplificados, a pesar de ser los que inicialmente más restricciones imponen para el sistema de estudio, tienen dos ventajas importantes sobre el resto de los modelos. La primera es una mayor sencillez de las ecuaciones resultantes, de modo que, personal no cualificado o con pocos medios de cálculo a su alcance (por ejemplo, por estar sobre el terreno), pueden obtener estimaciones para la evolución del flujo y patrones de filtración. En segundo lugar, y posiblemente más importante, es que la mayoría de estos modelos no están ligados a funciones de caracterización del suelo que, en muchos casos, no describen convenientemente su naturaleza. En este sentido, es de interés seguir avanzando en la mejora de los modelos analíticos simplificados existentes, y también, obtener otros nuevos, que puedan describir con sencillez, y en buena aproximación, los procesos de filtración de agua en el suelo.

En este artículo se hace una revisión de cinco modelos analíticos existentes en la bibliografía que describen la evolución del frente de avance del bulbo en condiciones de simetría esférica desde una fuente puntual en superficie: Roth, Philip, Ben Asher, Chu, y del Vigo [1-5]. Adicionalmente, se presenta el desarrollo de un nuevo modelo analítico simplificado que se ha deducido a través de la combinación de la ecuación de Darcy y la ecuación de continuidad, asumiendo condiciones de contorno compatibles con el riego por goteo superficial y una simetría esférica. Al final del trabajo, se realiza una comparación de la predicción que arrojan estos seis modelos analíticos frente a resultados de simulación (que se toman como referencia) para la evolución temporal del frente de avance del bulbo. Las simulaciones fueron obtenidas a través de un modelo numérico de elaboración propia que ha sido validado y presentado en publicaciones previas [6-7,19].

## 2. MATERIALES Y MÉTODOS

Considerar un suelo homogéneo e isótropo, de conductividad hidráulica en saturación  $k_s$  [m/s], y con un contenido de humedad inicial constante,  $\theta_0$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Despreciando el efecto gravitatorio y asumiendo que el total del volumen aplicado se infiltra en el suelo desde un punto, se puede considerar que el bulbo es hemi-esférico y, por tanto, el frente de avance tiene una simetría radial. Para flujo bajo estas condiciones los siguientes modelos analíticos describen la evolución del frente de avance  $r_f$  [m], o radio del bulbo, en función del tiempo.

### Modelo de Roth (1974)

Seguramente, la primera estimación para el avance del frente mojado en condiciones de simetría radial es el modelo de Roth [1]. Este sencillo modelo se deduce asumiendo que todo el bulbo mojado tiene un contenido de humedad constante, e igual al del frente de avance  $\theta_f$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Entonces, considerando que el caudal  $q$  [m<sup>3</sup>/s] es constante:

$$q = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V(t) = q \cdot t + C$$

Siendo  $V$  el volumen de agua infiltrado [m<sup>3</sup>], y  $C = 0$  una constante de integración que es nula debido a la condición inicial ( $V(t = 0) = 0$ ). Por la geometría del sistema (semiesfera) y considerando que todo el bulbo adquiere el contenido de humedad del frente de avance, el volumen infiltrado es:

$$V = (\theta_f - \theta_0) \cdot \frac{2}{3} \pi r_f^3 = qt$$

Siendo  $r_f$  el radio [m] del frente de avance o radio del bulbo. Despejando este valor se llega a la siguiente ecuación:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_f - \theta_0)}} \quad (1)$$

Este modelo fue contrastado con datos experimentales obteniendo un buen ajuste, por lo que en muchas fuentes se cita como si fuera un modelo empírico.

### Modelo de Philip (1984)

Utilizando la ecuación de Richards, la transformada de Kirchhoff y una conductividad hidráulica del tipo Gardner, Philip [2] obtuvo una solución analítica para una fuente puntual en régimen estacionario ( $\partial\theta/\partial t = 0$ ) que permite determinar el tiempo de viaje de una partícula fluida desde la fuente hasta una distancia  $r(t)$ . La ecuación en derivadas parciales es del tipo de ecuaciones cuasi-lineales. Se concluye que, en los instantes iniciales, cuando el radio del bulbo tiende a cero, su geometría es esférica según la ecuación:

$$\lim_{R \rightarrow 0} T = \frac{1}{3} R^3$$

Siendo  $T$  y  $R$  dos variables adimensionales que, se refieren al tiempo de viaje y radio del bulbo, respectivamente, tal que:

$$\begin{cases} T = \frac{\alpha^3 qt}{16\pi\theta_m} \\ R = \frac{\alpha r_f}{2} \end{cases}$$

Donde  $\alpha$  [ $\text{m}^{-1}$ ] es un parámetro típico del medio conocido como constante de escala macroscópica de capilaridad y  $\theta_m$  el valor medio del contenido de humedad volumétrica del bulbo. Sustituyendo las variables adimensionales y despejando el radio del bulbo ( $r_f$ ) se llega a:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi\theta_m}} \quad (2)$$

El valor del contenido de humedad medio ( $\theta_m$ ) se puede calcular en cada instante de tiempo [3], dividiendo el volumen total infiltrado ( $V$ ) entre el volumen del bulbo que considera este modelo. Adicionalmente, a este valor se le puede sumar el contenido de humedad inicial del suelo, tal que:

$$\theta_m = \frac{V}{\frac{2}{3}\pi r_f^3} + \theta_0$$

### Modelo de Ben Asher (1986)

El modelo de Ben Asher [3] es un modelo analítico aproximado deducido desde la ecuación de continuidad. Este modelo asume una simetría radial del bulbo, en ausencia de campo gravitatorio, y para regímenes de caudal suficientemente pequeños como para que no se llegue a formar un charco en la superficie (flujo desde fuente puntual). El modelo general asume la existencia de evaporación (como una condición de contorno en la superficie), transpiración (condición de contorno sobre el bulbo mojado) y extracción radicular (a través de un término que se le añade a la ecuación de continuidad). Los términos de evaporación, transpiración y extracción se consideran con simetría axial (respecto al eje vertical que pasa por la fuente). En el caso particular en que se omite la evapotranspiración y la extracción radicular se llega a la siguiente expresión sencilla para el radio del bulbo:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_m - \theta_0)}} \quad (3)$$

Siendo  $\theta_m$  [ $\text{m}^3/\text{m}^3$ ] y  $\theta_0$  [ $\text{m}^3/\text{m}^3$ ] el contenido medio del bulbo e inicial del suelo, respectivamente. Según el criterio de este autor en buena aproximación se puede considerar que  $\theta_m - \theta_0 \cong \theta_s/2$ . Utilizando datos experimentales de publicaciones previas [21-23] en las que se midió el frente de avance del bulbo en función del tiempo, se reportó una desviación máxima de los datos de tan solo el 7% respecto a la ecuación (3).

### Modelos basados en la aproximación de Green-Ampt

Los autores Chu S.T. y del Vigo *et al* [4-5], de forma independiente, y asumiendo las mismas condiciones de simetría que se han mencionado con anterioridad, derivaron a través de dos procedimientos distintos, la siguiente ecuación, que expresa de forma implícita el avance del frente mojado en función del tiempo ( $r_f(t)$ ) desde una fuente semi-esférica de radio en saturación  $R_0$ , y asumiendo hipótesis para bulbo del tipo Green-Ampt:

$$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{k_s \tau_f R_0} \left[ \frac{1}{3} (r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2} (r_f^2(t) - R_0^2) \right] \quad (4)$$

Donde se ha utilizado la tensión en el frente de avance  $\tau_f$  [m] que es un parámetro típicamente ligado a los modelos que asumen hipótesis de Green-Ampt. Este parámetro se puede calcular a través de la expresión de Neuman [24], aunque también existen bases de datos con valores de referencia para distintos tipos de suelo [25]. Hay que tener en cuenta que, a diferencia de los casos anteriores, estos dos modelos no consideran un caudal aplicado constante, sino una fuente de geometría esférica y radio constante ( $R_0$ ) que está en saturación, a través de la que fluye agua hacia el bulbo. El contenido de humedad del bulbo se considera igual al de saturación del suelo, siguiendo la hipótesis de Green-Ampt como se puede consultar en la bibliografía [26].

### Modelo de simulación

Se desarrolló un código en MATLAB para el estudio de la filtración de agua a través de la ecuación de Richards. El código fue ampliamente validado [7] por comparación con soluciones analíticas conocidas [14-15], el programa HYDRUS [18] y ensayos experimentales [27]. Por la simetría del sistema (infiltración desde una fuente de caudal conocido en superficie) el modelo de integración utiliza coordenadas cilíndricas para la resolución numérica de las ecuaciones, lo que permite reducir el tiempo de computación. Detalles sobre este modelo como la discretización de la ecuación de Richards, las condiciones de estabilidad, la estructura del código, las características del flujo que se puede analizar y un código fuente se pueden consultar en la bibliografía [6-7,20,27].

## 3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### Integración del modelo analítico propuesto

Considerar una fuente semiesférica de radio  $R_0$  [m], suficientemente pequeña como para asumir que la fuente es cuasi-puntual frente a las distancias de estudio. Considerar el suelo homogéneo e isótropo, de conductividad hidráulica en saturación  $k_s$  [m/s], y con un contenido de humedad inicial constante  $\theta_0$  [m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>]. Despreciando el efecto gravitatorio, la ecuación de Darcy-Buckingham en la frontera entre la fuente y suelo, y al inicio del proceso de filtración es:

$$\vec{v} = -k_s \vec{\nabla} h \Rightarrow v_0 \hat{r} \equiv -k_s \frac{dh}{dr} \hat{r} \cong k_s \frac{h_s - h_0}{R_0} \hat{r} \quad (5)$$

Donde  $h$  [m] representa la función potencial matricial del suelo, siendo  $h_s$  [m] el potencial matricial de saturación (sobre la fuente) y  $h_0$  [m] el potencial matricial inicial del suelo. Esta aproximación es aceptable si se considera el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ), es decir, lo suficientemente pequeño como para equipararlo a  $dr$ . La velocidad del flujo a la salida de la fuente en el instante inicial es  $v_0$  [m/s]. Dadas las condiciones supuestas el flujo tiene simetría radial, siendo  $\hat{r}$  el vector unitario radial en coordenadas esféricas. Por tanto, el caudal  $q$  [m<sup>3</sup>/s] que atraviesa la superficie de la fuente al inicio del proceso de filtración es:

$$q = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_S v_0 \hat{r} \cdot dS \hat{r} = v_0 2\pi R_0^2 \quad (6)$$

Combinando las dos ecuaciones anteriores se llega a la siguiente expresión para el caudal:

$$q = 2\pi k_s (h_s - h_0) R_0 \quad (7)$$

La ecuación (7) ha sido deducida bajo condiciones de infiltración inicial, sin embargo, asumiendo que el caudal es un parámetro (típicamente) constante en el riego por goteo superficial, que no hay pérdidas de agua por escorrentía o acumulación de agua (charco) en la superficie, y si el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ) no cambia a lo largo de todo el proceso de infiltración, se puede considerar que esta ecuación es general para cualquier instante de tiempo en este proceso. Advertir, en este punto que, se está considerando que todo el caudal aplicado por la fuente se infiltra a través del suelo. Como además, el flujo del campo de velocidades es invariante para cualquier superficie semiesférica, cerrada, y concéntrica a la fuente cuasi-puntual (teorema de Gauss), en ausencia de otras fuentes o sumideros, se puede generalizar que:

$$q = 2\pi k_s (h_s - h_0) R_0 = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = v(r) \cdot 2\pi r^2 \quad (8)$$

Donde  $v(r)$  es la velocidad del flujo a una distancia  $r$  del origen de coordenadas (fuente cuasi-puntual). Por tanto, despejando la velocidad, se llega a:

$$\vec{v} = \frac{k_s(h_s - h_0)R_0}{r^2} \hat{r} = \frac{cte}{r^2} \hat{r} \quad (9)$$

Resultado que indica, como cabría esperar que, el módulo de la velocidad del fluido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de la fuente. Utilizando la ecuación de continuidad, se puede estudiar la evolución temporal del sistema:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{2k_s(h_s - h_0)R_0}{r^3} \quad (10)$$

Y, al integrar con respecto al tiempo:

$$\theta(r, t) = \frac{2k_s(h_s - h_0)R_0}{r^3} \cdot t + \theta_0 \quad (11)$$

Tal que,  $\theta(r, t) \in [\theta_0, \theta_s]$ . Esta función describe la evolución del contenido de humedad del sistema como función de la distancia al gotero y el tiempo. El contenido de humedad tiene, por tanto, una simetría radial debido a las condiciones simplificadas del sistema. Se puede observar que, en todos los puntos el contenido de humedad crece linealmente con el tiempo hasta un valor máximo ( $\theta_s$ ); por el contrario, el contenido de humedad es inverso al cubo de la distancia, de modo que, los puntos más alejados del gotero contienen una menor cantidad de agua (aunque siempre mayor a  $\theta_0$ ) para cualquier instante de tiempo. A través de la ecuación (11), y dadas las condiciones de simetría radial, se puede calcular la posición (radio) del frente de avance ( $r_f$ ) en función del tiempo, para un valor concreto de contenido de humedad  $\theta_f = \theta(r_f, t) \in [\theta_0, \theta_s]$ , tal que:

$$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{2k_s(h_s - h_0)R_0}{(\theta_f - \theta_0)} t} = \sqrt[3]{\frac{q \cdot t}{\pi(\theta_f - \theta_0)}} \quad (12)$$

Donde se ha utilizado el caudal (magnitud constante) que describe la ecuación (7). El radio del frente de avance que describe este modelo depende del contenido de humedad que se haya asumido para la frontera del bulbo. Este es un parámetro que se puede medir para cada tipo de suelo. Observar que, cuanto más próximo sea el contenido de humedad del frente de avance al contenido de

humedad inicial del suelo, mayor es el radio del bulbo previsto por este modelo. Esta es una característica de este modelo que comparte con el modelo de Roth.

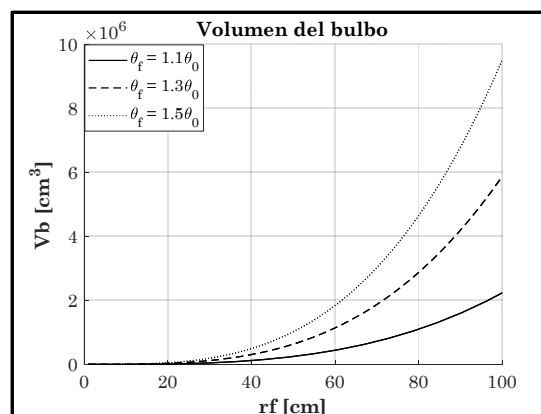
Llamando  $V_b$  al volumen de agua que contiene el bulbo (interior al frente de avance), se cumple que:

$$V_b = \int_{R_0}^{r_f} 2\pi r^2 \theta(r, t) dr \quad (13)$$

Que representa la suma del contenido de humedad infiltrado dentro de cada corteza semiesférica de radio  $r$  interior al bulbo. Integrando y utilizando la ecuación (12) para despejar el tiempo de riego en función del radio del frente de avance, se llega, después de algunas operaciones, al siguiente valor para el volumen de agua dentro del bulbo:

$$V_b = \frac{2\pi(r_f^3 - R_0^3)}{3} \theta_0 + 2\pi^2 r_f^3 \ln\left(\frac{r_f}{R_0}\right) \cdot (\theta_f - \theta_0) \quad (14)$$

El primer término corresponde al contenido de humedad inicial del espacio que ocupa el bulbo. El segundo término, sería el agua infiltrada al bulbo a través de la fuente de radio  $R_0$ . Notar que, en el instante inicial, cuando el radio del frente de avance es igual al radio de la fuente ( $r_f = R_0$ ) los dos términos se anulan, y por tanto,  $V_b(t = 0) = 0$ . La siguiente figura representa el volumen del bulbo, según la ecuación (14) para tres contenidos de humedad distintos, que se han asumido para el frente de avance ( $\theta_f = 1.1\theta_0, \theta_f = 1.3\theta_0, \theta_f = 1.5\theta_0$ ).



**Figura 1.** Volumen del bulbo normalizado a  $\theta_0 = 0.2$  y  $R_0 = 1\text{cm}$ , para tres contenidos de humedad distintos del frente de avance. Ecuación (14).

**Tabla 1** | Resumen de las ecuaciones analíticas para el radio del bulbo ( $r_f(t)$ ). Modelos analíticos, y analíticos simplificados.

<b>Roth (1974)</b>	<b>Philip (1984)</b>	<b>Ben Asher (1986)</b>	<b>Chu S.T. (1994) del Vigo <i>et al</i> (2021)</b>	<b>Modelo propuesto</b>
$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_f - \theta_0)}}$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi\theta_m}}$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{3qt}{2\pi(\theta_m - \theta_0)}}$	$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{k_s \tau_f R_0} \left[ \frac{1}{13}(r_f^3(t) - R_0^3) - \frac{R_0}{2}(r_f^2(t) - R_0^2) \right]$	$r_f(t) = \sqrt[3]{\frac{qt}{\pi(\theta_f - \theta_0)}}$

### Comparativa entre modelos

La Tabla 1 muestra un resumen de los modelos analíticos y analíticos simplificados, para la evolución del frente de avance del bulbo que se han mencionado en este artículo; el nuevo modelo propuesto se muestra en la última columna. Se puede observar que, las cuatro expresiones explícitas para la evolución del frente de avance  $r_f(t)$  son muy similares. En particular, la diferencia entre el modelo propuesto en este artículo y el modelo de Roth es, únicamente, un factor  $\sqrt[3]{3/2} = 1.1447$ ; de modo que, el modelo propuesto estima un valor para el frente de avance que es sistemáticamente inferior al del modelo de Roth en una cantidad igual a un 11.4%. Por otro lado, los modelos de Philip y Ben Asher están ligados al valor del contenido de humedad medio en el interior del bulbo ( $\theta_m$ ), el cual, ha de ser siempre mayor al valor del contenido de humedad en el frente de avance ( $\theta_f$ ) que tienen en consideración los otros dos modelos. En este sentido, los modelos de Philip y Ben Asher proporcionan un valor para el radio del bulbo,  $r_f(t)$ , que es inferior al modelo de Roth, y que, dependiendo del valor medio del contenido de humedad en el bulbo puede ser también menor a la predicción del nuevo modelo propuesto. Consecuentemente, las estimaciones para  $r_f(t)$  de los modelos de Philip y Ben Asher se han de aproximar en mayor medida al nuevo modelo propuesto que al modelo de Roth. La comparación de estos cuatro modelos explícitos con la expresión implícita para el frente de avance del modelo de Chu y del Vigo *et al*, no es sencilla, y requiere de una representación gráfica de las ecuaciones como se muestra en las siguientes figuras.

Las siguientes figuras muestran el frente de avance estimado por cada uno de los cinco modelos analíticos mencionados en este artículo, es decir, ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (12) con líneas continuas, frente a resultados de simulación (líneas discontinuas) obtenidos mediante el modelo numérico de base física mencionado en el Capítulo 2 [6-7,27], y que se utiliza de referencia para el contraste de los modelos analíticos.

Para la simulación, y posterior análisis de los modelos, se han elegido tres suelos que están caracterizados por las funciones del tipo Gardner, ya que este es un requisito del modelo de Philip, ecuación (2). Los parámetros de los suelos utilizados en esta prueba se han obtenido del catálogo de Mualem [28], y se resumen en la Tabla 2. Para garantizar las condiciones de simetría esférica, se ha

elegido deliberadamente un caudal aplicado pequeño ( $q = 16\text{cm}^3/\text{min} < 1\text{L}/\text{h}$ ), con objeto de evitar, en los resultados de simulación, efectos de acumulación de agua sobre la superficie del suelo. Aunque esta simetría, previsiblemente podría romperse en los suelos de textura arcillosa, como el caso de 'Bet Netofa Clay', de la Tabla 2. Este es un aspecto que también han mencionado los autores Ben Asher y Philip; de hecho, la solución aproximada de Philip tiende a una solución exacta para los primeros instantes de filtración (cuando  $t \rightarrow 0$ ) en los que el bulbo se puede considerar con simetría esférica. Obviamente, a medida que avanza el tiempo y el bulbo adquiere un mayor tamaño, y contenido de humedad, el efecto gravitatorio produce un alargamiento del bulbo en la dirección vertical que rompe la simetría esférica; este efecto se aprecia claramente en los resultados de simulación, cuando el tiempo de riego aumenta, sobre todo para suelos arenosos.

La resolución espacial que se ha utilizado en las simulaciones es  $dr = dz = 0.5\text{ cm}$ . La resolución temporal del modelo de simulación ( $dt = 5.9 \cdot 10^{-4}\text{ min}$ ) viene determinada en función de la resolución espacial siguiendo los criterios de convergencia numérica establecidos para el modelo, que se pueden consultar en la bibliografía [7,27]. La tensión en el frente ( $\tau_f$ ), que es un parámetro necesario para calcular el radio del bulbo en los modelos analíticos de Chu y del Vigo *et al*, se ha estimado a través de la integral de Neuman [24]. Por otro lado, el radio de la fuente cuasi-puntual ( $R_0$ ) del modelo analítico propuesto (dato, también requerido, para el cálculo de  $r_f$  en los modelos de fuente hemi-esférica de Chu y del Vigo *et al*), como ha de ser pequeño, se ha considerado igual a la resolución espacial de las simulaciones.

**Tabla 2** | Parámetros del suelo utilizados en las simulaciones y condiciones de contorno. Mualem [28].

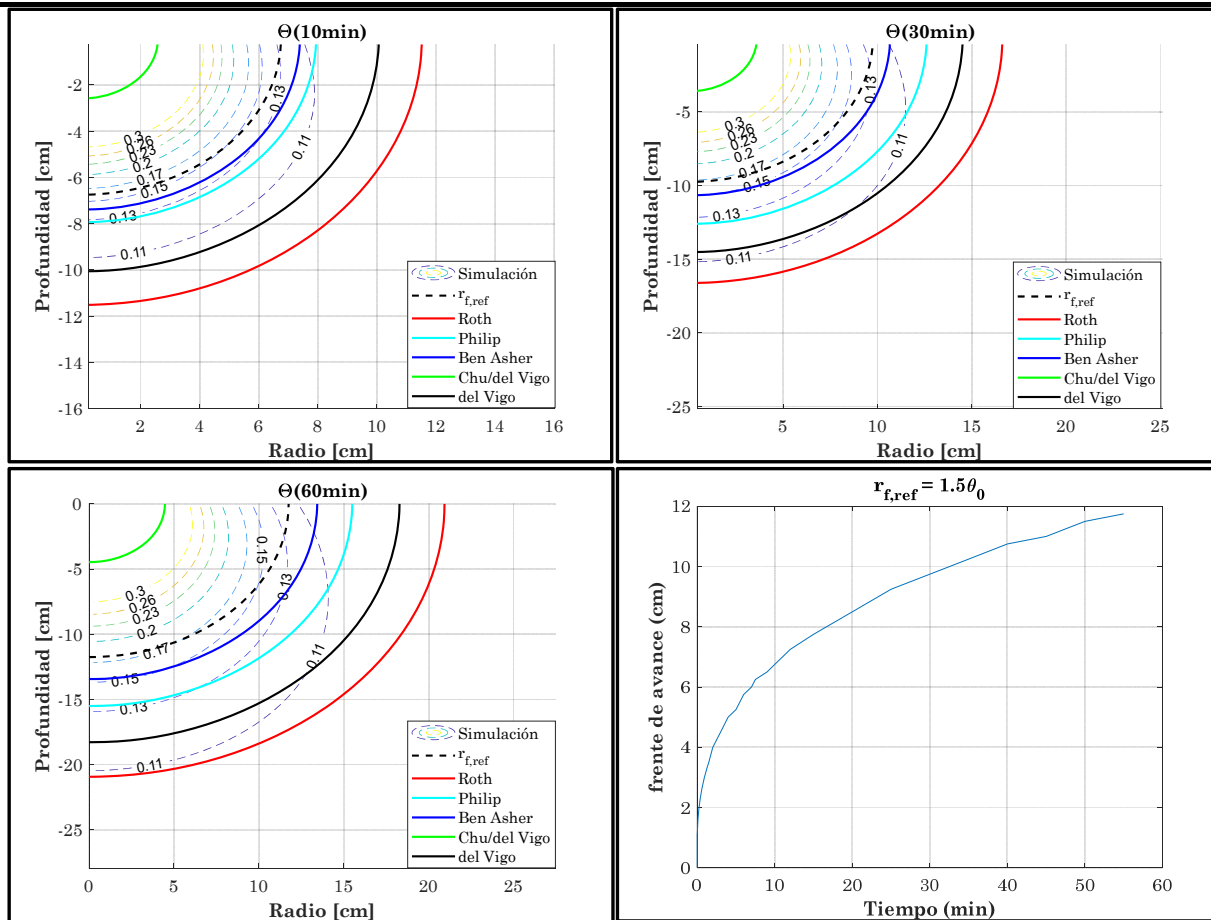
Suelo	$\theta_s$ [m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	$\theta_0$ [m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	$\alpha$ [cm <sup>-1</sup> ]	$k_s$ [cm/min]	$q$ [cm <sup>3</sup> /min]	$R_0$ [cm]	$\tau_f$ [cm]	Tipo
<b>Mualem (1976)</b>								<b>Textural</b>
Oso Flaco Fine Sand	0.378	0.10	0.072	0.02	16	0.5	11.46	Arenoso
Touched Silt Loam	0.465	0.13	0.016	0.03	16	0.5	64.38	Franco
Bet Netofa Clay	0.446	0.10	0.066	$5.7 \cdot 10^{-5}$	16	0.5	14.73	Arcilloso

En las siguientes figuras se ha representado con línea negra discontinua (gruesa) el frente de avance del bulbo calculado por simulación, y que se toma como referencia. Este valor promedio, se ha obtenido a través de la siguiente ecuación:

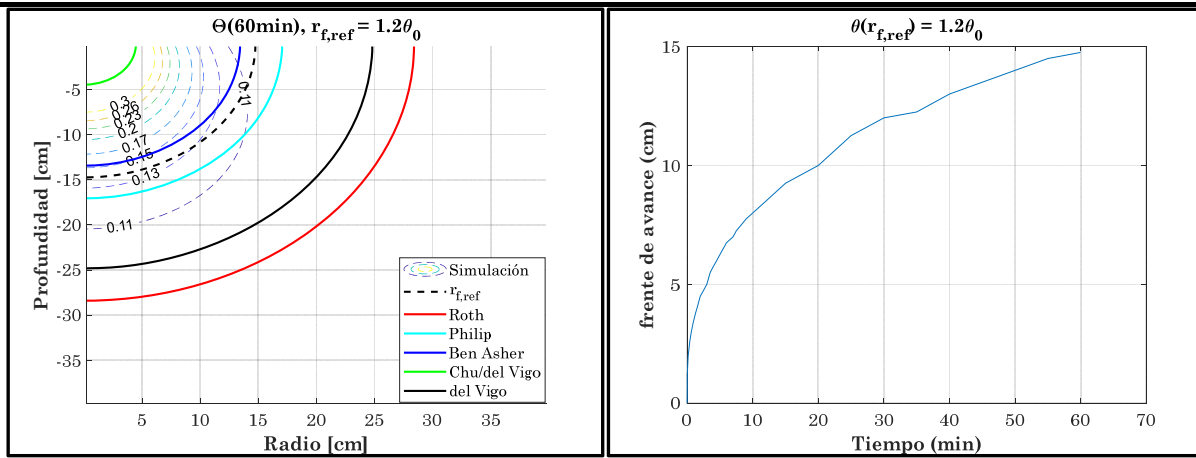
$$r_{f,ref}(t) = \frac{x_f(t) + z_f(t)}{2} \quad (15)$$

Donde  $x_f$  y  $z_f$  son los valores de distancia a la fuente sobre la horizontal y vertical, respectivamente, para los que la simulación indica que hay un contenido de humedad igual o superior al que se toma de referencia para la frontera del bulbo ( $\theta_f$ ), y que es un dato que debe ser conocido (o asumido) previamente. Este parámetro, que depende de cada suelo, es un dato necesario para la estimación del frente de avance del bulbo ( $r_f$ ) en el modelo analítico propuesto en este artículo, y también, en el modelo de Roth. Para el caso particular de la prueba que se muestra en la Figura 2, se ha asumido que, el contenido de humedad en la frontera del bulbo es de un valor igual al 50% del contenido de humedad inicial del suelo en cada instante del tiempo, es decir,  $\theta_f = 1.5 \cdot \theta_0$ . Otros valores de líneas de nivel, para el contenido de humedad, que se han obtenido por simulación se representan en esta figura con líneas discontinuas y siguiendo un diagrama de colores. El contenido de humedad medio del bulbo ( $\theta_m$ ), que es un parámetro necesario para el modelo de Philip y Ben Asher, se ha calculado promediando (en cada iteración) el contenido de humedad de los puntos interiores a la frontera  $r_{f,ref}$ . Finalmente, el resultado del modelo de Ben Asher que se muestra en esta prueba, se ha obtenido utilizando la aproximación para el contenido de humedad medio del bulbo que el autor sugiere en su artículo ( $\theta_m - \theta_0 \cong \theta_s/2$ ).

La Figura 2 muestra los resultados de simulación frente a la aproximación de los modelos analíticos para el suelo arenoso 'Oso Flaco Fine Sand', de la Tabla 2. Como muestra esta figura se observa un crecimiento del bulbo para todos los modelos a medida que avanza el tiempo. Para estas condiciones de riego y parámetros del suelo se puede ver que, para todo instante de tiempo, los modelos analíticos predicen un tamaño del bulbo según el siguiente orden: Chu - del Vigo *et al* (hipótesis de Green-Ampt), Ben Asher, Philip, modelo propuesto en este artículo, Roth. Por otro lado, se puede advertir que, el modelo de Ben Asher es el que más se aproxima al radio del bulbo que se toma como referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ) para estas condiciones de riego y suelo. Advertir también que, la estimación de los modelos de Ben Asher y Philip es muy próxima para los primeros minutos de riego, aunque luego, se van distanciando la una de la otra, como se ve en la gráfica para 30 minutos de filtración. Por su parte, se observa claramente que los modelos de Chu - del Vigo *et al* (por defecto) y Roth (por exceso) son los que peor aproximan el radio del frente mojado al valor de referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ) que se ha obtenido por simulación, para todos los patrones de filtración que muestra esta figura.



**Figura 2.** Evolución del contenido de humedad y tamaño del bulbo hasta 60 minutos de riego a caudal constante desde una fuente puntual (o cuasi-puntual) en superficie. Comparativa del frente de avance del bulbo para los cinco modelos analíticos mencionados en este artículo (líneas continuas de diferente color) frente a resultados de simulación (líneas discontinuas). En la última gráfica se representa la evolución del frente de avance de referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ) calculado por simulación. El contenido de humedad asumido sobre la frontera del bulbo es  $\theta_f = 1.5\theta_0$ . Suelo, 'Oso flaco fine sand' (Tabla 2).



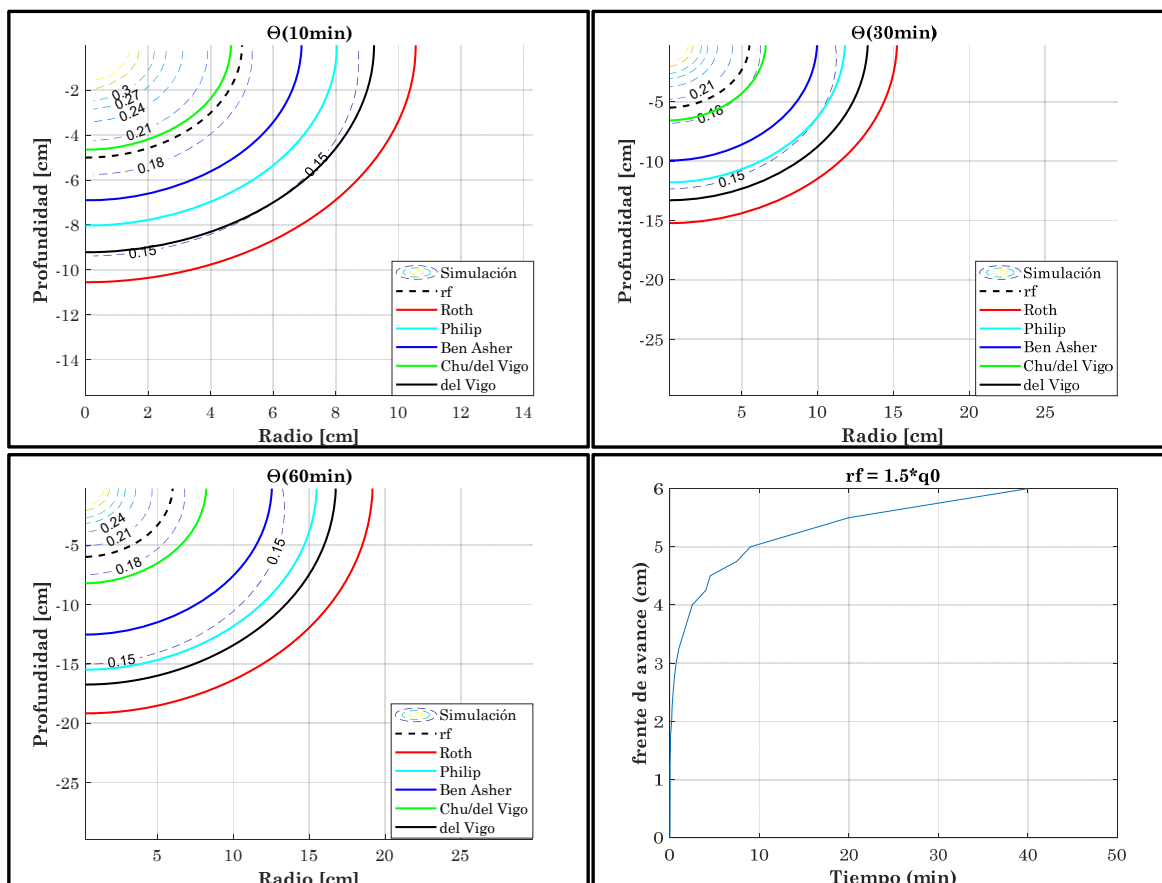
**Figura 3.** Izquierda: contenido de humedad después de 60 minutos de riego. Comparativa de los cinco modelos analíticos para el frente de avance del bulbo con los resultados de la simulación. Derecha: evolución del frente de avance de referencia calculado por la simulación. Contenido de humedad asumido para la frontera del bulbo:  $\theta_f = 1.2\theta_0$ . Suelo, 'Oso flaco fine sand' (Tabla 2).

Con objeto de valorar los modelos analíticos para otro contenido de humedad sobre la frontera del bulbo, en la Figura 3, se muestran resultados para el suelo arenoso de la Tabla 2 ('Oso Flaco Fine Sand') y el mismo caudal aplicado, después de 60 minutos de riego, pero considerando, en este caso, un contenido de humedad diferente para el frente de avance  $\theta_f = 1.2 \cdot \theta_0$ . Consecuentemente, el alcance del bulbo ( $r_{f,ref}$ ) calculado por simulación es mayor en este caso.

Se puede observar que, el frente de avance del bulbo estimado por simulación en la Figura 3, se sitúa, en este caso, entre las predicciones de los modelos de Ben Asher y Philip. Es interesante notar que, el nuevo modelo analítico propuesto, el modelo de Philip y el modelo de Roth, que están todos ellos vinculados al nuevo contenido de humedad asumido para el frente de avance, dan lugar a un radio del bulbo mayor que en el caso de la Figura 2. Por su parte, el modelo de Ben Asher, que está asociado al contenido de humedad en saturación (parámetro que no ha cambiado en esta prueba), arroja la misma predicción para el tamaño del bulbo que en el caso analizado en la figura anterior. Igualmente, el modelo implícito de Chu – del Vigo *et al* (basado en hipótesis de Green-Ampt) tampoco varía su predicción, ya que está ligada a parámetros del suelo que siguen siendo los mismos para los resultados que se muestran en esta figura.

Con objeto de probar los modelos analíticos sobre suelos de diferente textura se presenta en las siguientes dos figuras resultados de simulación (líneas discontinuas) frente a la estimación de los cinco modelos analíticos (líneas continuas), para los suelos de la Tabla 2 'Touched Silt Loam' (franco) y 'Bet Netofa Clay' (arcilloso), para el mismo caudal aplicado.

La Figura 4 muestra los resultados para el suelo franco ‘Touched Silt Loam’ asumiendo un contenido de humedad para el frente de avance de  $\theta_f = 1.5 \cdot \theta_0$ . Es interesante observar como el frente de avance de referencia ( $r_{f,ref}$ ) obtenido por simulación es menor, en todos los casos, al de la Figura 2, debido a que en esta clase textural el flujo de agua en el suelo avanza más despacio. Los modelos analíticos también cambian su predicción, debido a diferentes causas, como la variación del contenido de humedad medio (modelo de Philip), la variación del contenido de humedad en saturación (Ben Asher), cambios en el contenido de humedad inicial (Roth y modelo analítico propuesto), o cambios en otros parámetros como es la tensión en el frente (Modelos basados en la aproximación de Green-Ampt). De todos modos, el tamaño, en orden creciente, del radio que describen estos cinco modelos analíticos sigue la misma secuencia que en el caso anterior: Chu - del Vigo *et al* (hipótesis de Green-Ampt), Ben Asher, Philip, modelo propuesto en este artículo y Roth. En este caso, y debido al menor tamaño del bulbo sobre este suelo la aproximación de Chu – del Vigo *et al*, es la que mejor ajusta a los resultados de simulación. El resto de modelos sobrestiman el tamaño del bulbo para el contenido de humedad asumido en la frontera.

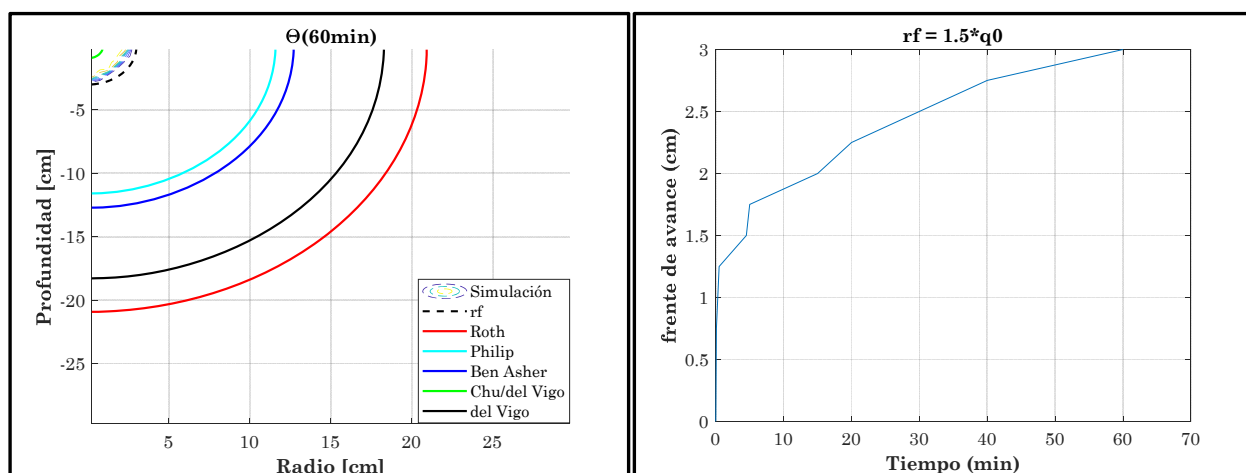


**Figura 4.** Evolución del contenido de humedad y tamaño del bulbo hasta 60 minutos de riego a caudal constante desde una fuente puntual (o cuasi-puntual) en superficie. Comparativa del frente de avance del bulbo para los cinco modelos analíticos mencionados en este artículo (líneas continuas de diferente color) frente a resultados de simulación (líneas discontinuas). En la última gráfica se representa la evolución del frente de avance de referencia ( $r_{f,ref}(t)$ ), que se ha calculado por simulación, para un contenido de humedad asumido sobre la frontera del bulbo igual a  $\theta_f = 1.5\theta_0$ . Suelo, ‘Touched Silt Loam’ (Tabla 2).

Por último, en la Figura 5 se presentan resultados de simulación (líneas discontinuas) frente a la predicción de los modelos analíticos (líneas continuas) para el suelo arcilloso, ‘Bet Netofa Clay’, de la Tabla 2. Se observa que, en este caso, el alcance del bulbo que describe la simulación después de 60min de riego es muy inferior al de los otros dos casos, debido a la textura arcillosa de este suelo. Los valores para el tamaño del bulbo que arrojan los modelos de Roth y el propuesto en este artículo son iguales a los del suelo arenoso ‘Oso Flaco’ ya que el contenido de humedad inicial de ambos suelos es el mismo según el catálogo de Mualem (1976). Por tanto, la descripción de estos dos modelos no es adecuada, ya que sobrestiman en exceso el tamaño del bulbo para este tipo de suelo.

En este caso, el radio que describe el modelo de Ben Asher es mayor que el radio del modelo de Philip. Esto es debido a que el contenido de humedad medio en el interior del bulbo, del que depende el modelo de Philip, es mayor en este suelo que en los dos anteriores. Por tanto, el orden correlativo de los radios que describen estos cinco modelos analíticos, en este caso, es: Chu - del Vigo *et al* (hipótesis de Green-Ampt), Philip, Ben Asher, modelo propuesto en este artículo y Roth. Observar que, los modelos basados en hipótesis del tipo Green-Ampt son también, en este caso, los que mejor aproximan el tamaño del bulbo dado por las simulaciones.

Hay que tener en cuenta que, las condiciones de simetría asumidas para la derivación de estos cinco modelos analíticos, pueden verse amenazadas en los suelos franco-arcillosos, debido a la acumulación de agua en la superficie. En este sentido, si el contenido en arcilla del suelo es alto, puede haber acumulación de agua en la superficie, si parte del caudal aplicado no se infiltra en el suelo. En tal caso, la cantidad de agua en el interior del bulbo es menor que la prevista por los modelos analíticos.



**Figura 5.** Izquierda: contenido de humedad después de 60 minutos de riego. Comparativa de los cinco modelos analíticos para el frente de avance del bulbo con los resultados de la simulación. Derecha: evolución del frente de avance de referencia calculado por la simulación. Contenido de humedad del frente de avance  $\theta_f = 1.2\theta_0$ . Suelo, ‘Bet Netofa Clay’ (Tabla 2).

#### 4. CONCLUSIONES

En base a las simulaciones realizadas, se concluye que, los modelos analíticos de Philip y Ben Asher son los que mejor se aproximan al radio del bulbo obtenido por simulación para el suelo de textura arenosa que se ha analizado. Sin embargo, son los dos modelos basados en hipótesis de Green-Ampt, Chu y del Vigo *et al*, los que mejor se ajustan a los resultados de simulación para los suelos franco y arcilloso, que se muestran en la Tabla 2.

Se debe tener en cuenta que, en función del contenido de humedad que sea asumido sobre la frontera del bulbo, el tamaño del mismo cambia según los modelos de Philip, Roth y el nuevo modelo propuesto en este artículo. Esta característica es una diferencia importante de estos tres modelos sobre las ecuaciones de Ben Asher (en aproximación  $\theta_m = \theta_s/2$ ) y Chu/del Vigo en las que el tamaño del bulbo es independiente de este parámetro. En este sentido, si se conoce el contenido de humedad para el frente de avance del bulbo en un suelo determinado, puede ser más razonable, el uso de las ecuaciones de Philip, Roth y el nuevo modelo propuesto, que tienen en cuenta esta propiedad. En caso contrario, cualquiera de las cinco opciones podría ser válida en función de las características del riego, suelo y filtración, aunque puede ser razonable utilizar el modelo basado en las hipótesis de Green-Ampt (Chu/del Vigo), si se prefiere evitar asumir un contenido de humedad para el frente de avance. El contenido de humedad medio en el bulbo, que es un parámetro del que dependen los modelos de Philip y Ben Asher, se puede calcular para cada instante de tiempo a partir de la ecuación (14), aunque para ello sería necesario estimar un contenido de humedad para el frente de avance.

Seguramente, un análisis más detallado del comportamiento de estos modelos para suelos propios de otros catálogos y funciones de caracterización como, por ejemplo, van Genuchten-Mualem y Clapp-Hornberger puede ser interesante para determinar cuál es el más adecuado en cada tipo textural. Principalmente, por que las funciones del tipo Gardner con las que se han caracterizado los suelos de la Tabla 2, se ha demostrado que no son las que mejor se aproximan a la realidad del suelo. Además, los parámetros del catálogo de Mualem [28] que se han utilizado en este estudio, y que proceden de medidas experimentales muy antiguas, probablemente no describen de la mejor manera posible las características de los suelos típicos que se pueden encontrar con textura arenosa, franca y/o arcillosa.

Por otro lado, hay que recordar que, estos cinco modelos analíticos son de simetría esférica, y por tanto, no tienen validez si hay acumulación de agua en la superficie del suelo. En este sentido, sobre suelos demasiado arcillosos o sometidos a un caudal aplicado excesivo, las predicciones de estos cinco modelos analíticos no deberían de ajustarse convenientemente a la realidad del fenómeno,

como muestran las divergencias obtenidas entre los modelos analíticos y resultados de simulación sobre el suelo arcilloso de la Figura 5. Del mismo modo, estos modelos analíticos no tienen en cuenta el efecto de la succión debida al campo gravitatorio. Como se puede observar en las figuras 2, 3 y 4 en las simulaciones referentes a los tiempos de riego más largos (60 min) el aspecto del bulbo es alargado respecto a la dirección vertical, aunque el caudal aplicado no es muy grande. De modo que, para tiempos largos de riego, en los que la cantidad de agua del bulbo es grande, la capacidad predictiva de estos cinco modelos también es limitada.

Sin embargo, la ventaja de los modelos analíticos contrastados respecto a otros modelos analíticos más complejos como puede ser Warrick [14] que si tiene en consideración el efecto del campo gravitatorio, es que pueden hacer predicciones para el frente de avance de forma muy simple y sin necesidad de calcular integrales impropias, o la integral asociada a la función error complementaria de Gauss, que requiere el modelo de Warrick. En este sentido, los modelos numéricos requieren incluso muchos más recursos y tiempo de computación para la integración de las ecuaciones. Aunque, seguramente, la ventaja principal de estos modelos analíticos simplificados frente a otras alternativas de cálculo para la modelización del bulbo reside en el hecho de que dependen de muy pocos parámetros del suelo, siendo, la mayoría de ellos de fácil obtención por vía experimental. Para suelos franco-arenosos en los que el caudal aplicado no sea excesivo, cualquiera de los modelos analíticos analizados en este artículo puede ser una herramienta adecuada para estimar el tamaño del bulbo en función del tiempo de riego.

## REFERENCIAS

1. Roth, R.L. Soil moisture distribution and wetting pattern from a point source. Proceedings of 2nd international drip irrigation congress. California. EEUU. 1974. 246–251.
2. Philip, J.R. Travel times from buried and surface infiltration point sources. *Water Resources Research*, 1984. Vol.20.7: 990–994.
3. Ben Asher, J.; Charach, Ch.; Zemel, A. Infiltration and water extraction from trickle source: the effective hemisphere model. *Soil Sci Soc Am J*, 1986. Vol. 50:882–887
4. Chu, S.T. Green-Ampt analysis of wetting patterns for surface emitters. *J. Irrig. Drain E*, 1994. Vol.120.2: 414–421.
5. del Vigo, Á.; Zúbelzu, S.; Juana, L. Infiltration models and soil characterization for hemispherical and disc sources based on Green-Ampt assumptions. *Journal of Hydrology*, 2021. Vol.595:1259-66. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.125966>
6. del Vigo, Á.; Zúbelzu, S.; Juana, L. Algoritmo para la resolución de la ecuación de Richards en 3-D para riego por goteo: Método, validación y resultados preliminares. XXXVII Congreso Nacional de Riegos. Don Benito. Spain. 2019a. [10.17398/AERYD.2019.A06](https://doi.org/10.17398/AERYD.2019.A06)
7. del Vigo, Á.; Zúbelzu, S.; Juana, L. Numerical routine for soil dynamics from trickle irrigation. *Applied Mathematical Modeling*, 2020. Vol.83: 371-385. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.058>
8. Darcy, H. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Dalmont, Paris. 1856.
9. Buckingham, E. Studies on the movement of soil moisture. Bull. 38. U.S. Dept.of Agr.Bureau of soils, Washington, D.C. 1907.

10. Richards, L.A. Capillary conduction of liquids in porous medium. *Journal of Applied Physics*, 1931. Vol.1:318–333.
11. Green, W.H. y Ampt G.A. Studies in soil physic I: the flow of air and water through soils. *Journal of Agricultural Science*, 1911. Vol.4:1.
12. Wooding, R.A. Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water Resources Research*, 1968. Vol.4:1259–1273.
13. Raats, P.A.C. Steady infiltration from point sources, cavities and basins. *Soil Sci. Soc. Am. Proc*, 1971. Vol.35:689–694.
14. Warrick, A.W. Time-dependent linearized infiltration: I. Point source. *Soil Sci.Soc.Amer.Proc.*, 1974. Vol.34: 383.
15. Warrick, A.W. y Lomen, D.O. 1976. Time-dependent linearized infiltration: III. Strip and disc sources. *Soil Sci.Soc.Amer.Proc.* 40:639–643.
16. Gardner, W.R. Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table. *Soil Sci*, 1958. Vol.85:228.
17. Brandt, A.; Bresler, E.; Diner, N.; Ben-Asher, J.; Heller, J.; Goldberg, D. Infiltration from trickle source: I. mathematical model. *Soil Sci Soc Am Proc*, 1971. Vol.35:675–682.
18. Šimůnek, J.; van Genuchten, M.; Šejna, M. The HYDRUS Software Package for Simulating the Two- and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media, Technical Manual Version 1.0. University of California Riverside. Riverside, CA, 3PC. Progress, Prague. Czech Republic. 2006.
19. del Vigo, Á.; Zubelzu, S.; Juana, L. Study of water infiltration in soil by Richards equations in 3D: summary and methodology validation. 11th World Congress on Water Resources and Environment. Madrid. Spain. . 2019b. [http://ewra.net/pages/EWRA2019\\_Proceedings.pdf](http://ewra.net/pages/EWRA2019_Proceedings.pdf)
20. del Vigo, Á.; Colimba, J.; Juana, L.; Rodríguez-Sinobas, L. Numerical model for the simulation of soil water flow under root-absorption conditions. Application to tomato plant crop. *Irrigation Sciences*, 2023. Vol.41: 141–154. <https://doi.org/10.1007/s00271-022-00806-x>
21. Ben Yosef, B.; Sheikholslami, M.R. Distribution of water and ions in soils irrigated and fertilized from a trickle source. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 1976. Vol.40:575-582.
22. Clothier, B.E. y Scotter, D.R. Constant-flux infiltration from a hemispherical cavity. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 1982. Vol.46:696–700.
23. Taghavi, S.A.; Marino, M.A.; Rolston D.E. Infiltration from trickle irrigation source. *J Irrig Drain Eng*, 1984 . ASCE. Vol.110(4): 331–341.
24. Neuman, S.P. Wetting front pressure head in the infiltration model of Green and Ampt. *Water Resources Research*, 1976. Vol.12:564-565.
25. Rawls, W. J.; Brakensiek, D. L.; Soni, B. Agricultural management effects on soil water process. Part I: Soil water retention and Green and Ampt infiltration parameters. *Trans. Amer. Soc. Agric. Engrs*, 1983. Vol.26(6): 1747-1752.
26. del Vigo, Á.; Zubelzu, S.; Juana, L. Soluciones analíticas aproximadas bajo hipótesis de Green-Ampt desde fuentes semiesférica y circular en superficie. *Jornadas Ingeniería del Agua (J.I.A)*. Toledo. Spain. 2019c. [https://oa.upm.es/65070/1/INVE\\_MEM\\_2019\\_324240.pdf](https://oa.upm.es/65070/1/INVE_MEM_2019_324240.pdf)
27. del Vigo, Á. Simulación del flujo del agua en el suelo en riego por goteo superficial, soluciones analíticas aproximadas, caracterización del suelo y diseño de los riegos. Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid. Madrid. 2020. <https://doi.org/10.20868/UPM.thesis.63840>
28. Mualem, Y. A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resource Journal*, 1976. Vol.12: 513.