UNIVERSIDAD DE JAÉN

FACULTAD DE CIENCIAS EXPERIMENTALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

TESIS DOCTORAL

SOBRE LA CONVERGENCIA, CASI CONVERGENCIA A-SUMABILIDAD DE OPERADORES CONSERVATIVOS

PRESENTADA POR:
FRANCISCO AGUILERA LÓPEZ

DIRIGIDA POR:
DR. D. DANIEL CÁRDENAS MORALES
DR. D. PEDRO GARRANCHO GARCÍA

JAÉN, 27 DE FEBRERO DE 2015

ISBN 978-84-8439-977-3

Prólogo

Esta memoria intenta recopilar el trabajo de investigación realizado, durante varios años, para la obtención de resultados análogos a los obtenidos por el doctor Daniel Cárdenas Morales en su tesis doctoral de 1998 sobre aproximación conservativa y teoremas de Korovkin, así como los reflejados en la tesis del doctor Pedro Garrancho García de 2004 sobre saturación local de operadores conservativos, en el ambiente de la casiconvergencia o la $\mathcal{A}$-sumabilidad.

Ha sido realizada bajo la dirección de los dos compañeros y amigos antes mencionados, el doctor Daniel Cárdenas Morales y el doctor Pedro Garrancho García. Ambos, con su tenacidad y confianza en el proyecto, no han dejado que desista en el empeño y gracias a ellos, después de tan larga gestación, nace esta tesis con la que pretendo optar al título de doctor por la Universidad de Jaén.

Además quisiera dar las gracias a Ana María Hernández Díaz que me ayudó con las traducciones de muchos de los trabajos estudiados en los comienzos, siempre tan difíciles, de este trabajo de investigación.

Hablando de aproximación debo, sin duda, recordar a las tres personas que están más cerca de mi, Rosa mi esposa y mis hijos Paco y María. Ellos, pilares y motor de mi vida, han contribuido con su apoyo, sus críticas y comprensión a que haya podido llegar este momento. Gracias por esto y más aún por todo lo demás.

También quiero recordar a mis padres que no me quitaron, en su día, la maravillosa idea de estudiar Matemáticas.

Jaén, enero de 2015 — Francisco Aguilera López

Índice general

Capítulo 1

Estado de la cuestión

1.1. Antecedentes, introducción histórica

El presente trabajo se enmarca dentro del ambiente general de la teoría de aproximación mediante sucesiones de operadores lineales. Se puede considerar que esta fue iniciada en 1913 por Bernstein en su demostración sobre el problema de Weiertrass para aproximar una función continua mediante polinomios. Además, pondremos énfasis en el campo de la aproximación simultánea, donde los objetos a aproximar no son sólo las funciones sino también sus derivadas.

Aquí consideraremos que un operador L es una aplicación entre dos espacios de funciones, que a su vez llamaremos lineal si, siempre que en su dominio estén dos funciones f y g, entonces también deben estar $\alpha f + \beta g$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y además se debe verificar que $L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g)$. Por otra parte, diremos que L es positivo si $f \geq 0$ implica que $L(f) \geq 0$.

Clásicamente, el primero de los tópicos a abordar en este ambiente es el de la convergencia del proceso que queda definido tras considerar una sucesión de operadores lineales. Un enunciado esencial para nuestros objetivos nos ayuda a contextualizar y a fijar ideas. Se trata del muy conocido resultado de Korovkin de 1953, que establece cómo las funciones 1, x y x^2 constituyen lo que con terminología propia de este campo se denomina un conjunto de funciones test para la convergencia de sucesiones de operadores lineales positivos definidos en el espacio $C(X)$ de las funciones continuas sobre el intervalo compacto X. Se detalla en el resultado siguiente. En él y a lo largo de esta memoria, salvo indicación expresa, $\|\cdot\|$ denota la norma uniforme y $e_i(t) = t^i$. También, al escribir la imagen de una función por un operador, cuando no haya confusión prescindiremos del paréntesis, es decir $L(f) = Lf$. La convergencia de una sucesión f_n hacia su límite f siempre se entenderá cuando el índice n tiende a $+\infty$, y se resumirá escribiendo $f_n \to f$.

Teorema 1.1 *Sea X un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y sea K_n una sucesión de operadores lineales positivos definidos en $C(X)$. Si $\|K_n e_i - e_i\| \to 0$ para todo $i \in \{0, 1, 2\}$, entonces*

$$\|K_n f - f\| \to 0 \text{ para toda función } f \in C(X).$$

Si bien existen muchas generalizaciones de este resultado, con la idea de ir perfilando más los objetivos del presente trabajo, mostramos una de Cárdenas-Morales y Muñoz-Delgado [54, 55], ya en el seno de la aproximación simultánea por la que nos interesamos y con hipótesis sobre conservación de la forma más generales que la mera positividad de los operadores.

Lo enunciamos dentro del marco general en el que fue establecido, aunque éste comprende más situaciones que aquellas de las que nos ocuparemos en esta memoria. Consideramos ahora el espacio $\mathbb{R}^X$ de las funciones reales definidas sobre un compacto X de $\mathbb{R}^m$. Obviamente, denotamos también mediante $C(X)$ el subespacio de las funciones continuas, y hacemos uso de conos para manejar las propiedades de forma. Al respecto conviene recordar que un conjunto C es un cono si para cada $f \in C$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, se tiene que $\alpha f \in C$.

Teorema 1.2 *Sea $B \subset \mathbb{R}^X$, A un subespacio de $C(X)$ con $A \subseteq B$ y sea L un operador lineal tal que $L(A) \subset C(X)$. Finalmente, sea C un cono de A, sea $P = \{f \in B : Lf \geq 0\}$ y sea V un subespacio de A verificando las siguientes propiedades:*

(v1) $\exists u \in V : Lu(x) = 1 \ \forall x \in X$,

(v2) $\forall z \in X$, $\exists \varphi_z \in V \cap C$ *tal que*

a) $L\varphi_z(z) = 0 < L\varphi_z(x)\ \forall x \in X \setminus \{z\}$,

b) $\forall f \in A$, $\exists \alpha = \alpha(f) > 0$: $\beta \geq \alpha \Rightarrow \beta\varphi_z + f \in C$.

Sea $K_n : A \to B$ *una sucesión de operadores lineales con las siguientes propiedades:*

(k1) $K_n(P \cap C) \subset P\ \forall n \geq 1$,

(k2) $L(K_n f)$ *converge uniformemente a* Lf *para cualquier* $f \in V$.

Entonces $L(K_n f)$ *converge uniformemente a* Lf *para cualquier* $f \in A$.

Un poco más adelante analizaremos algunas hipótesis del resultado anterior. Ahora detallamos algunos otros enunciados que también nos sirvieron de base para comenzar a trabajar en este proyecto y que nos mostraban la conveniencia de estudiar además versiones cuantitativas de los resultados antes referidos. Aparecerá el llamado primer módulo de continuidad, definido para una función $f \in C(X)$ mediante

$$\omega(f, \delta) = sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X, |x - y| < \delta\},$$

donde $|\cdot|$ denota la norma euclídea de $\mathbb{R}^m$. También haremos uso de los polinomios $e_i^x(t) = (t - x)^i$.

En 1968 Shisha y Mond [60] daban un resultado cuantitativo sobre el error cometido al aproximar funciones continuas. Este resultado, versión cuantitativa del teorema de Korovkin, es el siguiente:

Teorema 1.3 *Sea* X *un intervalo compacto de* $\mathbb{R}$ *y* K_n *una sucesión de operadores lineales positivos definidos en* $C(X)$. *Suponemos que la función* $K_n e_0$ *está acotada para todo* $n \in \mathbb{N}$.
Entonces se tiene que para toda función $f \in C(X)$, *y para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - K_n f\| \leq \|f\| \cdot \|K_n e_0 - e_0\| + \|K_n e_0 + e_0\| \cdot \omega(f, \mu_n),$$

donde $\mu_n^2 = \sup_{x \in X}\{K_n e_2^x(x)\}$.

Posteriormente, en 1971, E. Censor en [20] daba una generalización de este teorema al caso n-dimensional y mejoraba estas acotaciones imponiendo más suavidad a las funciones, es decir suponiendo su pertenencia a $C^1(X)$ o a $C^2(X)$, espacios de las funciones con derivadas continuas, primera y segunda respectivamente. Estos resultados vienen reflejados en el siguiente teorema.

Teorema 1.4 *Sea X un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, K_n una sucesión de operadores lineales positivos definidos en $C(X)$. Suponemos que K_ne_0 está acotado para todo $n \in \mathbb{N}$.*
Entonces se tiene que para toda función $f \in C^1(X)$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f - K_nf\| \leq \|f\| \cdot \|K_ne_0 - e_0\| + C_n \cdot \mu_n\|f'\| + C_n \cdot \mu_n \cdot \omega(f', \mu_n),$$

donde $C_n = 1 + \|K_ne_0\|^{1/2}$ y $\mu_n^2 = \sup_{x\in X}\{K_ne_2^x(x)\}$.
Si además $f \in C^2(X)$, entonces

$$\|f - K_nf\| \leq \|f\| \cdot \|K_ne_0 - e_0\| + C_n \cdot \mu_n \cdot (\|f'\| + \mu_n \cdot \|f''\|).$$

Con posterioridad, D. Cárdenas-Morales y F. J. Muñoz-Delgado [18] extienden estos resultados cuantitativos con el siguiente teorema.

Teorema 1.5 *Sea X un subconjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^m$, B un subespacio de $\mathbb{R}^X$ y $A \subseteq B$ un subespacio de $C(X)$. Sea $L : B \to \mathbb{R}^X$ un operador lineal tal que $L(A) \subseteq C(X)$. Finalmente, sea C un cono en A y $P = \{f \in B : Lf \geq 0\}$.*
Suponemos que:
(v1) $\exists u \in A : Lu(x) = 1\ \forall x \in X$,
(v2) $\forall z \in X, \exists \varphi_z \in C$ *verificando*
a) $L\varphi_z(z) = 0$,
b) $\exists M, \lambda \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\lambda \geq 1$*:* $L\varphi_z(x) \geq M\,|x - z|^\lambda, \forall x, z \in X$,
c) $\forall f \in A, \exists \alpha_f > 0 : \alpha \geq \alpha_f \implies \alpha\varphi_z + f + \gamma\,\|Lf\|\,u \in C$ *para* $z \in X$ *y* $\gamma \in [-1, 3]$.
Sea $K_n : A \to B$ una sucesión de operadores lineales tales que para todo $n \in \mathbb{N}$,
(k1) $K_n(P \cap C) \subseteq P$,
(k2) LK_nu *es acotada y* $\mu_n^\lambda = \sup_{z\in X}\{LK_n\varphi_z(z)\} < \infty$.
Sea $H > 0$ y $f \in A$. Entonces

$$\|Lf - LK_nf\| \leq \|LK_nu\| \cdot \omega(Lf, H\mu_n) + N + \|Lf\| \cdot \|LK_nu - 1\|,$$

donde $N = max\left\{\frac{\omega(Lf, H\mu_n)}{MH^\lambda}, \mu_n^\lambda \alpha_f\right\}$.

Este resultado engloba el Teorema 1.3 (basta tomar L como el operador identidad, $A = C = C(X)$, $u = e_0$ y $\varphi_z = e_2^z$). Además resulta ser una versión cuantitativa del Teorema 1.2.

Hablando en general, una de las cosas que pretende mostrar esta memoria es que resultados como los anteriores, extensiones de los enunciados pioneros de Korovkin y de Shisha y Mond, se mantienen válidos al considerar nociones de convergencia distintas de la habitual, y manteniendo hipótesis generales de conservación de la forma.

A propósito de esto último es preciso detenerse, fijar ideas e ir acotando el terrero en el que nos moveremos. Nos apoyamos en el Teorema 1.2 y en el Teorema 1.5 prestando atención sobre todo a la hipótesis (k1) y llamando la atención sobre los casos particulares que, casi en exclusiva, nos preocuparán. Pretendemos cimentar lo que se entiende por trabajar en el ámbito de la aproximación simultánea con propiedades conservativas más generales que la positividad. Si L es el operador identidad y $A = C$, entonces se está estudiando la aproximación de $K_n f$ hacia la función f asumiendo simplemente la positividad de los operadores. Si $X \subset \mathbb{R}$, $A = B = C^m(X)$ y $L = D^m$, siendo D^m el operador clásico de derivación de orden m, entonces estamos aproximando la derivada m-ésima de f mediante la sucesión $D^m K_n f$; además P sería el subconjunto de $C^m(X)$ formado por las funciones m-convexas, esto es, aquéllas cuya derivada de orden m es no negativa. Si además el cono C coincide con A, estaríamos suponiendo que los operadores K_n son m-convexos, es decir, que transforman funciones m-convexas en funciones m-convexas. Por otro lado, la consideración de hipótesis en las que $C \neq A$ permitirían trabajar con propiedades de forma en las que pudieran estar implicadas derivadas de varios órdenes. Finalmente, está la posibilidad de considerar conos que no tengan nada que ver con la conservación del signo de determinadas derivadas de las funciones.

Podría ser éste el momento adecuado para presentar ya aquéllas nociones de convergencia distintas de la clásica, a las que antes hicimos referencia y bajo las cuales probaremos nuevos resultados. No obstante, lo dejamos para una sección independiente. Ahora, tratamos de introducir otros logros que se consiguen con el presente trabajo, que no serán otra cosa que extensiones de resultados que tratan otro tópico clásico en el estudio de la teoría de aproximación mediante operadores lineales. Nos referimos al estudio de la bondad de las estimaciones que alcanzan con los resultados cuantitativos, y en este camino encontramos la saturación, es decir, la búsqueda de la familia de funciones para las que se optimiza la velocidad de convergencia de los procesos estudiados. Un paso previo, también natural, consiste en el establecimiento de fórmulas asintóticas.

Uno de los primeros resultados dentro de este tópico fue el dado en 1932 por Voronovskaya [68] para los clásicos operadores de Bernstein,

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \; f \in C[0,1], \; x \in [0,1],$$

a saber,

Teorema 1.6 *Si f es una función acotada en $[0,1]$, derivable en un entorno de $x \in [0,1]$, y tiene segunda derivada en ese punto, entonces*

$$\lim_{n\to+\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Si $f \in C^2[0,1]$, la convergencia es uniforme.

El resultado informa que la velocidad de convergencia de $B_n f$ a f está limitada por $1/n$, salvo que $f''(x) = 0$. Así pone de manifiesto una velocidad que en cierto sentido es la óptima.

En aproximación simultánea encontramos el trabajo [14], donde se obtiene la siguiente generalización de la fórmula asintótica anterior:

Teorema 1.7 *Sea $L_n : C^k[a,b] \longrightarrow C^k[c,d]$, con $[c,d] \subset [a,b]$, una sucesión de operadores lineales k-convexos y sea $x \in [c,d]$. Asumamos que*

a) existe una sucesión divergente de números reales positivos λ_n y una función $p = p(t)$, k-veces derivable y positiva en (a,b), tal que para cada $i \in \{0,1,...,k+2\}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n (D^k L_n e_i^x(x) - D^k e_i^x(x)) = D^k(pD^2 e_i^x)(x),$$

b)

$$D^k L_n e_{k+4}^x(x) = o(\lambda_n^{-1}).$$

Entonces se tiene que para toda función $f \in C^k[a,b]$, $k+2$-veces derivable en un entorno de x,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n(D^k L_n f(x) - D^k f(x)) = D^k(pD^2 f)(x).$$

Retornando al marco primario, otro resultado que ilustra ya el esfuerzo por encontrar la llamada clase de saturación es el obtenido por Lorentz en 1963 [45], también para los operadores de Bernstein, que a continuación detallamos. En él aparece un espacio de funciones lipschitzianas, al que nos referimos con el uso de la siguiente notación frecuente:

$$f \in \mathrm{Lip}_M\alpha \text{ en } X \;\Leftrightarrow\; |f(x) - f(y)| \le M|x-y|^\alpha,\; x, y \in X.$$

Teorema 1.8 *Sea $f \in C[0,1]$. Entonces*

$$|B_n f(x) - f(x)| \le \frac{Mx(1-x)}{2n} + o(1/n),\; 0 \le x \le 1,\; n = 1, 2, ...$$

si y sólo si f' existe y pertenece a $Lip_M 1$ en $[0,1]$.

Más allá de los operadores de Bernstein, debemos mencionar un par de trabajos destacados de 1972, de Lorentz y Schumaker [46] por un lado, y de Berens [9] por otro, referentes en el campo de la saturación de sucesiones de operadores lineales positivos. Y, siguiendo el mismo patrón usado en páginas anteriores, encontramos los trabajos [13] y [34], donde respectivamente se trasladan los resultados al ambiente de la aproximación simultánea. Dejamos algunos a modo de ilustración. Se trata de situaciones particulares (de aplicación a los operadores de Bernstein), pero ayudan a entender el tipo de enunciados a los que nos estamos refiriendo. De hecho, en aquellos artículos fueron meros corolarios.

Teorema 1.9 *Sean $0 < a < b < 1$. Entonces para $k \in \mathbb{N}$ y $f \in C^k[0,1]$,*

$$2n\left|D^k B_n f(x) - D^k f(x)\right| \le M\frac{1}{(1-x)^{k-1}} + o(1),\; x \in (a,b),$$

si y sólo si

$$(e_1 - e_2)^k\left(\frac{1}{e_{k-1}}D^{k+1}f + \frac{k-1}{e_k}D^k f\right) \in Lip_M 1 \text{ on } (a,b).$$

Teorema 1.10 *Sean* $0 < a < b < 1$, $f \in C^k[0,1]$, $k \in \mathbb{N}$ *y sea* ψ *una función finito valuada integrable Lebesgue en* (a, b).

Si para cada $x \in (a, b)$

$$\liminf_{n\to\infty} 2nD^k(B_n f - f)(x) \le \psi(x) \le \limsup_{n\to\infty} 2nD^k(B_n f - f)(x),$$

entonces, para casi todo $t \in (a, b)$

$$\psi(t) = t(1-t)D^{k+2}f(t) + k(1-2t)D^{k+1}f(t) - k(k-1)D^k f(t).$$

Es momento de presentar las nuevas nociones de convergencia ya anunciadas y de mostrar su traslado al campo de la teoría de aproximación.

1.2. Sobre casi convergencia y sumabilidad matricial en teoría de aproximación

En 1948 Lorentz [44] introduce, la casi convergencia, y demuestra que es equivalente al siguiente enunciado que ahora nosotros, por comodidad, consideraremos como definición, evitando así la introducción de nuevos elementos matemáticos que de alguna manera nos apartarían de nuestros objetivos.

Definición 1.1 *Una sucesión de números reales* x_j *se dice casi convergente a* ℓ *y se simboliza* $x_j \rightharpoondown \ell$ *si*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} x_j = \ell \qquad uniformemente\ en\ n.$$

Unos veinte años más tarde, esta nueva noción fue trasladada a la teoría de aproximación. El resultado seminal fue dado por King y Swetits en [40]; en él manejaron sucesiones de operadores del tipo

$$L_i f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}(x) f(x_{ij}),\ i = 1, 2, \ldots$$

relacionadas en muchos casos con interesantes matrices de sumabilidad $(a_{ij}(x))$, $i, j = 1, 2, \ldots$, y pusieron de manifiesto cierta conexión entre las propiedades de convergencia y ciertas propiedades de regularidad de aquellas matrices (doblemente) infinitas. Recordamos ahora algunos de estos conceptos, que más adelante nos harán falta en un contexto distinto.

Definición 1.2 *Consideramos una matriz infinita de números reales*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Con cada sucesión x_j asociamos otra, llamada su A-transformada, cuyos elementos están dados mediante

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

siempre que las series converjan para todo k.

Si esta última converge hacia un límite ℓ, entonces se dice que la sucesión x_j es A-sumable hacia ℓ.

Respecto de la regularidad arriba mencionada dejamos anotada una definición y el Teorema 1.11, que resulta ser una caracterización muy popular conocida como Teorema de Silverman-Toeplitz, que lleva el nombre de los matemáticos que lo probaron de forma independiente a comienzos del siglo XX.

Definición 1.3 *Una matriz infinita A se dice regular si la convergencia de una sucesión x hacia su límite ℓ implica la convergencia también hacia ℓ de su A-transformada.*

Teorema 1.11 *Una matriz infinita $A = (a_{kj})$ es regular si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:*

a) $\sup_k \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| < \infty$, *b)* $\lim_{k\to\infty} a_{kj} = 0$ *para cada* $j \in \mathbb{N}$,

c) $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} = 1$.

Más adelante ampliaremos la información sobre sumabilidad, cuando la situemos en el lugar que va a ocupar en esta memoria.

En este momento, lo que ahora nos interesa del trabajo referido de King y Swetits es que allí se obtuvo el siguiente resultado semejante al de Korovkin pero para la casi convergencia:

Teorema 1.12 *Sea* K_j *una sucesión de operadores lineales positivos definidos sobre el espacio* $C[a,b]$*. Entonces* $K_j f \rightharpoondown f \quad \forall f \in C[a,b]$ *si y solo si* $K_j e_i \rightharpoondown e_i \ \forall i \in \{0,1,2\}$.

Al hilo de este resultado aparecen otros con posterioridad, que estiman el error de aproximación en la casi convergencia. Surge así el siguiente trabajo de Mohapatra [50], que requiere la consideración de una nueva norma.

A una sucesión de operadores lineales $K_j : C(X) \to C(X)$, a una función $f \in C(X)$, y a un entero no negativo k, se le asocia la sucesión de funciones $t_k f$, cuyos términos están dados mediante

$$t_k^n f = \frac{1}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} K_j f, \ n = 1, 2, \ldots$$

Se define su norma, que se denota igual que la norma uniforme a la que extiende, de la siguiente manera:

$$\|t_k f\| = \sup_n \sup_{x \in X} |t_k^n f(x)|.$$

Con esta terminología, la sucesión $K_j f$ es casi convergente a $g \in C(X)$, uniformemente en X, si y sólo si $\|t_k f - g\|$ tiende a 0 cuando k tiende a infinito.

Teorema 1.13 *Sea K_j una sucesión de operadores lineales positivos definidos en $C[a,b]$ y $f \in C[a,b]$. Supongamos que $t_k^n e_0$ está uniformemente acotado en $[a,b]$ para cada k, uniformemente en n. Entonces se tiene que*

$$\|f - t_k f\| \leq \|f\| \cdot \|t_k e_0 - 1\| + \|t_k e_0 + 1\| \cdot \omega(f, \mu_k),$$

donde $\mu_k^2 = \sup_{x\in[a,b]} |t_k e_2^x(x)|$.

Es también Mohapatra quién obtendrá en [50] resultados para la casi convergencia análogos a los obtenidos por Censor para la convergencia:

Teorema 1.14 *Bajo las condiciones del Teorema 1.13, si $f \in C^1[a,b]$ se tiene que*

$$\|f - t_k f\| \leq \|f\| \cdot \|t_k e_0 - 1\| + \|f'\| \cdot \|t_k e_0\| \cdot \omega(f', \mu_k) + \omega(f', \mu_k)(1 + \|t_k e_0\|).$$

Si además $f \in C^2[a,b]$,

$$\|f - t_k f\| \leq \|f\| \cdot \|t_k e_0 - 1\| + \mu_k \cdot \|t_k e_0 + 1\|(\|f'\| + \mu_k \cdot \|f''\|).$$

El salto al ambiente simultáneo se produjo años más tarde en un trabajo de Hernández-Guerra y Cárdenas-Morales [36], donde se probó un resultado cualitativo de tipo Korovkin análogo al Teorema 1.2. Yace aquí uno de los puntos de arranque de esta tesis, a saber, la búsqueda de la versión cuantitativa correspondiente.

Ya en 1973, pocos años más tarde de que King y Swetits trasladaran la casi convergencia de Lorentz a la teoría de aproximación, Bell [8] la relacionó con el siguiente concepto de sumabilidad matricial, más general que el clásico, antes recordado en la Definición 1.2:

Definición 1.4 *Sea $A^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de matrices infinitas con $A^{(n)} = (a_{k,j}^{(n)})$ y $a_{k,j}^{(n)} \geq 0$ para $n, k, j = 1, 2, \ldots$. Se dice que la sucesión x_j es $A^{(n)}$–sumable a ℓ si*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{k,j}^{(n)} x_j = \ell$$

uniformemente en n, siempre que las series dadas sean convergentes para todo k y todo n.

Esta nueva concepción de la sumabilidad matricial permitía la unificación de convergencia y casi convergencia de sucesiones en general. Ciertamente, si tomamos

$$a_{k,j}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{k}, & n \leq j < k+n; \\ \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

es decir

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ A^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \ldots$$

entonces la $A^{(n)}$–sumabilidad coincide con la casi convergencia.

Por otro lado, si tomamos $A^{(n)}$ como la matriz identidad para todo n, es decir, $a_{k,j}^{(n)} = \delta_{kj}$ siendo δ_{kj} la delta de Kronecker, entonces la $A^{(n)}$–sumabilidad coincide con la convergencia. Es interesante hacer notar que en ambos casos las matrices que definen los dos métodos son matrices regulares.

También hemos de observar, y no con menos importancia, que si para alguna matriz A, $A^{(n)} = A$ para todo n, entonces la $A^{(n)}$–sumabilidad coincide con la clásica sumabilidad matricial mediante A, y si además A es triangular inferior y sus entradas son $a_{kj} = 1/k$, entonces la $A^{(n)}$–sumabilidad se reduce a la sumabilidad en el sentido de Cesàro, también llamada $(C,1)$ sumabilidad, que no es otra cosa que la clásica convergencia en media introducida por Cauchy a comienzos del siglo XIX.

Merece la pena dejar algunas notas históricas que informan del origen de la teoría de sumabilidad y de la importancia que adquirió en su momento, quizá para justificar que aún hoy en día sigue siendo materia de estudio intensivo.

Ese origen hay que buscarlo en G. W. Leibniz (1646-1716), quien propuso que si se tuviera que asignar un valor a la suma de la serie $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$, ese valor debía ser 1/2. El asunto despertó debates durante el siglo XVIII, hasta que a comienzos del XIX N. H. Abel (1802-1829) y A. L. Cauchy (1789-1857) introdujeron respectivamente la que ahora conocemos como convergencia en el sentido de Abel (que no detallamos) y la convergencia en media que acabamos de recordar. Que esta última lleve el nombre de A. Cesàro (1859-1906) se debe a un artículo suyo de 1890 donde probó que el producto de Cauchy de dos series convergentes, converge en media al producto de las sumas. Ese resultado, junto con el conocido teorema de L. Fejér (1880-1959), sobre la convergencia en media de las series de Fourier, son probablemente los mayores responsables de que desde entonces se pusiera atención a la teoría de sumabilidad, esto es, al estudio de procesos que permiten asignar límites a sucesiones (usualmente definidas mediante series) no convergentes.

De vuelta con lo que nos ocupa, fue Swetits [67] quien dejó constancia del trasladado de resultados cuantitativos de tipo Korovkin en este ambiente de la $A^{(n)}$–sumabilidad. Consideró para ello una sucesión L_j de operadores lineales positivos de $C[a,b]$ en $C[a,b]$, una sucesión $A^{(n)}$ de matrices infinitas con entradas no negativas, y definió, para $f \in C[a,b]$ y $k, n = 1, 2, \ldots,$

$$A_k^{(n)}(f,x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j f(x)$$

y

$$\|A_k f\| = \sup_n \sup_{x\in[a,b]} |A_k^{(n)}(f,x)|.$$

Con ello probó el siguiente resultado, que engloba el Teorema 1.3 y el Teorema 1.13:

Teorema 1.15 *Sea L_j una sucesión de operadores lineales positivos de $C[a,b]$ en $C[a,b]$ y sea $A^{(n)}$ una sucesión de matrices infinitas con términos no negativos. Suponemos que $\|A_k e_0\| < \infty$.*

Entonces $\forall f \in C[a,b]$ *y* $k = 1, 2, \ldots,$

$$\|f - A_k f\| \leq \|f\| \cdot \|A_k e_0 - e_0\| + \|A_k e_0 + e_0\| \cdot \omega(f, \mu_k),$$

donde $\mu_k^2 = \|A_k e_2^x\|$

Algunos refinamientos posteriores en los casos en que $f \in C^1(X)$ y $f \in C^2(X)$ fueron establecidos en [63] y [64], si bien debemos mencionar que Singh [62] lo había hecho algo antes aunque en el ambiente exclusivo de la casi convergencia.

Lo anterior nos hizo ser algo más ambiciosos en el susodicho arranque de esta tesis: trataríamos de establecer la versión cuantitativa del teorema probado en [36] –resultado cualitativo de tipo Korovkin, bajo casi convergencia, análogo al Teorema 1.2– pero habríamos de hacerlo bajo la noción de sumabilidad matricial general.

Esto se consiguió y se publicó en 2008, y más tarde, en 2011 y en 2013, se publicaron los resultados que naturalmente formaron parte de nuestra tarea posterior de completar el estudio con resultados sobre fórmulas asintóticas y de saturación, todo ello componiendo el corpus de la memoria que en los capítulos siguientes se desarrolla.

Más allá del consabido progreso de conocimiento que suele atribuirse a cualquier nuevo resultado, debemos apuntar alguna de las bondades de trasladar distintas nociones de convergencia al campo de la teoría de aproximación.

La mayoría de las sucesiones de operadores lineales clásicos tienden a converger al valor de la función que se está aproximando. Más aún, en puntos de discontinuidad, con frecuencia convergen a una media entre los límites laterales. Hay, sin embargo, algunas pocas excepciones destacadas, como la que representan los operadores de interpolación de Hermite-Fejér (véase por ejemplo [10]). Estos operadores no convergen en puntos donde hay discontinuidades simples, y ahí, los métodos de sumabilidad de tipo Cesàro se muestran suficientes para corregir ese comportamiento (véase [11]).

Por otra parte, esos métodos también resultan efectivos para corregir el conocido fenómeno de Gibbs que presentan algunos operadores de aproximación no positivos. Entre ellos, por su relevancia, y porque le dedicaremos un pequeño espacio en esta memoria, se encuentran las sumas parciales de las series de Fourier. Detallamos ahora algunos aspectos básicos.

Entre las funciones reales continuas periódicas de periodo 2π, éstas son, las del espacio usualmente denotado mediante $C(\mathbb{T})$, ($\mathbb{T}$ puede verse simplemente como $\mathbb{R}$ con la identificación de puntos módulo 2π) destacan los polinomios trigonométricos de un determinado grado n, que responden a expresiones del tipo

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x).$$

Dada una función $f \in L_1(\mathbb{T})$, integrable en $\mathbb{T}$, su serie de Fourier está dada mediante

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

donde los coeficientes a_ν y b_ν responden a las fórmulas

$$a_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \nu t \; dt, \quad b_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} \nu t \; dt.$$

Su sucesión de sumas parciales,

$$S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \operatorname{sen} \nu x),$$

admite la expresión $S_n(f; x) = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, donde

$$u_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(t) \; dt, \quad u_\nu = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \nu (x - t) \; dt, \;\; \nu = 1, 2, \ldots$$

y también esta otra,

$$S_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x - t) \; dt,$$

donde $D_n(\alpha)$ es el conocido núcleo de Dirichlet dado por

$$D_n(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{2 \operatorname{sen}(\alpha/2)}, & \alpha \neq 2m\pi; \\ \\ n + \frac{1}{2}, & \alpha = 2m\pi. \end{cases}$$

Para $f \in C(\mathbb{T})$, la sucesión $S_n(f;x)$ no converge en general, pero sí lo hace en el sentido de Cesàro, de acuerdo con el teorema de Fejér al que más arriba aludimos. Es decir, que $S_n(f;x)$ es $(C,1)$-sumable, siendo

$$(C,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

o equivalentemente, que sí que converge la sucesión

$$\tau_n(f;x) = \frac{S_0(f;x) + S_1(f;x) + \cdots + S_{n-1}(f;x)}{n}.$$

Cerramos esta introducción detallando los artículos de investigación que antes referimos, y avanzando los títulos de los capítulos venideros. Existe una correspondencia entre unos y otros, de lo que también queremos dejar constancia. Es más, a pesar de poder caer en la reiteración, hemos creído conveniente redactar los capítulos de forma casi auto contenida:

Capítulo 2. Resultados cuantitativos.

> F. Aguilera, D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, J. M. Hernández, Quantitative results in conservative approximation via summability, Automat. Comput. Appl. Math. 17(2) (2008) 201–208.

Capítulo 3. Fórmulas asintóticas.

> P. Garrancho, D. Cárdenas-Morales, F. Aguilera, On asymptotic formulae via summability, Math. Comput. Simulat. 81 (2011) 2174–2180.

Capítulo 4. Resultados de saturación.

> F. Aguilera, D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, Optimal simultaneous approximation via A-summability, Abs. Appl. Anal. 2013, Article ID 824058, 12 p.

Dedicamos un último capítulo a mostrar de forma somera una nueva línea de trabajo que podría explorarse en el seno de la aproximación conservativa mediante sucesiones de operadores lineales. Se trata, grosso modo, de proceder como se hizo en esta memoria pero combinando la sumabilidad matricial con la denominada convergencia estadística, otro método de sumabilidad (no matricial) que resulta también efectivo para asignar límites a sucesiones no convergentes que pueden tener subsucesiones no acotadas.

Capítulo 2

Resultados cuantitativos

2.1. Introducción

A lo largo del capítulo consideramos el espacio $C(X)$ de las funciones reales continuas definidas en X, siendo X bien un intervalo real $[a, b]$, bien $\mathbb{T}$, que, como se apuntó en la introducción, podemos ver como $\mathbb{R}$ con la identificación de puntos módulo 2π.

Cuando $X = [a, b]$ consideramos la métrica habitual $d(x, y) = |x - y|$, y cuando $X = \mathbb{T}$ consideramos esta otra, que denotamos de la misma forma puesto que no surgirá confusión alguna:

$$d(x, y) = \min\{|x - y|, 2\pi - |x - y|\}.$$

Como es natural, en este caso, para $f \in C(X)$, $\|f\|$ y $\omega(f, t)$ denotarán respectivamente la norma del supremo y el primer módulo de continuidad, que volvemos a recordar a continuación:

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in X\} = \max\{|f(x)| : x \in X\},$$

$$\omega(f, t) := \sup\{|f(x) - f(y)| : d(x - y) \leq t,\ x, y \in X\}, \quad t \geq 0.$$

Ahora recuperamos la Definición 1.4, con un ligero retoque en la notación, que facilitará el manejo de los procesos de aproximación que pretendemos estudiar.

Llamemos $\mathcal{A}$ a la sucesión de matrices infinitas $A^{(n)} = (a_{k,j}^{(n)})$, $n = 1, 2, \ldots$ con $a_{k,j}^{(n)} \geq 0$ para $n, k, j = 1, 2, \ldots$.

Obviamente, diremos que una sucesión x_j es $\mathcal{A}$-summable a ℓ si

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} x_j = \ell$$

uniformemente en n.

Consideramos ahora una sucesión $\mathcal{L}$ de operadores lineales

$$L_j : C(X) \to C(X),\ \ j = 1, 2, \ldots,$$

y, para cada $f \in C(X)$, consideramos también la sucesión doble

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k,n} f := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} L_j f, \quad k, n = 1, 2, \ldots,$$

siempre que las series converjan.

Nos centramos ahora en el proceso de aproximación de $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k,n} f$ hacia f cuando $k \to \infty$, uniformemente en X y uniformemente para $n = 1, 2, \ldots$ La convergencia del proceso equivale a la $\mathcal{A}$–sumabilidad de $L_j f$ hacia f uniformemente en X. De forma equivalente, podemos redactar lo anterior en términos de una norma. Ciertamente, si llamamos $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k} f$ a la sucesión cuyos elementos están dados por $\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k,n} f$, $n = 1, 2, \ldots$, entonces podemos considerar la norma

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k} f\| = \sup_{n} \sup_{x\in X} \left|\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k,n} f(x)\right|.$$

De esta manera $L_j f$ es $\mathcal{A}$–sumable hacia f uniformemente en X, si y solamente si

$$\sup_{n} \sup_{x\in X} |\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k,n} f(x) - f(x)| \to 0 \text{ cuando k} \to \infty,$$

que equivale al hecho de que

$$\|\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k} f - f\| \to 0 \text{ cuando k} \to \infty.$$

Recordemos ahora que si $A^{(n)} = I$ para $n = 1, 2, \ldots,$ entonces la $\mathcal{A}$–sumabilidad es simplemente la convergencia usual, y si $a_{kj}^{(n)} = 1/k$ para

$n \le j < k+n$, y $a_{kj}^{(n)} = 0$ en caso contrario, entonces la $\mathcal{A}$–sumabilidad no es otra cosa que la casi convergencia introducida por Lorentz [44].

Para estas dos situaciones bien conocidas, ya mencionamos en el capítulo introductorio que uno puede encontrar en la literatura resultados de tipo Korovkin, cualitativos y cuantitativos, unos mostrando condiciones bajo las cuales $L_j f$ es $\mathcal{A}$–sumable a f, y otros sobre el grado de convergencia, esto es, estimando la cantidad $\|\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^k f - f\|$. Nos referimos a los artículos [43], [60], [61], [40] y [50]. Ya quedó dicho que fue Swetits [67] quien unificó estos dos ambientes particulares precisamente con el uso de la $\mathcal{A}$–sumabilidad de Bell [8], de la que hemos partido en este capítulo.

Pues bien, los resultados antes referidos se establecieron bajo la hipótesis de positividad de los operadores L_j, y ese hecho es el que ahora nos conviene recalcar puesto que el objetivo consiste en sustituir esa condición por propiedades de conservación más generales. En concreto, establecemos el marco general considerando los siguientes elementos:

– un subespacio vectorial W de $C(X)$ y un cono C de W, es decir un subconjunto $C \subset W$ tal que $f \in C$, $\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha f \in C$,

– un operador lineal $T : W \longrightarrow C(X)$ y, a partir de él, el conjunto

$$P = \{f \in W : Tf(x) \ge 0 \ \forall x \in X\},$$

– y finalmente una sucesión $\mathcal{L}$ de operadores lineales

$$L_j : W \longrightarrow W.$$

El objetivo es estudiar la $\mathcal{A}$–sumabilidad de $TL_j f$ hacia Tf, donde, recordemos, $TL_j f$ representa $(T \circ L_j)(f) = T(L_j(f))$. Para ello se asumirá una propiedad conservativa relacionada con el cono C.

De forma más concreta, estimaremos la cantidad

$$\|\mathcal{A}_{T\circ\mathcal{L}}^k f - Tf\| = \sup_n \sup_{x \in X} |\mathcal{A}_{T\circ\mathcal{L}}^{k,n} f(x) - Tf(x)|,$$

en la que, obviamente,

$$\mathcal{A}_{T\circ\mathcal{L}}^{k,n} f = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} TL_j f.$$

Todo ello se precisa en la siguiente sección, donde se enuncia y prueba el resultado principal del capítulo, que resulta ser una versión cuantitativa del establecido en [36].

2.2. El resultado principal

Teorema 2.1 *Bajo el ambiente general que se acaba de establecer en la sección anterior, supongamos que se tiene la propiedad conservativa*

(h1)
$$L_j(P \cap C) \subset P, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

y asumamos la existencia de una función $u \in W$, de una función $\varphi_x \in C$ asociada con cada $x \in X$, y de dos constantes $M > 0$ y $\lambda \geq 1$, cumpliendo las siguientes condiciones:

(h2) $Tu = e_0$, $T\varphi_x(x) = 0$ *para todo* $x \in X$ *y* $T\varphi_x(t) \geq Md(t,x)^\lambda$ *para cualesquiera* $t, x \in X$,

(h3) para cada $f \in W$ *existe* $\alpha_f \geq 0$ *tal que si* $\alpha \geq \alpha_f$, $\gamma \in [-1, 3]$ *y* $x \in X$, *entonces*
$$+f + \alpha\varphi_x + \gamma \|Tf\| u \in C$$
y
$$-f + \alpha\varphi_x + \gamma \|Tf\| u \in C,$$

(h4) para cada $k \in \mathbb{N}$, $\left\|\mathcal{A}^k_{T\circ\mathcal{L}}u\right\| < \infty$ *y*
$$\mu_k^\lambda := \sup_n \sup_{x \in X} \mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x) < \infty.$$

Entonces, para $f \in W$ *y* $k \in \mathbb{N}$
$$\left\|\mathcal{A}^k_{T\circ\mathcal{L}}f - Tf\right\| \leq \|Tf\| \left\|\mathcal{A}^k_{T\circ\mathcal{L}}u - e_0\right\| + \left\|\mathcal{A}^k_{T\circ\mathcal{L}}u\right\| \omega(Tf, \mu_k) + max\left\{\frac{\omega(Tf, \mu_k)}{M}, \mu_k^\lambda \alpha_f\right\}.$$

Antes de demostrar el resultado vamos a describir un caso particular para fijar ideas y para facilitar la comprensión de todos los elementos intervinientes en el resultado. A saber, tomamos $W = C^m(X)$ y $T = D^m$. De esta forma, P es el subconjunto de $C^m(X)$ de todas las funciones con derivada m–ésima no negativa, es decir, de la funciones m–convexas; y el objetivo se centra en el estudio de la $\mathcal{A}$–sumabilidad de $D^m L_j f$ hacia $D^m f$, estimando para ello la cantidad

$$\|\mathcal{A}^k_{D^m \circ \mathcal{L}} f - D^m f\| = \sup_n \sup_x \left| \sum_{j=1}^{\infty} a^{(n)}_{kj} D^m L_j f(x) - D^m f(x) \right|.$$

Es interesante observar que si la serie de arriba se corresponde con una suma finita, entonces

$$\mathcal{A}^k_{D^m \circ \mathcal{L}} f = D^m \left(\mathcal{A}^k_{\mathcal{L}} f \right),$$

lo que nos transportaría, en caso de que estuviéramos estudiando la convergencia usual, al tópico bien establecido de la aproximación simultánea. Algunos trabajos en esta materia pueden leerse en [55], [18], [19] y [53].

Demostración de Teorema 2.1. Sea $f \in W$, $x \in X$ y $\delta > 0$. Entonces para $t \in X$ tal que $d(t,x) > \delta$,

$$|Tf(t) - Tf(x)| \leq \omega\left(Tf, d(t,x)\right) \leq \left(1 + \frac{d(t,x)}{\delta}\right) \omega\left(Tf, \delta\right)$$
$$\leq \left(1 + \frac{d(t,x)^2}{\delta^2}\right) \omega\left(Tf, \delta\right).$$

Obviamente, si $d(t,x) \leq \delta$, entonces

$$|Tf(t) - Tf(x)| \leq \omega\left(Tf, \delta\right).$$

Por consiguiente, usando *(h2)*, tenemos que para cada $t \in X$,

$$|Tf(t) - Tf(x)Tu(t)| \leq \left(Tu(t) + \frac{(T\varphi_x)(t)}{M\delta^\lambda}\right) \omega(Tf, \delta), \tag{2.1}$$

o de forma equivalente,

$$f - Tf(x)u + \omega(Tf,\delta)u + \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\varphi_x \in P$$

y

$$-f + Tf(x)u + \omega(Tf,\delta)u + \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\varphi_x \in P.$$

Por otro lado, dado que

$$-\|Tf\| \leq Tf(x) + \omega(Tf,\delta) \leq 3\|Tf\|$$

y

$$-\|Tf\| \leq -Tf(x) + \omega(Tf,\delta) \leq 3\|Tf\|,$$

la hipótesis *(h3)* permite escribir

$$f - Tf(x)u + \omega(Tf,\delta)u + \text{máx}\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\}\varphi_x \in P \cap C$$

y

$$-f + Tf(x)u + \omega(Tf,\delta)u + \text{máx}\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\}\varphi_x \in P \cap C.$$

Entonces, aplicando *(h1)* y evaluando en el punto x, tenemos que para cada $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 \leq &+TL_j f(x) - Tf(x)TL_j u(x) + \omega(Tf,\delta)TL_j u(x) \\ &+ \text{máx}\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\} TL_j\varphi_x(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 \leq &-TL_j f(x) + Tf(x)TL_j u(x) + \omega(Tf,\delta)TL_j u(x) \\ &+ \text{máx}\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\} TL_j\varphi_x(x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Directamente, a partir de ahí, siempre que tenga sentido, podemos escribir para $k, n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq &+\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f(x) - Tf(x)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x) + \omega(Tf,\delta)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x) \\ &+ \text{máx}\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\} \mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}0 &\leq -\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f(x) + Tf(x)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x) + \omega(Tf,\delta)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x)\\ &\quad + \max\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\}\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x),\end{aligned}$$

que equivale a lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f(x) - Tf(x)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x)\right| &\leq \omega(Tf,\delta)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x)\\ &\quad + \max\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\}\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x).\end{aligned}$$

Usando esta última desigualdad, tomando supremos en n y x y usando *(h4)*

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f(x) - Tf(x)\right| &\leq |Tf(x)|\left|\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x) - e_0(x)\right|\\ &\quad + \left|\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f(x) - Tf(x)\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} u(x)\right|\\ &\leq \|Tf\|\left\|\mathcal{A}^{k}_{T\circ\mathcal{L}} u - e_0\right\| + \omega(Tf,\delta)\left\|\mathcal{A}^{k}_{T\circ\mathcal{L}} u\right\|\\ &\quad + \max\left\{\alpha_f, \frac{\omega(Tf,\delta)}{M\delta^\lambda}\right\}\mu_k^\lambda.\end{aligned}$$

Finalmente, la demostración se concluye de esa desigualdad tomando $\delta = \mu_k$ si $\mu_k > 0$. $\square$

En el comentario que sigue a continuación, se asume que las funciones φ_x son de una forma específica. Se pretende poner de relieve que el resultado anterior es ciertamente un resultado cuantitativo de tipo Korovkin puesto que el orden de convergencia (de $\mathcal{A}$–sumabilidad habríamos de decir en este caso) de TL_jf hacia Tf, se establece en función de los órdenes correspondientes para las funciones de una determinada familia finita.

Con esa idea, supongamos que para cada $x \in X$,

$$\varphi_x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i(x) f_i$$

para ciertas funciones $f_i \in W$ y α_i definidas en X. Entonces, a partir de (h2),

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x) = \mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}}\varphi_x(x) - T\varphi_x(x) &= \sum_{j=1}^{\infty} a^{(n)}_{kj} TL_j\varphi_x(x) - T\varphi_x(x)\\ &= \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(x)\left(\sum_{j=1}^{\infty} a^{(n)}_{kj} TL_j f_i(x) - Tf_i(x)\right)\\ &= \sum_{i=1}^{s}\alpha_i(x)\left(\mathcal{A}^{k,n}_{T\circ\mathcal{L}} f_i(x) - Tf_i(x)\right).\end{aligned}$$

Ahora, si para $i = 1,\ldots,s$, las funciones α_i están acotadas en X y las funciones $TL_j f_i$ son $\mathcal{A}$-sumables a Tf_i uniformemente en X, entonces

$$\mu_k^{\lambda} \leq \sum_{i=1}^{s} \|\alpha_i\| \left\|\mathcal{A}^{k}_{T\circ\mathcal{L}} f_i - Tf_i\right\|$$

y

$$\mu_k \longrightarrow 0.$$

Si además $TL_j u$ es $\mathcal{A}$-sumable hacia Tu uniformemente en X, entonces para cada $f \in W$, $TL_j f$ es $\mathcal{A}$-sumable a Tf y tenemos una estimación del orden de $\mathcal{A}$-sumabilidad en términos de los órdenes de $TL_j f_i$ y $TL_j u$.

2.3. Aplicaciones

En esta sección ponemos de manifiesto que el teorema que se acaba de probar resulta ser una extensión natural de todos los resultados cuantitativos de tipo Korovkin que se mencionaron en la introducción. Añadimos algunas aplicaciones destacadas que informan del avance que aporta el enunciado general.

Por propósitos de claridad y para facilitar la lectura, resumimos en un listado todos los elementos que intervienen en el Teorema 2.1; las situaciones que ahora vamos a mostrar surgen de elecciones apropiadas para ellos:

✓ $\mathcal{A} = \{A^{(n)},\ n = 1,2,\ldots\} = \{a^{(n)}_{kj},\ n = 1,2,\ldots\}$

✓ X

✓ $W \subset C(X)$

✓ $C \subset W$

✓ $T : W \to C(X)$

✓ $\mathcal{L} = \{L_j : W \to W,\ j = 1, 2, \ldots\}$

Recuperamos en primer lugar los resultados clásicos en convergencia y casi convergencia. Luego, conjuntos X más generales y, finalmente distintas propiedades conservativas, incluyendo algunas situaciones muy particulares con operadores bien conocidos.

2.3.1. Casos particulares y extensiones

Si tomamos $X = [a, b]$, $W = C = C(X)$, $T = \mathbb{I}$ y $a_{kj}^{(n)} = \delta_{kj}$, y aplicamos el Theorem 2.1 con $u = e_0$ y $\varphi_x(t) = (t - x)^2$, aparece el clásico resultado de Shisha y Mond [60], versión cuantitativa del teorema pionero de Korovkin.

De igual forma, si tomamos $X = \mathbb{T}$, $W = C = C(X)$, $T = \mathbb{I}$ y $a_{kj}^{(n)} = \delta_{kj}$, y aplicamos ahora el Theorem 2.1 con $u = e_0$ y $\varphi_x(t) = \sin^2(\frac{t-x}{2})$, aparece el otro resultado de Shisha y Mond [61], el que se refiere al caso trigonométrico.

Si bajo el mismo marco anterior, reemplazamos la delta de Kronecker y tomamos $a_{kj}^{(n)} = 1/k$ para $n \leq j < k + n$, y $a_{kj}^{(n)} = 0$ en caso contrario, entonces recuperamos los resultados de Mohapatra [50].

Por otra parte, es importante destacar que el Teorema 2.1 sigue siendo válido, con las modificaciones obvias, si X es reemplazado por cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^m$ compacto y convexo. Bajo la convergencia usual, este caso, que ya se mencionó en el capítulo introductorio de esta memoria, fue estudiado en [18], junto con algunas aplicaciones en aproximación simultánea.

2.3.2. Sobre operadores casi convexos

Nos enfrentamos ahora a propiedades conservativas más generales, para lo cual haremos uso de los siguientes subconjuntos:

$$H_X^i := \{f \in C^i(X) : D^i f(x) \geq 0 \ \forall x \in X\}.$$

Concretamente, nuestro interés se centra en la casi convexidad de orden $m-1$, para cierto $m \in \mathbb{N}$. Se trata de una propiedad de preservación de la forma que fue considerada por primera vez en [41] y que detallamos a continuación: los operadores L_j se dicen casi convexos de orden $m-1$ si existe un conjunto

$$\Omega \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}$$

tal que

$$L_j \left(\bigcap_{i \in \Omega \cup \{m\}} H_X^i \right) \subset H_X^m. \tag{2.3}$$

El resultado que sigue contempla esta propiedad conservativa, que más adelante se ilustra con una sucesión particular de operadores bien conocida.

Corolario 2.1 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y sea $L_j : C^m[0,1] \to C^m[0,1]$ una sucesión de operadores lineales cumpliendo (2.3) para $X = [0,1]$ y cierto conjunto $\Omega \subset \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Sea también $\varphi_x \in \langle e_{\text{mín}\,\Omega}, \ldots, e_{m+2} \rangle$ tal que*

$$\begin{aligned} D^m \varphi_x(t) &= (t-x)^2, \quad \forall t \in [0,1] \\ D^i \varphi_x(0) &= 1 + \|D^{i+1} \varphi_x\|, \quad i = m-1, m-2, \ldots, \text{mín}\,\Omega, \end{aligned}$$

y considérese finalmente

$$\mu_k^2 = \sup_{x \in X} \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k,n} \varphi_x(x).$$

Entonces, para cada $f \in C^m[0,1]$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^k f - D^m f \right\| \leq{}& \frac{\omega(D^m f, \mu_k)}{m!} \left\| \mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^k e_m \right\| \\ &+ \frac{1}{m!} \|D^m f\| \|\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^k e_m - D^m e_m\| \\ &+ \text{máx} \left\{ \omega(D^m f, \mu_k), \mu_k^2 \max_{i \in \Omega} \left\{ \|D^i f\| + \frac{\|D^m f\|}{(m-i)!} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema 2.1. Basta tomar $X = [0,1]$, $W = C^m[0,1]$, $C = \bigcap_{i\in\Omega} H^i_{[0,1]}$, $T = D^m$, $u = (1/m!)e_m$, φ_x como en el enunciado, $M = 1$ y $\lambda = 2$. De esta forma, *(h2)* and *(h3)* se cumplen con

$$\alpha_f = \max_{i\in\Omega}\left\{\|D^i f\| + \frac{\|D^m f\|}{(m-i)!}\right\}.$$

En efecto, $D^m u = e_0$, y, siempre que $i \in \Omega$, dado que $D^i\varphi_x \geq 1$, se tiene que para $\gamma \in [-1,3]$,

$$D^i\left(\alpha_f\varphi_x + f + \gamma\|D^m f\|\frac{e_m}{m!}\right) \geq \alpha_f - \|D^i f\| - \frac{\|D^m f\|}{(m-i)!} \geq 0.$$

y

$$D^i\left(\alpha_f\varphi_x - f + \gamma\|D^m f\|\frac{e_m}{m!}\right) \geq \alpha_f - \|D^i f\| - \frac{\|D^m f\|}{(m-i)!} \geq 0.$$

Por último, *(h4)* se sigue del comentario que siguió a la demostración del Teorema 2.1 observando que los coeficientes de φ_x como combinación lineal de $e_{\min\Omega}, \ldots, e_{m+2}$ se pueden calcular de forma recursiva y están acotados. $\square$

2.3.3. Modificación de los operadores de Meyer-König y Zeller

Tratamos ahora con el anunciado caso particular. Consideramos la bien conocida sucesión de operadores de Meyer-König y Zeller, definida como

$$M_n f(x) = (1-x)^{n+1}\sum_{p=0}^{\infty} f\left(\frac{p}{p+n}\right)\binom{n+p}{p}x^p, \quad x \in [0,1)$$

y $M_n f(1) = f(1)$.

Estos operadores también se llaman series de potencias de Bernstein y están relacionados con la distribución de Pascal en teoría de probabilidad y con la matriz de sumabilidad de Taylor, de forma análoga a como los operadores de Bernstein lo están con la distribución de Bernouilli y con la matriz de sumabilidad de Euler-Knopp.

Se conocen muchas propiedades de estos operadores. Poniendo énfasis en las que ahora nos interesan, diremos que ya en 1967 Lupas [48] probó que

$$M_n(H^i_{[0,1]}) \subset H^i_{[0,1]} \ para \ i = 0, 1, 2,$$

y

$$M_n(H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]}) \subset H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]}.$$

A su vez, se puede comprobar con facilidad que $M_n(H^3_{[0,1]}) \not\subset H^3_{[0,1]}$. Más adelante, en [47] se probó que

$$M_n(H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]} \cap H^4_{[0,1]}) \subset H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]} \cap H^4_{[0,1]}$$

y

$$M_n(H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]} \cap H^4_{[0,1]} \cap H^5_{[0,1]}) \subset H^2_{[0,1]} \cap H^3_{[0,1]} \cap H^4_{[0,1]} \cap H^5_{[0,1]}.$$

Es decir, los operadores son positivos, 1–convexos y 2–convexos. No son 3–convexos pero si son casi convexos de orden k, para $k = 3, 4, 5$ con $\Omega = \{2, \ldots, k-1\}$.

Por otra parte, Knoop y Pottinger [41] obtuvieron estimaciones de $||D^1 M_n f - D^1 f||$ y $||D^2 M_n f - D^2 f||$.

Bajo la convergencia usual, el Corolario 2.1 se puede aplicar a los operadores M_n para $m = 3, 4, 5$. Pero también, dada cualquier sucesión de matrices $\mathcal{A}$ en las condiciones del Teorema 2.1, podemos considerar una sucesión de números reales positivos β_n que sea $\mathcal{A}$-sumable a 0 y no necesariamente convergente en el sentido clásico, y a partir de ella considerar

$$\widehat{\mathcal{M}}_n f = (1 + \beta_n)\mathcal{M}_n f.$$

La nueva sucesión $\widehat{\mathcal{M}}_n$ hereda de M_n las propiedades de conservación de la forma antes referidas, de suerte que el Corolario 2.1 también es de aplicación.

2.3.4. Sobre polinomios trigonométricos

Para presentar esta aplicación del Teorema 2.1, primero de todo definimos, para $i \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ y $\phi \in C(\mathbb{T})$,

$$T_i\phi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{v=1}^{i} a_v \cos(vt) + b_v \sin(vt),$$

siendo a_v y b_v los coeficientes de Fourier asociados a $\phi \in C(\mathbb{T})$ y

$$H_{\mathbb{T}}^i := \{\phi \in C(\mathbb{T}) : T_i\phi \geq 0\}.$$

Entonces fijamos un número natural m, consideramos $X = \mathbb{T}$, $W = C(\mathbb{T})$, $T = T_m$ y $C = \bigcap_{i\in\Omega} H_{\mathbb{T}}^i$, donde Ω es un subconjunto de $\{0, 1, \ldots, m-1\}$, y asumimos que los operadores L_j cumplen que $L_j(P \cap C) \subset P$. Bajo estas nuevas condiciones podemos establecer el siguiente resultado.

Corolario 2.2 *Sea* $h = \text{máx}\,\Omega$, *sea*

$$\varphi_x(t) = \sum_{v=1}^{h+1} (1 - \cos(v(t - x)))$$

y sea

$$\mu_k^2 = \sup_{x\in X} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{T_m\circ\mathcal{L}}^{k,n} \varphi_x(x).$$

Entonces para cada $f \in W$ *y* $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{T_m\circ\mathcal{L}}^k f - T_m f\| \leq{}& w(T_m f, \mu_k) \left\|\mathcal{A}_{T_m\circ\mathcal{L}}^k e_0\right\| \\ &+ \|T_m f\| \left\|\mathcal{A}_{T_m\circ\mathcal{L}}^k e_0 - e_0\right\| \\ &+ \text{máx}\left\{\frac{\pi^2 \omega(T_m f, \mu_k)}{2}, \mu_k^2 \max_{i\in\Omega} \{\|T_i f\| + \|T_m f\|\}\right\}. \end{aligned}$$

Demostración. Aplicaremos el Teorema 2.1 tomando $u = e_0$, φ_x como antes, $M = 2/\pi^2$ y $\lambda = 2$. La hipótesis *(h2)* se cumple ya que $T_m\varphi_x = \varphi_x$, φ_x se anula en el punto x y para todo t

$$\varphi_x(t) \geq (1 - \cos(x - t)) \geq \frac{2}{\pi^2}(x - t)^2.$$

La suposición *(h3)* también se cumple con

$$\alpha_f = \max_{i\in\Omega} \{\|T_i f\| + \|T_m f\|\}.$$

En efecto, $T_m u = e_0$, y para $i \in \Omega$,

$$T_i \varphi_x(t) = \sum_{v=1}^{i} (1 - \cos(v(t-x))) + (h+1-i) \geq 1.$$

Por consiguiente, para $\gamma \in [-1, 3]$,

$$T_i \left(\alpha_f \varphi_x + f + \gamma \|T_m f\| e_0 \right) \geq \alpha_f - \|T_i f\| - \|T_m f\| \geq 0.$$

y

$$T_i \left(\alpha_f \varphi_x - f + \gamma \|T_m f\| e_0 \right) \geq \alpha_f - \|T_i f\| - \|T_m f\| \geq 0.$$

Finalmente, *(h4)* se sigue de nuevo a partir del comentario que se anotó a continuación de la demostración del Teorema 2.1 observando que los coeficientes de φ_x como combinación lineal de las funciones

$$e_0, \ \cos(\nu t), \ \operatorname{sen}(\nu t), \quad \nu = 1, 2, \ldots, h+1,$$

están acotados. $\square$

Capítulo 3

Fórmulas asintóticas

3.1. Introducción

Tras el estudio de resultados cuantitativos en los procesos de aproximación mediante sucesiones de operadores lineales, aparece con naturalidad la necesidad de evaluar la bondad de las estimaciones que se alcanzan con aquellos. Ya escribimos sobre esto en el capítulo introductorio de esta memoria, donde mencionamos la fórmulas asintóticas como los primeros pasos que se suelen dar en esta dirección.

Introducíamos además este tópico estableciendo el que se podía considerar como resultado pionero, probado por Voronovskaya [68] en 1932 para el caso particular de los operadores de Bernstein clásicos B_n. Nos referimos al Teorema 1.6 que informaba que la velocidad de convergencia de $B_n f(x)$ a $f(x)$ estaba limitada por $1/n$, salvo que $f''(x) = 0$, poniendo así de manifiesto una velocidad que en cierto sentido es la óptima. En concreto, afirmaba que para una función f acotada en $[0, 1]$, derivable en un entorno de $x \in [0, 1]$, y con derivada segunda en ese punto, se tenía que

$$\lim_{n \to +\infty} n(B_n f(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

Nuestro interés se centra ahora en ese tipo de resultados dentro del marco más general dado por la aproximación simultánea, con el foco puesto en la aproximación de las derivadas de las funciones, y dado también por esa noción más general de convergencia representada por la A–sumabilidad.

Para fijar ideas recordamos la conocida fórmula de la m-ésima derivada de los clásicos operadores de Bernstein B_n: dada una función f, m-veces diferenciable de forma continua en $[0,1]$ y $m+2$-veces diferenciable en $x \in (0,1)$,

$$\lim_{n\to\infty} n(D^m B_n f(x) - D^m f(x)) = D^m(pD^2 f)(x),$$

donde $p = p(t) = t(1-t)/2$. Y también echamos un vistazo a la siguiente expresión, que se deducirá de los resultados de este capítulo, a propósito de la casi convergencia de $D^m B_k f(x)$ hacia $D^m f(x)$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\log k}\left(\sum_{j=n}^{n+k-1} D^m B_j f(x) - D^m f(x)\right) = D^m(pD^2 f)(x)$$

uniformemente en n.

Aunque ya insistiremos en ello, es importante notar que el ejemplo anterior es ilustrativo pero de bajo interés, ya que la convergencia usual de $D^m B_k f(x)$ hacia $D^m f(x)$ implica su casi convergencia.

También recordamos, ahora que estamos introduciendo este capítulo, y que nuestra pretensión era hacerlos casi auto contenidos, que la casi convergencia era un caso particular de $\mathcal{A}$–sumabilidad, donde $\mathcal{A}$ representaba una sucesión de matrices infinitas.

En comparación con el capítulo anterior, donde las propiedades conservativas de los operadores en cuestión se expresaban usando un determinado operador general T y cierto cono de funciones, aquí nos situamos en el espacio $C[a,b]$, prescindimos de conos y nos restringimos al caso en que $T = D^m$, esto es, asumimos que los operadores son m-convexos. Así mismo, en las aplicaciones, salvo para algunas aclaraciones, ilustraremos la casi convergencia de algunos procesos, concretando así la $\mathcal{A}$–sumabilidad general.

3.2. Resultado Principal

Sea $[a,b]$ un intervalo compacto de la recta real, sea $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $\mathcal{A} := \{A^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ como la tratada en la Definición 1.2. Finalmente, sea $\mathcal{L} = \{L_j : C^m[a,b] \to C^m[a,b]\}$ una sucesión de operadores lineales, donde $C^m[a,b]$ es el espacio de todas las funciones m-veces continuamente diferenciables en $[a,b]$. Podemos asumir que cada L_j es m-convexo, es decir, transforma funciones m-convexas en funciones m-convexas. Recordemos aquí que una función $f \in C^m[a,b]$ se dice que es m-convexa siempre que $D^m f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$.

Para $f \in C^m[a,b]$ y $x \in [a,b]$ podemos considerar la sucesión doble

$$\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k,n} f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{(n)} D^m L_j f(x), \quad k, n = 1, 2, \ldots$$

siempre que la serie sea convergente para todos $k, n = 1, 2, \ldots$

Nuestro interés es el estudio de la $\mathcal{A}$–sumabilidad de $\{D^m L_j f(x)\}$ hacia $D^m f(x)$. En concreto estudiamos el comportamiento asintótico de la expresión

$$\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k} f(x) - D^m f(x).$$

Bajo el escenario descrito anteriormente podemos demostrar el siguiente teorema, que puede ser considerado como un resultado de tipo Korovkin para fórmulas asintóticas.

Teorema 3.1 *Sea $x \in (a,b)$ tal que la serie $\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k,n} e_i^x(x)$ es convergente para $i = 0, 1, \ldots, m+4$ y para $k, n = 1, 2, \ldots$.*

Supongamos que:

a) existe una sucesión de números reales positivos $\lambda_k \to +\infty$ y una función $p = p(t)$, m-veces diferenciable y estrictamente positiva en el intervalo (a,b), de tal manera que para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m+2\}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k,n} e_i^x(x) - D^m e_i^x(x) \right) = D^m \left(p D^2 e_i^x \right)(x)$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, *b)*

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} e^x_{m+4}(x) = 0$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Entonces para cada $f \in C^m[a,b]$, $m+2$*-veces diferenciable en un entorno del punto* x,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x)\right) = D^m \left(pD^2 f\right)(x)$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $f \in C^m[a,b]$ una función $m+2$-veces diferenciable en un entorno de $x \in (a,b)$. A partir de la fórmula de Taylor podemos escribir que para todo $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} D^m f(t) = D^m f(x) + D^{m+1} f(x)(t-x) + \frac{D^{m+2} f(x)}{2}(t-x)^2 \\ + h(t-x)(t-x)^2, \end{aligned}$$

donde h es una función continua que se anula en 0. Equivalentemente podemos escribir la igualdad

$$D^m f = D^m \left(\sum_{i=0}^{2} D^{m+i} f(x) \frac{e^x_{m+i}}{(m+i)!} + \overline{H}_x \right),$$

donde $\overline{H}_x$ es tal que $D^m \overline{H}_x(t) = h(t-x)(t-x)^2$.

Ahora usamos la m-convexidad de los operadores L_j y evaluamos en el punto x para escribir

$$D^m L_j f(x) = \sum_{i=0}^{2} D^{m+i} f(x) \frac{D^m L_j e^x_{m+i}(x)}{(m+i)!} + D^m L_j \overline{H}_x(x)$$

y obtener después directamente la igualdad (más abajo queda demostrado que $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x) < \infty$)

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) = \sum_{i=0}^{2} D^{m+i} f(x) \frac{\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} e^x_{m+i}(x)}{(m+i)!} + \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x),$$

que, tras la introducción del término

$$D^m f(x) = \sum_{i=0}^{2} \frac{D^{m+i} f(x)}{(m+i)!} D^m e^x_{m+i}(x),$$

se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) - \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x) \\ = \sum_{i=0}^{2} \frac{D^{m+i} f(x)}{(m+i)!} \left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} e^x_{m+i}(x) - D^m e^x_{m+i}(x) \right).\end{aligned}$$

Si ahora hacemos uso de la hipótesis *a)* con e^x_m, e^x_{m+1} y e^x_{m+2}, derivando obtenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) - \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x) \right) \\ = \sum_{i=0}^{2} \frac{D^{m+i} f(x)}{(m+i)!} D^m \left(p D^2 e^x_{m+i} \right)(x) \qquad (3.1)\end{aligned}$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $m > 2$, entonces para $i = 0, 1, \ldots m-1$, $D^m e^x_i(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$, y de la m-convexidad de los operadores L_j obtenemos que $D^m L_j e^x_i(t) = 0$ para $i = 0, 1, \ldots m-1$ y $t \in [a, b]$. Para estos valores de i, la hipótesis *a)* nos indica que $D^m(pD^2 e^x_i)(t) = 0$. Como consecuencia, el grado de la función p tiene que ser igual o menor a 2. Teniendo en cuenta este hecho, el uso de la fórmula de Leibniz nos permite reescribir el segundo miembro (3.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} \frac{D^{m+i} f(x)}{(m+i)!} D^m \left(p D^2 e^x_{m+i} \right)(x) &= \sum_{i=0}^{2} \binom{m}{i} D^i p(x) D^{m+2-i} f(x) \\ &= D^m (pD^2 f)(x);\end{aligned}$$

además, los cálculos muestran que esta igualdad es válida también para $m = 0, 1, 2$. Por lo tanto, a partir de (3.1), la demostración del teorema se terminará si mostramos que $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x) < \infty$ y que

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} \overline{H}_x(x) = 0 \quad \text{uniformemente para } n \in \mathbb{N}. \qquad (3.2)$$

Con este propósito, sea $\epsilon > 0$, entonces por continuidad existe un entorno de x, digamos θ_x, tal que para todo $t \in \theta_x$, $|h(t-x)| < \epsilon$. Entonces, para todo $t \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\left|D^m \overline{H}_x(t)\right| &= |h(t-x)(t-x)^2| \\ &\leq \epsilon(t-x)^2 + \text{máx}\{0, |h(t-x)| - \epsilon\}(t-x)^2 \\ &= \epsilon(t-x)^2 + w(t),\end{aligned}$$

donde $w(t) := \text{máx}\{0, |h(t-x)| - \epsilon\}(t-x)^2$. Si consideramos ahora W una m-integral de w (i.e. $D^m W = w$), podemos escribir para $t \in [a,b]$

$$\left|D^m \overline{H_x}(t)\right| \leq \frac{2\epsilon}{(m+2)!} D^m e^x_{m+2}(t) + D^m W(t).$$

$D^m W$ se anula en θ_x, por lo que existe una constante M tal que

$$|D^m W(t)| \leq M D^m e^x_{m+4}(t) \quad \forall\ t \in [a,b].$$

Usando esta desigualdad y la m-convexidad de los L_j obtenemos las siguientes desigualdades

$$\begin{aligned}\left|D^m L_j \overline{H_x}(t)\right| &\leq \frac{2\epsilon}{(m+2)!} D^m L_j e^x_{m+2}(t) + D^m L_j W(t) \\ &\leq \frac{2\epsilon}{(m+2)!} D^m L_j e^x_{m+2}(t) + M D^m L_j e^x_{m+4}(t),\end{aligned}$$

y directamente

$$\begin{aligned}\left|\lambda_k \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} \overline{H_x}(x)\right| \leq &\frac{2\epsilon}{(m+2)!} \lambda_k \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} e^x_{m+2}(x) \\ &+ \lambda_k M \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} e^x_{m+4}(x).\end{aligned}$$

Mediante el uso de *a)* (para e_{m+2}) y *b)* se obtiene que

$$\lim_{k\to\infty} \left|\lambda_k \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} \overline{H}_x(x)\right| \leq 2\epsilon p(x) > 0$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$, lo que demuestra (3.2) al ser $\epsilon > 0$ arbitrario. Así terminamos la demostración del teorema. $\square$

3.3. Casos particulares, aplicaciones y generalizaciones

3.3.1. Casos particulares

Precisamos en primer lugar que el Teorema 1.7 probado en [14] al que hicimos referencia en el primer capítulo, ahora queda como caso particular del que se acaba de probar. Se recupera tras considerar la convergencia clásica.

Obviamente, remontándonos a los primeros resultados sobre fórmulas asintóticas para sucesiones generales de operadores lineales, encontramos en el clásico libro de DeVore [24] su Lema 5.2, que ahora queda también como caso particular del Teorema 3.1. De hecho la prueba de este teorema sigue el patrón que en aquel se estableció.

3.3.2. Operadores de Bernstein y casi convergencia

Nuestra primera aplicación, como se ha señalado en la introducción de este capítulo, se ocupa de los clásicos operadores de Bernstein B_j. Mostramos dos resultados diferentes a través de sendos corolarios donde estudiamos el comportamiento asintótico de los valores

$$\mathcal{A}_{\mathcal{L}}^{k} f(x) - f(x) \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_{D^3 \circ \mathcal{L}}^{k} f(x) - D^3 f(x),$$

donde $\mathcal{A}$ es la sucesión de matrices que define la casi convergencia y, obviamente, $\mathcal{L} = \{B_j : j = 1, 2, \ldots\}$. En otras palabras, vamos a estudiar los procesos de casi convergencia de $B_j f(x)$ y $D^3 B_j f(x)$ hacia $f(x)$ y $D^3 f(x)$ respectivamente. Ya se dijo entonces, y ahora reiteramos, que estos resultados se establecen a modo de ilustración del resultado general, pues es bien sabido que hacen referencia a procesos que son convergentes, en el sentido clásico.

Corolario 3.1 *Sea $f \in C[0,1]$ dos veces diferenciable en un entorno de un punto $x \in (0,1)$, entonces, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{k}{\log k} \left(\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} B_j f(x) - f(x) \right) = \frac{x(1-x)}{2} D^2 f(x).$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.1 con $m = 0$, $[a, b] = [0, 1]$, $\mathcal{L} = \{B_j : j = 1, 2, \ldots\}$, $\lambda_k = k/\log k$, $p(t) = t(1-t)/2$ y, respecto de $\mathcal{A}$, $a_{kj}^{(n)} = 1/k$ para $n \leq j < k + n$ y $a_{kj}^{(n)} = 0$ en otro caso.

Haremos uso de las siguientes igualdades básicas de los operadores de Bernstein:

$$\begin{aligned} B_j e_0 &= e_0 \\ B_j e_1 &= e_1 \\ B_j e_2^x(x) &= \frac{x(1-x)}{j} \\ B_j e_4^x(x) &= \frac{x(1-x)(1-6x+6x^2)}{j^3} + \frac{3x^2(1-x)^2}{j^2}. \end{aligned}$$

A partir de esas igualdades se obtienen con facilidad las que siguen:

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} B_j e_0^x(x) - e_0^x(x) = \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} - 1 = 0,$$

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} B_j e_1^x(x) - e_1^x(x) = 0,$$

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} B_j e_2^x(x) - e_2^x(x) = \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} \frac{x(1-x)}{j} = \frac{x(1-x)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j},$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} B_j e_4^x(x) &= \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} \left(\frac{x(1-x)(1-6x+6x^2)}{j^3} + \frac{3x^2(1-x)^2}{j^2} \right) \\ &= \frac{x(1-x)(1-6x+6x^2)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^3} \\ &+ \frac{3x^2(1-x)^2}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^2}. \end{aligned}$$

Las hipótesis del teorema se pueden comprobar a partir de estas igualdades. Basta tener en cuenta la validez del siguiente límite, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\sum_{j=n}^{n+k-1} 1/j}{\log k} = 1, \tag{3.3}$$

y de este otro, también uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, para $s = 2, 3, 4, \ldots$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\sum_{j=n}^{n+k-1} 1/j^s}{\sum_{j=n}^{n+k-1} 1/j} = 0. \tag{3.4}$$

□

Corolario 3.2 *Sea $p = p(t) = t(1-t)/2$. Sea $f \in C^3[0,1]$ 5-veces diferenciable en un entorno de un punto $x \in (0,1)$, entonces, de forma uniforme para $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{\log k} \left(\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j f(x) - D^3 f(x) \right) = D^3(pD^2 f)(x).$$

Demostración. Basta aplicar el Teorema 3.1 como en el corolario anterior, tomando ahora $m = 3$. Haremos uso de las siguientes igualdades para los polinomios de Bernstein que se obtienen fácilmente con la ayuda de algún software de cálculo:

$$\begin{aligned}
D^3 B_j e_i^x(x) &= 0 \text{ for } i = 0, 1, 2, \qquad (3.5)\\
D^3 B_j e_3^x(x) &= 6 - \frac{18}{j} + \frac{12}{j^2},\\
D^3 B_j e_4^x(x) &= \frac{36(1-2x)}{j} - \frac{108(1-2x)}{j^2} + \frac{72(1-2x)}{j^3},\\
D^3 B_j e_5^x(x) &= \frac{60x(1-x)}{j} + \frac{30(5-30x+30x^2)}{j^2}\\
&\quad -\frac{30(15-76x+76x^2)}{j^3} + \frac{30(10-48x+48x^2)}{j^4},\\
D^3 B_j e_7^x(x) &= \frac{630(1-x)^2x^2}{j^2} - \frac{210x(-22+133x-222x^2+111x^3)}{j^3}\\
&\quad +\frac{42(43-930x+4290x^2-6720x^3+3360x^4)}{j^4}\\
&\quad +\frac{42(-129+2020x-8440x^2+12840x^3-6420x^4)}{j^5}\\
&\quad +\frac{84(43-600x+2400x^2-3600x^3+1800x^4)}{j^6}.
\end{aligned}$$

A partir de estas igualdades se puede escribir

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j e_3^x(x) - D^3 e_3^x(x) = \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k}\left(6 + \frac{12}{j^2} - \frac{18}{j}\right) - 6$$
$$= -\frac{18}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j} + \frac{12}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^2},$$

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j e_4^x(x) - D^3 e_4^x(x) = \frac{36(1-2x)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j}$$
$$- \frac{108(1-2x)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^2}$$
$$+ \frac{72(1-2x)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^3},$$

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j e_5^x(x) - D^3 e_5^x(x) = \frac{60x(1-x)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j}$$
$$+ \frac{30(5-30x+30x^2)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^2}$$
$$- \frac{30(15-76x+76x^2)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^3}$$
$$+ \frac{30(10-48x+48x^2)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^4},$$

$$\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j e_7^x(x) = \frac{630(1-x)^2 x^2}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^2}$$
$$- \frac{210x(-22+133x-222x^2+111x^3)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^3}$$
$$+ \frac{42(43-930x+4290x^2-6720x^3+3360x^4)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^4}$$
$$+ \frac{42(-129+2020x-8440x^2+12840x^3-6420x^4)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^5}$$
$$+ \frac{84(43-600x+2400x^2-3600x^3+1800x^4)}{k} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{j^6}.$$

La demostración se obtiene fácilmente utilizando (3.3) y (3.4), que nos permiten comprobar todas las hipótesis del teorema. □

3.3.3. Operadores modificados de Bernstein y casi convergencia

Mostramos ahora una aplicación a una sucesión particular de operadores lineales definidos a partir de matrices generalizadas de Lototsky (ver [39], [40]). En concreto, para $f \in C[0,1]$ podemos considerar la sucesión de operadores L_j definidos por

$$L_j f(x) = \sum_{v=0}^{j} b_{jv}(x) f(v/j), \; x \in [0,1], \tag{3.6}$$

donde la matriz infinita $B = (b_{jv}(x))$ está definida de la siguiente forma:

$$b_{00} = 1, \quad b_{0v} = 0, \quad v > 0,$$

$$\phi_j(x) \prod_{i=1}^{j} (h_i(x) y + 1 - h_i(x)) = \sum_{v=0}^{j} b_{jv}(x) y^v,$$

siendo $\phi_j(x)$ una sucesión de funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ con $0 \leq \phi_j(x)$ para cada $j = 1, 2, \ldots$ y $x \in [0,1]$, y siendo $h_i(x)$ una sucesión de funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ con $0 \leq h_i(x) \leq 1$ para cada $i = 1, 2, \dots$ y $x \in [0,1]$.

Observamos que si se considera el caso en que $\phi_j = e_0$ para todo j y $h_i = e_1$ para todo i, entonces los operadores dados en (3.6) coinciden con los de Bernstein clásicos.

En [40] se estableció un resultado cualitativo sobre la casi convergencia de la sucesión de operadores dada en (3.6). En concreto, se probó que si la $(C,1)$-transformada de la sucesión h_i converge a e_1 uniformemente en $[0,1]$, y si $\phi_j(x)$ es casi convergente a 1 uniformemente en $[0,1]$, entonces, para cada $f \in C[0,1]$, la sucesión $L_j f(x)$ es casi convergente a $f(x)$ uniformemente en $[0,1]$. La demostración de este resultado se basó en las igualdades

$$L_j e_0(x) = \phi_j(x),$$
$$L_j e_1(x) = \phi_j(x) \frac{\sum_{i=1}^{j} h_i(x)}{j},$$
$$L_j e_2(x) = \phi_j(x) \left(\frac{\sum_{i=1}^{j} h_i(x)}{j^2} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{j} h_i(x)\right)^2}{j^2} - \frac{\sum_{i=1}^{j} h_i(x)^2}{j^2} \right),$$

que, si bien se pueden obtener directamente de (3.6), resultan ser casos particulares de la siguiente, probada en [30]:

$$\phi_j(x)^{-1} j^s L_j e_s(x) = \sum_{i=1}^{s} \sigma_s^i \frac{\partial^i P_j(x;1)}{\partial y^i}, \tag{3.7}$$

donde

$$P_j(x;y) = \prod_{i=1}^{j} (h_i(x) y + 1 - h_i(x))$$

y donde σ_s^i denota los números de Stirling de segunda especie, dados por la fórmula explícita

$$\sigma_s^i = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \frac{j^{s-1}}{(j-1)!(i-j)!} = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} j^s,$$

y de los que dejamos algunos anotados en forma de tabla

σ_s^i	i	0	1	2	3	4
s						
0		1				
1		0	1			
2		0	1	1		
3		0	1	3	1	
4		0	1	7	6	1

Ahora nos centramos, por simplicidad, en un caso concreto; el que resulta de considerar $h_i = e_1$ para todo i y $\phi_j(x)$ una sucesión casi convergente a 1, no necesariamente convergente. Los operadores L_j resultan ser una suerte de operadores de tipo Bernstein.

Puede considerarse como ejemplo la sucesión de funciones

$$\phi_j(x) = 1 + (-1)^j x/2,$$

que no es convergente pero sí es casi convergente a 1. De esta manera, si llamamos L_j^ϕ a los operadores de esta sucesión particular de operadores, se tiene que $L_j^\phi f(x)$ no converge a $f(x)$, pero si es casi convergente, es decir,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} L_j^\phi f(x) = f(x) \quad \text{uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

Para sucesiones de este tipo se puede establecer el Corolario 3.3 de más abajo, que se obtiene como aplicación directa del Teorema 3.1, realizando los cálculos necesarios con el uso de (3.7). Detallamos algunos cálculos por propósitos de completitud y para mostrar cómo había que proceder ante situaciones más generales:

$$
\begin{aligned}
\phi_j(x)^{-1} L_j^{\phi} e_0(x) &= 1, \\
\phi_j(x)^{-1} L_j^{\phi} e_1(x) &= x, \\
\phi_j(x)^{-1} L_j^{\phi} e_2(x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{j}, \\
\phi_j(x)^{-1} L_j^{\phi} e_3(x) &= \sigma_3^1 \frac{\partial P_j}{\partial y}(x;1) + \sigma_3^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial^2 y}(x;1) + \sigma_3^3 \frac{\partial^3 P_j}{\partial^3 y}(x;1) \\
&= jx + 3j(j-1)x^2 + j(j-1)(j-2)x^3, \\
\phi_j(x)^{-1} L_j^{\phi} e_4(x) &= \sigma_4^1 \frac{\partial P_j}{\partial y}(x;1) + \sigma_4^2 \frac{\partial^2 P_j}{\partial^2 y}(x;1) + \sigma_4^3 \frac{\partial^3 P_j}{\partial^3 y}(x;1) \\
&+ \sigma_4^4 \frac{\partial^4 P_j}{\partial^4 y}(x;1) \\
&= jx + 7j(j-1)x^2 + 6j(j-1)(j-2)x^3 \\
&+ j(j-1)(j-2)(j-3)x^4.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Corolario 3.3 *Sea $f \in C[0,1]$ dos veces diferenciable en un entorno de un punto $x \in (0,1)$, entonces, uniformemente para $n \in \mathbb{N}$,*

$$
\lim_{k \to +\infty} \frac{k}{\log k} \left(\sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} L_j^{\phi} f(x) - f(x) \right) = \frac{x(1-x)}{2} D^2 f(x).
$$

3.3.4. Generalizaciones

Un ingrediente esencial para probar una fórmula asintótica para una sucesión de operadores lineales positivos L_n es el teorema de Taylor. Así se ha puesto de manifiesto en la demostración del Teorema 3.1. A partir de él, la aplicación de dicha fórmula aparece tras cierto trabajo, que podríamos considerar menor, si uno es capaz de calcular con facilidad los momentos de los operadores, a saber $L_n e_i^x(x)$, $i = 0, 1, 2, 4$. Si por el contrario esos cálculos se complican, entonces surgen problemas.

Con esta idea se presentó en [17] una herramienta que ayudaba a superar estas dificultades. La idea básica del resultado consistía en aplicar la fórmula de Taylor, no a la función f que se pretende aproximar, sino a la función $f\circ\varphi^{-1}$ para cierta φ. Enunciamos aquí el resultado, establecido en el marco de la convergencia usual.

Sea φ una función de clase infinito en $[0,1]$, tal que $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$ y $\varphi'(x)>0$ para $x\in(0,1)$. Denotamos por $e^x_{\varphi,i}$ la función

$$e^x_{\varphi,i}(t)=(\varphi(t)-\varphi(x))^i.$$

Teorema 3.2 *Sea $L_n : C[0,1]\to C[0,1]$ una sucesión de operadores lineales positivos y sea $x\in(0,1)$. Asumamos la existencia de una sucesión de números reales positivos $\lambda_n\to+\infty$ y de dos funciones $p,q\in C[0,1]$, siendo p estrictamente positiva en $(0,1)$, tal que para todo $i\in\{0,1,2,4\}$*

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n(L_n e^x_{\varphi,i}(x)-e^x_{\varphi,i}(x))=p(x)D^2e^x_{\varphi,i}(x)+q(x)D^1e^x_{\varphi,i}(x). \quad (3.9)$$

Entonces para cada $f\in C[0,1]$, dos veces diferenciable en el punto x,

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n(L_nf(x)-f(x))=p(x)f''(x)+q(x)f'(x).$$

El resultado se aplicó a varias situaciones. Las dos primeras que mostramos fueron introducidas recientemente en [3] y [57], y surgen como modificaciones de los operadores de Bernstein y de los operadores modificados de Meyer-König y Zeller, que ya mencionamos en el capítulo anterior. Estos operadores, en lugar de preservar las funciones lineales, esto es, e_0 y e_1, fijan las funciones e_0 y e_2, lo que dificulta el cálculo de los momentos de órdenes bajos requeridos. Detallamos a continuación sus definiciones mostrando cómo actúan respectivamente sobre $f\in C[0,1]$ y $x\in[0,1]$:

$$B_{n,0,2}f(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{n(n-1)}}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

y

$$R_nf(x)=\begin{cases}\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\sqrt{\frac{k(k-1)}{(n+k)(n+k-1)}}\right)\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}, & x\in[0,1);\\ f(1), & x=1.\end{cases}$$

La presencia de la raíz cuadrada dificulta sobremanera obtener expresiones para los momentos $B_{n,0,2}e_i^x(x)$ y $R_n e_i^x(x)$, $i = 0, 1, 2, 4$. Aquí, el Teorema 3.2 se aplica con $\lambda_n = n$ y $\varphi = e_2$ y permite obtener, como ya se hizo en [17], fórmulas asintóticas.

Otro ejemplo que generaliza el anterior, también introducido en [3], está dado por la sucesión de operadores $B_{n,0,j}$, $j > 1$, definida para $f \in C[0,1]$ y $n \geq j$ como

$$B_{n,0,j}f(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\left(\frac{k(k-1)\cdots(k-j+1)}{n(n-1)\cdots(n-j+1)}\right)^{1/j}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Los operadores $B_{n,0,j}$ fijan las funciones e_0 y e_j, luego el resultado se aplica tomando $\varphi = e_j$.

Un último ejemplo está dado por la siguiente sucesión de operadores estudiada en [16]:

$$B_n^\tau f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\tau(x)^k(1-\tau(x))^{n-k}(f \circ \tau^{-1})(k/n),$$

donde τ es una función en las mismas condiciones que φ. Estos operadores preservan las funciones e_0 y τ, y el Teorema 3.2 se aplica tomando $\varphi = \tau$.

Resulta bastante natural, a partir de todo lo anterior, preguntarse por la validez del Teorema 3.2 cuando la convergencia habitual es reemplazada por la $\mathcal{A}$–sumabilidad y la positividad es extendida hasta la m-convexidad. Se obtiene una respuesta afirmativa, que ahora enunciamos, y cuya demostración no consideramos necesario incluir.

Teorema 3.3 *Sea* $\mathcal{A} := \{A^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ *como la tratada en la Definición 1.2, sea* $\mathcal{L} = \{L_j : C^m[0,1] \to C^m[0,1]\}$ *una sucesión de operadores lineales* m*-convexos. Sea también* $x \in (0,1)$ *tal que la serie* $\mathcal{A}_{D^m \circ \mathcal{L}}^{k,n} e_{\varphi,i}^x(x)$ *es convergente para* $i = 0, 1, \ldots, m+4$ *y para* $k, n = 1, 2, \ldots$.

Supongamos que existe una sucesión de números reales positivos $\lambda_k \to +\infty$ *y dos funciones* $p, q \in C^m[0,1]$*, siendo* p *estrictamente positiva en* $(0,1)$*, tal que para todo* $i \in \{0, 1, \ldots, m+4\}$

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}_{D^m\circ\mathcal{L}}^{k,n} e_{\varphi,i}^x(x) - D^m e_{\varphi,i}^x(x)\right) = D^m\left(pD^2 e_{\varphi,i}^x + qD^1 e_{\varphi,i}^x\right)(x)$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

Entonces para cada $f \in C^m[0,1]$, $m+2$ *veces diferenciable en un entorno del punto* x,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) \right) = D^m \left(pD^2 f + qD^1 f \right)(x)$$

uniformemente para $n \in \mathbb{N}$.

La aplicación del resultado permitiría extraer fórmulas para los ejemplos antes mostrados y bajo casi convergencia; pero también permitiría estudiar procesos no convergentes, aunque sí $\mathcal{A}$–sumables para cierta $\mathcal{A}$. A modo de ejemplo, algunas situaciones estarían dadas por la sucesiones de operadores $(1+\gamma_n)L_n$, donde γ_n fuese una sucesión no convergente, $\mathcal{A}$–sumable a cero, y donde L_n fuese cualquiera de las sucesiones anteriores, $B_{n,0,j}$, R_n o B_n^τ.

Capítulo 4

Resultados de saturación

4.1. Introducción

En este momento se entra de lleno en la saturación de los procesos de aproximación que hemos venido estudiando en los capítulos anteriores. Las fórmulas asintóticas informan la existencia de una velocidad de convergencia o, mejor dicho, de $\mathcal{A}$–sumabilidad, óptima, en el sentido de que sólo es superada por las funciones de la llamada clase trivial de saturación, e igualada por las funciones de la llamada clase de saturación.

Ya quedó claro en el capítulo introductorio que el ejemplo paradigmático seminal está representado por los operadores de Bernstein clásicos, para los que, grosso modo, la clase trivial está formada por las funciones lineales, mientras que la clase de saturación la componen las funciones con derivada en cierto espacio de Lipschitz.

Es el momento de estudiar este tópico en el ambiente general que ha presidido esta memoria y que ahora nuevamente recuperamos tratando de configurar un capítulo auto contenido.

Sea $[a, b]$ un intervalo compacto de la recta real, sea $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y sea $\mathcal{A} := \{A^{(n)}\} = \{a_{kj}^{(n)}\}$ como la tratada en la Definición 1.2. Sea también $\mathcal{L} = \{L_j : C^m[a, b] \to C^m[a, b]\}$ una sucesión de operadores lineales, y consideremos, para $f \in C^m[a,b]$ y $x \in [a,b]$, la sucesión doble

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a^{(n)}_{kj} D^m L_j f(x), \quad k,n = 1,2,\ldots$$

siempre que la serie sea convergente para todos $k,n = 1,2,\ldots$

Nuestro interés se centra en la saturación de los procesos de $\mathcal{A}$–sumabilidad de $D^m L_j f(x)$ hacia $D^m f(x)$, y para su estudio partiremos de los tres grandes supuestos que a continuación detallamos:

(P1) para cada $f \in C^m[a,b]$ y $x \in [a,b]$, $D^m L_j f(x)$ es $\mathcal{A}$-sumable a $D^m f(x)$, o equivalentemente

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} a^{(n)}_{kj} D^m L_j f(x)$$

converge a $D^m f$ cuando k tiende a infinito, uniformemente en n,

(P2) cada L_j es m-convexo, es decir, transforma funciones m-convexas en funciones m-convexas.

Recordamos una vez más que una función $f \in C^m[a,b]$ se dice m-convexa cuando $D^m f(t) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$; y señalamos un hecho evidente consecuencia directa de esta propiedad: para $f, g \in C^m[a,b]$,

$$D^m f(t) \leq D^m g(t)\ \forall t \in [a,b] \ \Rightarrow \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(t) \leq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} g(t)\ \forall t \in [a,b].$$

(P3) existe una sucesión de números reales positivos $\lambda_k \to +\infty$ y tres funciones estrictamente positivas w_0, w_1, w_2 definidas en (a,b) con $w_i \in C^{2-i}(a,b)$ tales que para $f \in C^m[a,b]$, $m+2$-veces diferenciable en algún entorno de un punto $x \in (a,b)$,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k \left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) \right) = \frac{1}{w_2} D^1 \left(\frac{1}{w_1} D^1 \left(\frac{1}{w_0} D^m f \right) \right)(x)$$

uniformemente en n.

La fórmula asintótica dada en (P3) informa sobre el orden de convergencia de $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x)$ hacia $D^m f(x)$; dice que no es mejor que λ_k^{-1} si el valor del límite allí dado es diferente de cero. Así, λ_k^{-1} es llamado orden óptimo de convergencia, y aquellas funciones que lo alcanzan forman la llamada clase de saturación.

El primer objetivo de este capítulo es precisamente localizar esa clase de saturación para los procesos de A–sumabilidad que estamos tratando. Un segundo objetivo se centra en encontrar una especie de resultado inverso de fórmulas asintóticas. Para los desarrollos seguiremos una línea de trabajo similar a la utilizada en [13] y [34], que a su vez se basan en destacados resultados pioneros de Lorentz y Schumaker [46] por un lado, y de Berens [9] por otro. La última sección de este capítulo contiene algunas aplicaciones.

Comenzamos ahora con una serie de observaciones y notaciones que utilizaremos a lo largo del capítulo.

En primer lugar, nos detenemos un momento para explicar por qué en (P3), en el valor del límite de la fórmula asintótica, se usa la expresión

$$\frac{1}{w_2} D^1 \left(\frac{1}{w_1} D^1 \left(\frac{1}{w_0} D^m f \right) \right) (x),$$

en lugar de aquella que se consideró en el capítulo anterior (véase el Teorema 3.3), a saber,

$$D^m \left(p D^2 f + q D^1 f \right) (x).$$

La razón radica en el simple hecho de que los resultados de saturación adoptarán un mejor aspecto, y las clases de saturación se expresarán con claridad a partir de las funciones w_i. Por otra parte, yendo al lado práctico, para las sucesiones de operadores lineales más clásicas con las que habitualmente se trabaja, a partir de la segunda expresión se puede recuperar la primera, y viceversa. A modo de ejemplo anotamos una tabla, que se explica por sí sola, con información sobre los operadores de Bernstein clásicos y también sobre los operadores de Kantorovich, no mencionados hasta el momento, cuya definición ahora recordamos: para

f integrable en $[0,1]$ y $x \in [0,1]$,

$$K_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} (n+1) \left(\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)} f(t)dt \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

	B_n	K_n
$p(t)$	$t(1-t)$	$t(1-t)$
$q(t)$	0	$1-2t$
$w_0(t)$	$1/t^{m-1}$	$1/t^m$
$w_1(t)$	$t^{m-2}/(1-t)^m$	$t^{2m}/(t(1-t))^{m+1}$
$w_2(t)$	$(1-t)^{m-1}$	$(1-t)^m$

En segundo lugar, si consideramos un subintervalo $J \subset [a,b]$ y fijamos un punto $c \in J$, es bien conocido que las funciones

$$\begin{aligned} u_0(t) &= w_0(t), \\ u_1(t) &= w_0(t) \int_c^t w_1(s)ds, \\ u_2(t) &= w_0(t) \int_c^t w_1(t_1) \int_c^{t_1} w_2(t_2)dt_2dt_1 \end{aligned} \tag{4.1}$$

constituyen en J un sistema de Tchebychev completo y extendido

$$\mathcal{T} = \{u_0, u_1, u_2\}.$$

Por otra parte $\{u_0, u_1\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden en la incógnita v (ver el valor del límite en la hipótesis (P3))

$$\mathcal{D}v := w_2^{-1} D^1 \left(w_1^{-1} D^1 \left(w_0^{-1} v \right) \right) = 0. \tag{4.2}$$

Además $\mathcal{D}u_2 = e_0$.

A partir de la terminología introducida por Bonsall [12] en 1950, todo lo anterior permite hablar de funciones sub-($\mathcal{D}$) en J. Esta noción, que ahora recordamos, jugará un papel importante en lo que sigue. Equivale a cierta convexidad generalizada, lo que también apuntamos en forma de proposición.

Definición 4.1 *Una función f definida en J se dice que es sub-$(\mathcal{D})$ en J si para cada $t, t_1, t_2 \in J$ tales que $t_1 < t < t_2$ se tiene que*

$$f(t) \leq F(f, t_1, t_2),$$

donde $F(f, t_1, t_2)$ es la única solución de (4.2) que toma los valores $f(t_1)$ y $f(t_2)$ respectivamente en t_1 y t_2.

Proposición 4.1 *Sea f una función continua en J. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

i) f es sub-$(\mathcal{D})$ en J,

ii) f es convexa en J respecto a $\{u_0, u_1\}$,

iii) para cualesquiera $t_1, t, t_2 \in J$ con $t_1 < t < t_2$

$$\begin{vmatrix} u_0(t_1) & u_1(t_1) & f(t_1) \\ u_0(t) & u_1(t) & f(t) \\ u_0(t_2) & u_1(t_2) & f(t_2) \end{vmatrix} \geq 0.$$

También a propósito del sistema de Tchebychev, presentamos el operador

$$\triangle_{\mathcal{T}} f = \frac{1}{w_1} D^1 \left(\frac{1}{w_0} f \right),$$

y luego la clase $Lip_M^{\mathcal{T}} 1$, $M \geq 0$, ambos introducidos y estudiados en [46], formada esta última por aquellas funciones f, tales que $\triangle_{\mathcal{T}} f$ es absolutamente continua y cumple

$$|\triangle_{\mathcal{T}} f(t_2) - \triangle_{\mathcal{T}} f(t_1)| \leq M \int_{t_1}^{t_2} w_2(s) ds, \tag{4.3}$$

que equivale, según allí se probó, a que f' sea absolutamente continua y se cumpla casi por doquier (c.p.d.) la desigualdad $|\mathcal{D} f| \leq M$.

Debemos observar que en el supuesto en que $w_2 = e_0$, entonces la pertenencia de una función f a la clase $Lip_M^{\mathcal{T}} 1$ equivale a que $\triangle_{\mathcal{T}} f$ pertenezca a la clase de Lipschitz clásica $Lip_M 1$.

Enunciamos ahora un lema, probado en [46], que conecta convexidad y condición de Liptschitz.

Lema 4.1 *Una función f continua en J pertenece a la clase $Lip_M^{\mathcal{T}}1$ si y solamente si las funciones $(-f+Mu_2)$ y $(f+Mu_2)$ son ambas convexas respecto a $\{u_0, u_1\}$.*

Finalmente, si $\alpha_k^{(n)}$ es una sucesión doble de números reales tales que $\lim_{k\to+\infty} \alpha_k^{(n)} = 0$ uniformemente en $n \in \mathbb{N}$, y β_k es otra sucesión de números reales con $\lim_{k\to+\infty} \beta_k = 0$, entonces utilizaremos la notación

$$\alpha_k^{(n)} = o^{(n)}(\beta_k)$$

para indicar que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\alpha_k^{(n)}}{\beta_k} = 0 \text{ uniformemente para } n \in \mathbb{N}.$$

4.2. Resultados de Saturación

Una vez establecido el marco general de trabajo, en esta sección obtenemos resultados locales de saturación en los procesos de aproximación de $\mathcal{A}_{D^m\circ\mathcal{L}}^{k,n} f(x)$ hacia $D^m f(x)$.

En primer lugar presentamos tres lemas, y detallamos sus demostraciones, que siguen los patrones de los resultados respectivos establecidos para la convergencia usual en [34].

Lema 4.2 *Sea J un subintervalo abierto de $[a,b]$. Sea $g, h \in C(J)$ y $t_0, t_1, t_2 \in J$ tal que $t_0 \in (t_1, t_2)$, $g(t_1) = g(t_2) = 0$ y $g(t_0) > 0$. Entonces existe un número real $\epsilon < 0$, una solución de la ecuación diferencial (4.2) en J, digamos z, y un punto $x \in (t_1, t_2)$ tal que*

$$\begin{aligned} \epsilon h(t) + z(t) &\geq g(t) \quad \forall t \in [t_1, t_2], \\ \epsilon h(x) + z(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Demostración. Sea y una solución de (4.2) estrictamente positiva en (t_1, t_2) y sea δ lo suficientemente pequeño para que

$$g(t_0) - \delta\left(F(h, t_1, t_2)(t_0) - h(t_0)\right) > 0.$$

Entonces la función
$$\frac{g - \delta\left(F(h, t_1, t_2) - h\right)}{y}$$
es continua en $[t_1, t_2]$, se anula en ambos extremos de ese intervalo y es estrictamente positiva en t_0; por consiguiente alcanza su máximo M en un punto $x \in (t_1, t_2)$. De esta forma, en el intervalo $[t_1, t_2]$

$$\delta\left(F(h, t_1, t_2) - h\right) + My \geq g$$

y en el punto x

$$\delta\left(F(h, t_1, t_2)(x) - h(x)\right) + My(x) = g(x).$$

La demostración se puede concluir a partir de aquí tomando $\epsilon = -\delta$ y $z = \delta F(h, t_1, t_2) + My$.

$\square$

El lema anterior resulta ser una extensión de un resultado técnico clave publicado por Bajsanski y Bojanić en [7], denominado lema de la parábola, que dio nombre a todo un método a partir de la cual se desarrolló el estudio de la saturación en sucesiones de operadores lineales positivos. Está línea de trabajo fue secundada por Amelkovich [5] y por Mühlbach [52], y rematada en el trabajo sobresaliente ya citado de Lorentz y Schumaker [46].

Es de interés mencionar que, de forma paralela, en la década de los 70, se exploraron otras dos vías de ataque para el estudio de la saturación. La llamada técnica funcional analítica, iniciada por Lorentz [45] y aplicada a situaciones particulares por DeLuca [22] y por Suzuki, Ikeno y Watanabe [65, 66], y la técnica basada en teoría de semigrupos, iniciada por Micchelli [49] y desarrollada por Schnabl [59] y por Karlin y Ziegler [38].

Lema 4.3 *Sea $f \in C^m[a, b]$. Si $D^m f$ es una solución de la ecuación diferencial (4.2) en algún entorno de $x \in (a, b)$, entonces*

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) = o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Demostración. Es una consecuencia directa de la propiedad (P3). $\square$

Lema 4.4 *Sea $f, g \in C^m[a,b]$ y sea $x \in (a,b)$. Supongamos que existe un entorno N_x de x donde $D^m f \leq D^m g$. Entonces*

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) \leq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} g(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Demostración. A partir de las hipótesis es claro que si consideramos una función $w \in C^m[a,b]$ tal que $D^m w = \text{máx}\{D^m f - D^m g, 0\}$, entonces se tiene la desigualdad $D^m f \leq D^m g + D^m w$ en todo el intervalo $[a,b]$. Aplicando (P2) y evaluando después en x, se llega a que

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) \leq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} g(x) + \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} w(x).$$

Ahora bien, como $D^m w$ se anula en un entorno de x, entonces $D^m w$ es solución de (4.2), y por el Lema 4.3 tenemos que $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} w(x) = o^{(n)}(\lambda_k^{-1})$, lo que permite concluir la demostración. □

Las dos proposiciones siguientes, de interés por sí mismas, preparan el camino para demostrar los resultados anunciados. Un papel importante lo juega la noción de la convexidad respecto a $\{u_0, u_1\}$, que aquí relacionaremos con la convergencia monótona del proceso.

Proposición 4.2 *Sea $f \in C^m[a,b]$, entonces*

a) *$D^m f$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a,b) si y solo si para cada $x \in (a,b)$*

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) \geq D^m f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

b) *Si $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) \geq \mathcal{A}^{k+1,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1})$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $D^m f$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a,b).*

Demostración. a) Sea $x \in (a,b)$. Suponemos que $D^m f$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a,b) y sea $z \in \langle u_0, u_1 \rangle$ tal que

$$z(x) = D^m f(x), \quad D^1 z(x) = D^1_+ \left(D^m f\right)(x)$$

(aquí D^1_+ denota el operador derivada primera por la derecha). Entonces, a partir de [46, Lemma 2.2] (que es una extensión natural de una propiedad bien conocida de las funciones convexas en el sentido clásico), tenemos que $z(t) \leq D^m f(t)$ para todo $t \in (a,b)$, y directamente usando el Lema 4.4, si tomamos $Z \in C^m[a,b]$ tal que $D^m Z = z$, tenemos

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} Z(x) \leq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}),$$

o equivalentemente

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} Z(x) - D^m Z(x) \leq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Finalmente aplicamos el Lema 4.3 a la función Z y obtenemos la desigualdad buscada:

$$\mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) \geq D^m f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Para probar la otra implicación, procedemos por reducción al absurdo. Suponemos por tanto que $D^m f$ no es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a,b). Entonces existen tres puntos x_1, x_2, s tales que

$$a < x_1 < s < x_2 < b, \quad \text{y} \quad F(D^m f, x_1, x_2)(s) < D^m f(s),$$

donde, recordemos, $F(D^m f, x_1, x_2)$ es la única solución de (4.2) que toma los valores $D^m f(x_1)$ y $D^m f(x_2)$ respectivamente en x_1 y x_2, o equivalentemente, es la única función del espacio de $\langle u_0, u_1 \rangle$ que interpola $D^m f$ en x_1 y x_2.

Ahora aplicamos el Lema 4.2 con $h = u_2$ y $g = D^m f - F(D^m f, x_1, x_2)$ para deducir la existencia de un $\epsilon < 0$, de una solución $\hat{z}$ de (4.2) y de un punto $s_1 \in [x_1, x_2]$ cumpliendo

$$\epsilon u_2(t) + \hat{z}(t) \geq D^m f(t) - F(D^m f, x_1, x_2)(t) \quad \forall t \in (x_1, x_2), \tag{4.4}$$

y

$$\epsilon u_2(s_1) + \hat{z}(s_1) = D^m f(s_1) - F(D^m f, x_1, x_2)(s_1). \tag{4.5}$$

Tomemos $U_2, \hat{Z}, \hat{S} \in C^m[a,b]$ tales que $D^m U_2 = u_2$, $D^m \hat{Z} = \hat{z}$ y $D^m \hat{S} = F(D^m f, x_1, x_2)$ en (a,b), y apliquemos el Lema 4.4 teniendo en cuenta (4.4). Obtenemos que

$$\epsilon \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} U_2(s_1) + \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} \hat{Z}(s_1) \geq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(s_1) - \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} \hat{S}(s_1) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Después de introducir la igualdad (4.5) llegamos a esta otra desigualdad

$$\epsilon(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}U_2(s_1) - D^mU_2(s_1)) + \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}\hat{Z}(s_1) - D^m\hat{Z}(s_1)$$

$$\geq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(s_1) - D^mf(s_1) - (\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}\hat{S}(s_1) - D^m\hat{S}(s_1)) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Finalmente, multiplicando por λ_k y aplicando (P3) a U_2 (recuérdese que $\mathcal{D}(D^mU_2) = \mathcal{D}u_2 = e_0$) y a $\hat{Z}$ y $\hat{S}$ (nótese que $\mathcal{D}(D^m\hat{Z}) = \mathcal{D}\hat{z} = 0$, $\mathcal{D}(D^m\hat{S}) = \mathcal{D}(F(D^mf, x_1, x_2)) = 0$), obtenemos la siguiente desigualdad que contradice nuestra suposición (pues ϵ era negativo) y prueba lo que queríamos:

$$\epsilon \geq \mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(s_1) - D^mf(s_1) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

b) Si $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(x) \geq \mathcal{A}^{k+1,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1})$ para $x \in (a,b)$, entonces directamente de (P1) tenemos que $\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(x) \geq D^mf(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1})$; luego basta utilizar **a)** para completar la demostración.

□

Proposición 4.3 *Sea M una constante positiva y sean $f, w \in C^m[a,b]$. Entonces las siguientes expresiones son equivalentes:*

(i) *$MD^mw + D^mf$ y $MD^mw - D^mf$ son convexas respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a,b),*

(ii) *para cada $x \in (a,b)$,*

$$\left|\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(x) - D^mf(x)\right| \leq M\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}w(x) - D^mw(x)\right) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).$$

Demostración. Basta aplicar la Proposición 4.2 sustituyendo f por $Mw + f$ y por $Mw - f$.

□

Haciendo elecciones apropiadas de la función w aparecen resultados de saturación. Mostramos dos a continuación. En el primero, la clase de saturación se expresa en términos de los espacios de Lipschitz clásicos, mientras que en el segundo se busca que aparezca el operador diferencial que está presente en la fórmula asintótica.

Teorema 4.1 *Sea $f \in C^m[a,b]$. Entonces*

$$\lambda_k \left| \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) \right| \leq \frac{M}{w_2(x)} + o^{(n)}(1), \quad x \in (a,b)$$

si y solo si, en (a,b),

$$\triangle_{\mathcal{T}} D^m f = w_1^{-1} D^1 (w_0^{-1} (D^m f) \in Lip_M 1.$$

Demostración. Tomamos $w \in C^m[a,b]$ tal que

$$D^m w(t) = w_0(t) \int_c^t w_1(t_1) \int_c^{t_1} dt_2 dt_1$$

y consideramos el sistema de Tchebychev

$$\mathcal{T}^* = \{u_0, u_1, D^m w\},$$

que se obtiene a partir de las funciones w_0, w_1 y e_0 según (4.1).

Ahora aplicamos la Proposición 4.3 para deducir, usando (P3) y teniendo en cuenta la igualdad $\mathcal{D}(D^m w) = w_2^{-1}$, que

$$\lambda_k \left| \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) \right| \leq \frac{M}{w_2(x)} + o^{(n)}(1), \quad x \in (a,b)$$

si y solo si $D^m f + M D^m w$ y $-D^m f + M D^m w$ son convexas respecto a $\{u_0, u_1\}$, lo que a su vez, utilizando el Lema 4.1, es equivalente a que $D^m f \in Lip_M^{\mathcal{T}^*} 1$. La demostración se concluye tiendo en cuenta la definición de estos espacios de Lipschitz dada en (4.3) y el hecho de que $\triangle_{\mathcal{T}} = \triangle_{\mathcal{T}^*}$.

□

Teorema 4.2 *Sea $f \in C^m[a,b]$. Entonces*

$$\lambda_k \left| \mathcal{A}^{k,n}_{D^m \circ \mathcal{L}} f(x) - D^m f(x) \right| \leq M + o^{(n)}(1), \quad x \in (a,b)$$

si y solo si,

$$\frac{1}{w_2} D^1 \left(\frac{1}{w_1} D^1 \left(\frac{1}{w_0} D^m f \right) \right) \leq M \quad c.p.d. \ en \ (a,b).$$

Demostración. Basta proceder de forma análoga a cómo se ha hecho en la demostración del teorema anterior. En este caso hay que considerar $w \in C^m[a,b]$ tal que

$$D^m w(t) = w_0(t) \int_c^t w_1(t_1) \int_c^{t_1} w_2(t_2) dt_2 dt_1.$$

□

4.3. Aplicaciones

En esta sección ilustramos el uso de los resultados anteriores. Haremos uso de las fórmulas asintóticas obtenidas en el capítulo anterior. Nos ceñimos a los operadores clásicos de Bernstein y a la modificación de ellos estudiada entonces, y no vamos allá de considerar la casi convergencia, como caso particular de $\mathcal{A}$-sumabilidad. Los resultados se establecen sin sus demostraciones, pues sólo requerirían algunas sencillas operaciones y tener cuenta las cálculos que se hicieron en el capítulo anterior.

4.3.1. Saturación de los operadores de Bernstein y casi convexidad

Corolario 4.1 *Sea $M > 0$ y $f \in C^3[0,1]$, entonces*

$$\frac{k}{\log k} \left| \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j f(x) - D^3 f(x) \right| \leq M \frac{1}{2(1-x)^2} + o^{(n)}(1), \;\; x \in (0,1)$$

si y solo si

$$(e_1 - e_2)^3 \left(\frac{1}{e_2} D^4 f + \frac{2}{e_3} D^3 f \right) \in Lip_M 1 \;\; en \; (0,1).$$

Corolario 4.2 *Sea $M > 0$ y $f \in C^3[0,1]$, entonces*

$$\frac{k}{\log k} \left| \sum_{j=n}^{n+k-1} \frac{1}{k} D^3 B_j f(x) - D^3 f(x) \right| \leq M + o^{(n)}(1), \;\; x \in (a,b)$$

si y solo si

$$|D^3((e_1 - e_2) D^2 f)| \leq M \quad c.p.d. \; en \; (0,1).$$

4.3.2. Saturación de los operadores modificados de Bernstein y casi convexidad

Aquí consideramos la sucesión de operadores lineales L_j dada en 3.3.3.

Corolario 4.3 *Sea $M > 0$ y $f \in C[0,1]$, entonces*

$$\frac{k}{\log k}\left|\sum_{j=n}^{n+k-1}\frac{1}{k}L_j f(x) - f(x)\right| \leq M\frac{x(1-x)}{2} + o^{(n)}(1),\ \ x \in (0,1)$$

si y solo si

$$D^1 f \in Lip_M 1 \ \ en\ (0,1).$$

Corolario 4.4 *Sea $M > 0$ y $f \in C[0,1]$, entonces*

$$\frac{k}{\log k}\left|\sum_{j=n}^{n+k-1}\frac{1}{k}L_j f(x) - f(x)\right| \leq M + o^{(n)}(1),\ \ x \in (0,1)$$

si y solo si

$$|((e_1 - e_2)D^2 f)| \leq M \quad c.p.d.\ \ en\ (0,1).$$

4.4. Un resultado inverso para las fórmulas asintóticas

Esta sección está dedicada a dar un resultado inverso de la fórmula asintótica dada al comienzo del capítulo en (P3). El planteamiento aproximado del problema sería el siguiente: asumimos la existencia de una función g tal que para $f \in C^m[a,b]$,

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x)) = g(x) \text{ uniformemente en } n,$$

y ante eso, nos hacemos las siguientes preguntas:

¿es f $m+2$-veces diferenciable en x?

¿es cierto que $\mathcal{D}(D^m f) = g$?

Las respuestas, afirmativas en cierto sentido, representan el contenido de este sección. Su resultado principal sigue la linea de [34]. Comenzamos con dos lemas que se precisan, uno de ellos bastante técnico.

Lema 4.5 *Sea $f \in C^m[a,b]$ y J un subintervalo abierto de $[a,b]$. Si para cada $x \in J$*

$$\lim_{k\to+\infty} \sup \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x)) \geq 0$$

uniformemente en n, entonces $D^m f$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en J.

Demostración. Si suponemos lo contrario de la tesis, uno encuentra $t_0, t_1, t_2 \in J$ con $t_0 \in (t_1, t_2)$ tal que

$$D^m f(t_0) > F(D^m f, t_1, t_2)(t_0).$$

Sea $v \in C^m[a,b]$ tal que para $t \in [t_1, t_2]$

$$D^m v(t) = w_0(t) \int_{t_1}^{t} w_1(s) \int_{t_1}^{s} w_2(\nu) d\nu ds.$$

Entonces el Lema 4.2, aplicado a $g = D^m f - F(D^m f, t_1, t_2)$ y $h = D^m v$, muestra la existencia de una solución de (4.2) en J, digamos z, un número real $\epsilon < 0$ y un punto $x \in (t_1, t_2)$ tales que en $[t_1, t_2]$

$$\epsilon D^m v(t) + z(t) - D^m f(t) + F(D^m f, t_1, t_2)(t) \geq 0, \tag{4.6}$$

y en el punto x

$$\epsilon D^m v(x) + z(x) - D^m f(x) + F(D^m f, t_1, t_2)(x) = 0. \tag{4.7}$$

Sean $v_z, v_F \in C^m[a,b]$ tales que en (t_1, t_2)

$$\begin{aligned} D^m v_z &= z \\ D^m v_F &= F(D^m f, t_1, t_2). \end{aligned}$$

De esta manera, aplicando el Lema 4.4 a la función $h = \alpha v + v_z - f + v_F$ y al entorno $N_x = (t_1, t_2)$, obtenemos a partir de (4.6) y de (4.7) que

$$\epsilon\lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} v - D^m v)(x) + \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} v_z - D^m v_z)(x) - \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f - D^m f)(x)$$

$$+\lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}v_F - D^m v_F)(x) \geq 0 + o^{(n)}(1).$$

Para concluir, basta usar (P3) con las funciones v, v_z y v_F para obtener la siguiente desigualdad que contradice la hipótesis del lema:

$$\lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f - D^m f)(x) \leq \epsilon + o^{(n)}(1).$$

□

Lema 4.6 *Sea $x \in (a,b)$, $h \in C[a,b]$ y $H \in C^m[a,b]$ tal que para todo $t \in (a,b)$, $D^m H(t) = w_0(t)\int_a^t h(s)w_1(s)ds$. Sea también $W_i(t) = \int_a^t w_i(s)ds$, $i = 1, 2$. Entonces, uniformemente en n,*

$$\lim\sup_{k\to+\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}H(x) - D^m H(x)) \leq \lim\sup_{t\to x} \frac{h(t)-h(x)}{W_2(t)-W_2(x)}$$

y

$$\lim\inf_{t\to x} \frac{h(t)-h(x)}{W_2(t)-W_2(x)} \leq \lim\inf_{k\to+\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}H(x) - D^m H(x)).$$

Demostración. Solo probaremos la primera desigualdad. Para la segunda se puede proceder de forma análoga. Sea

$$l = \lim\sup_{t\to x} \frac{h(t)-h(x)}{W_2(t)-W_2(x)} = \lim\sup_{t\to x} \frac{h(t)-h(x)}{(t-x)w_2(x)}.$$

Si $l = +\infty$, entonces no hay nada que probar. En caso contrario, para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon, x)$ tal que si $|t-x| < \delta$, entonces

$$h(t) - h(x) \leq (\epsilon + l)(t-x)w_2(x),$$

y directamente

$$\begin{aligned}
\int_x^t (h(s)-h(x))\, w_1(s)ds &= \int_x^t h(s)w_1(s)ds - h(x)\int_x^t w_1(s)ds \\
&= \frac{D^m H(t)}{w_0(t)} - \frac{D^m H(x)}{w_0(x)} - h(x)\int_x^t w_1(s)ds \\
&\leq (\epsilon + l)w_2(x)\int_x^t (s-x)w_1(s)ds.
\end{aligned}$$

Multiplicando por $w_0(t)$ y tomando $v_0, v_1, v_2 \in C^m[a,b]$ tal que para todo $t \in (x-\delta, x+\delta)$,

$$\begin{aligned}
D^m v_0(t) &= w_0(t)\\
D^m v_1(t) &= w_0(t)W_1(t)\\
D^m v_2(t) &= w_2(x)w_0(t)\int_x^t (s-x)w_1(s)ds,
\end{aligned}$$

se tiene que en el intervalo $(x-\delta, x+\delta)$,

$$D^m\left(H - \frac{D^m H(x)v_0}{w_0(x)} - h(x)\left(v_1 - W_1(x)v_0\right)\right) \le (\epsilon + l)D^m v_2.$$

Aplicando el Lema 4.4 e introduciendo el término nulo

$$-D^m H(x) + \frac{D^m H(x)}{w_0(x)}D^m v_0(x) - D^m v_1(x) + W_1(x)D^m v_0(x),$$

se obtiene que

$$\begin{gathered}
\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}H - D^m H\right)(x) - \frac{D^m H(x)}{w_0(x)}\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}v_0 - D^m v_0\right)(x)\\
-h(x)\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}v_1 - D^m v_1\right)(x) - h(x)W_1(x)\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}v_0 - D^m v_0\right)(x)\\
\le (\epsilon + l)\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}v_2(x) + o^{(n)}(\lambda_k^{-1}).
\end{gathered}$$

Finalmente, para terminar la demostración basta usar (P3) con v_0, v_1 y v_2, teniendo presente que v_0 y v_1 son soluciones de (4.2) en $(x-\delta, x+\delta)$ y que

$$\frac{1}{w_2}D^1\left(\frac{1}{w_1}D^1\left(\frac{1}{w_0}D^m v_2\right)\right)(x) = 1.$$

Se obtiene que para todo $\epsilon > 0$, uniformemente en n,

$$\limsup_{k\to\infty} \lambda_k\left(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}H - D^m H\right)(x) \le \epsilon + l.$$

$\square$

Teorema 4.3 *Sea $f \in C^m[a,b]$ y sea ψ una función definida e integrable Lebesgue (a,b) tal que para cada $x \in (a,b)$*

$$\liminf_{k\to+\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}f(x) - D^m f(x)) \le \psi(x)$$

y

$$\operatorname*{lím\,sup}_{k\to+\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} f(x) - D^m f(x)) \geq \psi(x).$$

Entonces $\psi = \mathcal{D}(D^m f)$ *c.p.d. en* (a,b).

Demostración. Sea

$$\Psi(t) = w_0(t)\int_a^t w_1(s)\int_a^s \psi(\nu)w_2(v)d\nu ds$$

y sea $G \in C^m[a,b]$ tal que para todo $t \in (a,b)$

$$D^m G(t) = D^m f(t) - \Psi(t).$$

Para $q \in \mathbb{N}$, sean m_q y M_q respectivamente, las funciones menor y mayor de ψ con respecto a w_2 tales que

$$\left| m_q(t) - \int_a^t \psi(s)w_2(s)ds \right| < \frac{1}{q},\ t \in (a,b),$$

$$\left| M_q(t) - \int_a^t \psi(s)w_2(s)ds \right| < \frac{1}{q},\ t \in (a,b),$$

cuya existencia está garantizada a partir de la teoría de la integración de Lebesgue (ver [58]). En particular se tiene que

$$\operatorname*{lím\,sup}_{t\to x} \frac{m_q(t) - m_q(x)}{W_2(t) - W_2(x)} \leq \psi(x) \leq \operatorname*{lím\,ínf}_{t\to x} \frac{M_q(t) - M_q(x)}{W_2(t) - W_2(x)},$$

donde W_2 está dado en el enunciado del Lema 4.6. A partir de lo supuesto y de este mismo lema, si consideramos $\overline{m}_q \in C^m[a,b]$ tal que para todo $t \in (a,b)$ $D^m\overline{m}_q(t) = w_0(t)\int_a^t m_q(s)w_1(s)ds$, tenemos que, uniformemente en $n \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname*{lím\,sup}_{k\to\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}\overline{m}_q - D^m\overline{m}_q)(x) \leq \operatorname*{lím\,sup}_{t\to x} \frac{m_q(t) - m_q(x)}{W_2(t) - W_2(x)}$$

$$\leq \psi(x) \leq \operatorname*{lím\,sup}_{k\to\infty} \lambda_k(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}} L_n f - f)(x),$$

y por lo tanto también

$$\operatorname*{lím\,sup}_{k\to\infty} \lambda_k\Big(\mathcal{A}^{k,n}_{D^m\circ\mathcal{L}}(f - \overline{m}_q) - D^m(f - \overline{m}_q)\Big)(x) \geq 0.$$

Por el Lema 4.5, obtenemos que para cada $q \in \mathbb{N}$, $D^m\left(f - \overline{m}_q\right)$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a, b). Haciendo que q tienda a infinito se deduce que $D^m G$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a, b). Si procedemos de esta manera con M_q concluimos que $-D^m G$ es convexa respecto a $\{u_0, u_1\}$ en (a, b) también. Por lo tanto, en este intervalo, $\mathcal{D}(D^m G) = 0$, y consecuentemente, c.p.d. en (a, b),

$$\mathcal{D}(D^m f) = \mathcal{D}(\Psi),$$

desde donde obtenemos la demostración recordando la definición de Ψ al principio de la demostración y del operador $\mathcal{D}$ en (4.2), y usando finalmente (P3).

$\square$

Capítulo 5

Nueva línea de trabajo: convergencia estadística

5.1. A-sumabilidad B-estadística

Comenzamos ahora, sin justificación alguna, presentado una nueva noción de convergencia: la A-sumabilidad B-estadística.

Como en capítulos anteriores $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots$ es una matriz de sumabilidad infinita y, recordemos, para una sucesión dada de números reales $x = (x_j)$, la A-transformada de x es otra sucesión, denotada ahora mediante $Ax = ((Ax)_i)$, cuyos elementos están definidos por

$$(Ax)_i := \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j,$$

siempre que la serie converja para cada i. Supondremos también que A es regular, esto es, Ax converge a ℓ (cuando $i \to +\infty$) siempre que x converja a ℓ (cuando $j \to +\infty$).

Sea también $B = (b_{nk})$, $n, k = 1, 2, \ldots$ una matriz de sumabilidad regular con entradas no negativas.

Para un conjunto de números naturales dado $K \subset \mathbb{N}$, se define la B-densidad de K, denotada por $\delta_B(K)$, mediante

$$\delta_B(K) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} (B\chi_K)_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} (\chi_K)_k \,,$$

donde $\chi_K = ((\chi_K)_k)$ denota la sucesión característica de K, es decir,

$$(\chi_K)_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in K; \\ \\ 0 & \text{si } k \notin K. \end{cases}$$

Esta definición fue introducida por Freedman and Sember [32] como generalización de la densidad natural, que aquí se recupera cuando B coincide con la matriz de Cesàro de orden uno, $(C, 1)$, en cuyo caso $\delta_B(K)$ se denota simplemente mediante $\delta(K)$ y obedece a la siguiente expresión:

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#K_n}{n},$$

donde $K_n = \{k \in K : k \leq n\}$ y $\#K_n$ se refiere a su cardinalidad.

Definición 5.1 *Se dice que una sucesión de números reales $x = (x_j)$ es A-sumable B-estadísticamente hacia ℓ si para cada $\epsilon > 0$, la B-densidad de $K_\epsilon := \{i : |(Ax)_i - \ell| \geq \epsilon\}$ es cero, es decir,*

$$\delta_B(K_\epsilon) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\in K_\epsilon} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} (B\chi_{K_\epsilon})_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} (\chi_{K_\epsilon})_k = 0.$$

La noción de A-sumabilidad B-estadística ha sido presentada recientemente en [29] como generalización de una larga lista de variantes y extensiones de la convergencia estadística clásica, introducida por Fast en 1951 [31] que, por cierto, aparece tras considerar en la definición de arriba $A = I$ y $B = (C, 1)$.

Merece la pena mencionar otros casos particulares destacados de este concepto: si $A = B = I$, aparece la convergencia clásica; si $A = I$, entonces la A-sumabilidad B-estadística se reduce a la llamada convergencia B-estadística; si $B = (C, 1)$, entonces se convierte en la A-sumabilidad estadística; finalmente, si $B = I$, se recupera la sumabilidad matricial ordinaria.

Debe advertirse que otras muchas elecciones particulares de matrices A y B dan lugar a situaciones bien establecidas y estudiadas, y que hay una literatura muy extensa que trata sobre este asunto, al que se le puede seguir la pista con facilidad y accesibilidad, consultando por ejemplo los trabajos [29, 56] y sus referencias correspondientes.

5.2. A-sumabilidad B-estadística en teoría de aproximación

Una vez descrita la noción generalizada de convergencia dada por la A-sumabilidad B-estadística, y al hilo de todo lo expuesto en esta memoria en los capítulos precedentes, surge de forma natural la cuestión de incorporar este nuevo concepto a la teoría de aproximación mediante sucesiones de operadores lineales y seguir una ruta similar a la estudiada.

Ya debió quedar claro que la idea de examinar diferentes nociones de convergencia generalizada en teoría de aproximación resulta ser un patrón de trabajo que han seguido un buen número de investigadores durante muchos años. El arquetipo está representado por los ya mencionados estudios de King y Swetits [40] y de Mohapatra [50], quienes trataron la casi convergencia de Lorentz [44] y establecieron resultados cualitativos y cuantitativos de tipo Korovkin.

Observamos en este momento que la casi convergencia no es un caso particular de la A-sumabilidad B-estadística.

Respecto a la noción clásica de convergencia estadística, Gadjiev y Orhan en 2002 [33] fueron los primeros que la examinaron en teoría de aproximación. En concreto, establecieron los resultados más básicos de tipo Korovkin para sucesiones de operadores positivos. En esta línea, y muy recientemente, Mursaleen y Kiliçman [56] desarrollaron un trabajo similar bajo el marco más general de la A-sumabilidad B-estadística con la que iniciábamos este capítulo.

Cronológicamente, entre los dos trabajos recién citados uno encuentra en la literatura muchos otros tratando esta misma materia a través de un número importante de variantes y generalizaciones de la convergencia estadística clásica. Por ejemplo, la A-sumabilidad estadística y el caso particular de la $(C, 1)$-sumabilidad estadística se han estudiado en [23] y en [51] respectivamente, y la convergencia B-estadística se ha tratado por ejemplo en [26, 28, 25]. Por consiguiente, nos estamos refiriendo a materia objeto de una intensa investigación hoy en día.

Cuestiones aún por explorar, con las que queremos cerrar esta tesis, se refieren a la incursión en los tópicos propios de la teoría de aproximación de tipo Korovkin que van más allá del establecimiento de los primeros resultados cualitativos y cuantitativos, tratados en buena medida en los artículos mencionados, los primeros, recordemos, para comprobar si una sucesión de operadores lineales define un proceso de aproximación en cierto espacio de funciones, y los segundos para estimar las tasas de convergencia general de esos procesos.

Por consiguiente, proponemos trabajar sobre todo lo relacionada con fórmulas asintóticas y con resultados de saturación en los procesos de A-sumabilidad B-estadística de $\mathcal{D}L_j f(x)$ hacia $\mathcal{D}f(x)$, para las funciones f de cierto espacio y para cierto operador diferencial $\mathcal{D}$.

En esta dirección ya podemos anotar algún avance ajeno, de Aral y Duman en [6]. Se trata de un estudio realizado para el caso particular de los operadores de Szász-Mirakjan-Kantorovich SMK_n que, por propósitos de completitud, aquí definimos:

$$SMK_n f(x) = \frac{n}{b_n} \sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x) \int_{kb_n/n}^{(k+1)b_n/n} f(t)dt, \quad x \in [0, \infty),$$

donde b_n es una sucesión de números reales positivos tal que b_n/n converge en sentido B-estadístico a cero y

$$P_{n,k}(x) = e^{-nx/b_n} \frac{(nx)^k}{k! b_n^k}.$$

Un segundo objetivo que dejamos anotado se refiere a la búsqueda de una suerte de unificación de todos los resultados y herramientas utilizados en todo lo referido a la convergencia estadística y sus extensiones y variantes. En particular, habría que discutir sobre la forma más adecuada de medir la velocidad de estos procesos de aproximación.

Finalmente, dijimos que la casi convergencia no era un caso particular de la A-sumabilidad B-estadística. Sí lo sería, no obstante, de lo que podríamos bautizar como $\mathcal{A}$-sumabilidad B-estadística que, creemos, no requiere explicación alguna. Evidentemente, al escribir $\mathcal{A}$ en lugar de A, queremos referirnos a una sucesión de matrices infinitas asociadas a la sumabilidad.

Sin duda, este último sería el mejor marco para establecer la referida unificación que ponga orden y, por qué no, cierre la investigación alrededor de la materia que nos ha ocupado en esta memoria.

Notación

- Como es habitual utilizamos los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ para denotar respectivamente los conjuntos de números naturales, enteros y reales.

- Un conjunto C se dice que es un cono si para cada $f \in C$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, se tiene que $\alpha f \in C$.

- Denotamos por $\mathbb{P}_k$ el espacio de los polinomios reales de grado a lo sumo k, es decir,

$$\mathbb{P}_k = \langle e_0, e_1, \ldots, e_k \rangle, \text{ siendo } \mathbf{e_i(t)} = t^i \ \forall t \in \mathbb{R}$$

Mediante $\mathbf{e_i^x(t)}$ denotamos el polinomio $(t - x)^i$.

- Un **operador** es una aplicación entre dos espacios funcionales. Un operador L se dice **lineal** si en su dominio, junto con dos funciones cualesquiera f y g están también las funciones $\alpha f + \beta g$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y además,

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g).$$

Normalmente al hacer actuar un operador sobre una función no escribimos los paréntesis, es decir, $L(f) = Lf$.

- Con $\mathbf{D^i}$ denotamos el operador derivada i-ésima, entendiendo que D^0 representa el operador identidad. Así con $\mathbf{D^i} f(x)$ denotamos la derivada i-ésima de f en el punto x y mediante $\mathbf{D^i} f$ la función derivada i-ésima de f

- $\mathbf{D^1_- f}$ y $\mathbf{D^1_+ f}$ representan respectivamente la derivada por la izquierda y por la derecha de una función f.

• Una función es **convexa respecto de un conjunto de funciones linealmente independientes** $\{u_0, u_1, \ldots u_{k-1}\}$ en un intervalo (a, b) si para cualesquiera $a < t_1 < t_2 < \ldots t_k < b$ se cumple que

$$\begin{vmatrix} u_0(t_1) & \cdots & u_{k-1}(t_1) & f(t_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_0(t_k) & \cdots & u_{k-1}(t_k) & f(t_k) \end{vmatrix} \geq 0.$$

• Una función se dice **k-convexa** si su derivada k-ésima es no negativa.

• Decimos que un operador L es **k-convexo** si transforma funciones k-convexas en funciones k-convexas. Como caso particular aparecen los operadores positivos, crecientes o simplemente convexos ($k = 0$, $k = 1$, $k = 2$)

• $\mathbf{C^k(X)}$ denota el conjunto de funciones reales k-veces derivables y con derivada k-ésima continua en X.

• Se define el conjunto

$$\mathbf{C^k_E(X)} = \{f \in C^k(X) : |f| < c_1 e^{c_2 t}, \text{ para ciertos } c_1, c_2 > 0\}.$$

• $\mathbf{L_1(X)}$ denota el conjunto de funciones integrables Lebesgue en en intervalo real X.

• Se define $\mathbf{H^i_X} = \{f \in C^i(X) : D^i f \geq 0 \text{ en } X\}$.

• Un operador $L : C^k(J) \to C^k(I)$ se dice **casi convexo de orden $\mathbf{k-1}$** si existe $\Omega \subset \{0, 1, \ldots, k-1\}$ tal que para toda función $f \in \bigcap_{j \in \Omega \cup \{k\}} H^j_J$, se tiene que $Lf \in H^k_I$.

• Sean h y k dos números enteros verificando $0 \leq h \leq k$ y sea $\sigma = \{\sigma_i : h \leq i \leq k\}$ con $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$ y tal que $\sigma_h \sigma_k \neq 0$. Para un intervalo real X se define el siguiente conjunto de funciones:

$$\mathbf{C^X_{h,k}}(\sigma) = \{f \in C^k(X) : \forall i \in \{h, \ldots, k\},\ \sigma_i D^i f \geq 0\}.$$

• Para una función $f \in C(X)$, se define el **primer módulo de continuidad** con argumento $\delta \geq 0$ mediante

$$\omega(f,\delta) = sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X,\ |x - y| \leq \delta\}.$$

• La clase $\mathbf{Lip_M}\alpha$ en (a,b), con $M \geq 0$, es el conjunto de funciones que verifican que $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ con $x, y \in (a,b)$.
$Lip\ \alpha = \bigcup_{M\geq 0} Lip_M\alpha$.

• $\mathbf{f_{|(a,b)}}$ es la restricción de la función f al intervalo (a,b).

• Dadas dos sucesiones de números reales A_n, B_n, $B_n \neq 0$

$\mathbf{A_n} = \mathbf{o}(\mathbf{B_n})$ si $\frac{A_n}{B_n}$ es convergente a cero.

$\mathbf{A_n} = \mathcal{O}(\mathbf{B_n})$ si $\frac{A_n}{B_n}$ es acotada.

• Si $U_n = \{u_0, \ldots, u_n\}$ es un conjunto de funciones derivables n veces con derivada n-ésima continua en un intervalo $[a,b]$, se dice que forma un **sistema de Tchebycheff extendido** en ese intervalo, si cada función no idénticamente nula de la forma $u = \sum_{i=0}^n a_i u_i, \quad a_i \in \mathbb{R}$, tiene en $[a,b]$ a lo sumo n ceros contandos con su multiplicidad. Si además cada subconjunto $\{u_0, \ldots, u_m\},\ 0 \leq m \leq n$, es a su vez otro sistema de Tchebycheff extendido se dice que U_n es un **sistema de Tchebycheff completo y extendido.**

• El **Wronskiano** de las funciones $f_0, \ldots, f_k$ se define como

$$W(f_0, \cdots, f_k) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_k \\ D^1 f_0 & D^1 f_1 & \ldots & D^1 f_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D^k f_0 & D^k f_1 & \cdots & D^k f_k \end{vmatrix}.$$

- Se han considerado los siguientes operadores lineales:

Bernstein

$$B_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$B_n f(t) = \sum_{p=0}^{n} f\left(\frac{p}{n}\right)\binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p}.$$

Meyer-König y Zeller

$$M_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1],$$

$$M_n f(t) = (1-t)^{n+1} \sum_{p=0}^{\infty} f\left(\frac{p}{n+p}\right)\binom{n+p}{p} t^p, \quad t < 1$$

$$M_n f(1) = f(1).$$

Kantorovich

$$K_n : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$

$$K_n f(t) = (n+1) \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} t^p (1-t)^{n-p} \int_{\frac{p}{n+1}}^{\frac{p+1}{n+1}} f(z)dz.$$

Hermite-Fejér

Sea f una función definida en $[-1,1]$ y sean x_{kn}, $k = 1, 2, \ldots, n$, los ceros del polinomio de Tchebychev n-ésimo de primera especie $T_n(x)$.

Entonces el polinomio de interpolación de Hermite-Fejér $H_n(f,x)$ de grado $\leq 2n-1$ basado en los nodos x_{kn} está dado por

$$H_n(f,x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) h_{kn}(x),$$

donde

$$h_{kn}(x) = (1 - x x_{kn}) \left(\frac{T_n(x)}{n(x - x_{kn})}\right)^2,$$

$$x_{kn} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Szász-Mirakjan-Kantorovich

$$SMK_nf(x) = \frac{n}{b_n}\sum_{k=0}^{\infty} P_{n,k}(x)\int_{kb_n/n}^{(k+1)b_n/n} f(t)dt, \quad x \in [0,\infty),$$

donde b_n es una sucesión de números reales positivos tal que b_n/n converge en sentido B-estadístico a cero y

$$P_{n,k}(x) = e^{-nx/b_n}\frac{(nx)^k}{k!b_n^k}.$$

• Una sucesión $\{x_n\}$ se dice **casi convergente** a 's' y se escribe $\{x_n\} \rightharpoonup s$ si

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{p}\sum_{k=n}^{n+p-1} x_k = s \quad uniformemente\ en\ n.$$

• Sea $A = \{A^v\}$ una sucesión de matrices infinitas con $A^v = (a^v_{n,k})$. Se dice que $x = \{x_k\}$ es **A-sumable** a "l" si la doble sucesión $A^v_n = \sum_{k=1}^{\infty}\{a^v_{n,k}x_k\}$ converge a l con $n \to \infty$ uniformemente en $v = 1, 2, ...$

• Se dice que $A = \{A^v\}$ es **regular** si $x \to L$ implica que $Ax \to L$.

Bibliografía

[1] F. Aguilera, D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, Optimal simultaneous approximation via A-summability, Abs. Appl. Anal. 2013, Article ID 824058, 12 p.

[2] F. Aguilera, D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, J. M. Hernández, Quantitative results in conservative approximation via summability, Automat. Comput. Appl. Math. 17(2) (2008) 201–208.

[3] J. M. Aldaz, O. Kounchev, H. Render, Shape preserving properties of generalized Bernstein operators on extended Chebyshev spaces, Numer. Math. 114 (2009) 1–25.

[4] F. Altomare, M. Campiti, Koronkin-type Approximation Theory and its Applications, De Gruyter Studies in Mathematics 17, Walter de Gruyter, Belin-New York, 1994.

[5] V. G. Amel'kovič, A theorem converse to a theorem of Voronovskaja type, Teor. Funkčiĭ, Funkčional. Anal. i Priložen 2 (1966) 67–74.

[6] A. Aral and O. Duman, A Voronovskaya-Type Formulafor SMK Operators via Statistical Convergence, Math. Slovaca 61 (2011) 235–244.

[7] B. Bajsanski, R. Bojanić, A note on approximation by Bernstein polynomials Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964) 675–677.

[8] H. T. Bell, Order summability and almost convergence, Proc. Am. Math. Soc. 38 (1973) 548–552.

[9] H. Berens, Pointwise saturation of positive operators, J. Approx. Theory 6 (1972) 135–146.

[10] R. Bojanic, F. Cheng, Estimates for the rate of approximation of functions of bounded variation by Hermite-Fejer Polynomials, Proceedings of the conference of Canadian Math. Soc. 3 (1983) 5–17.

[11] R. Bojanic, M. K. Khan, Summability of Hermite-Fejer interpolation for functions of bounded variation, J. Nat. Sci. Math. 32(1) (1992) 5–10.

[12] F. F. Bonsall, The Characterization of Generalized Convex Functions, Quart. J. Math. Oxford Ser.(2) 1 (1950) 100–111.

[13] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, Local saturation of conservative operators, Acta Math. Hungar. 100(1-2) (2003) 83–95.

[14] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, F. J. Muñoz-Delgado, A result of asymptotic formulae for linear k-convex operators, Int. J. Differ. Equ. Appl. 2(3) (2001) 335–347.

[15] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, F. J. Muñoz-Delgado, Adendum and corrigendum to 'Local saturation of conservative operators', Acta Math. Hungar. 105(3) (2004) 257–259.

[16] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho and I. Raşa, Bernstein-type operators which preserve polynomials, Comput. Math. Appl. 62 (2011) 158–163.

[17] D. Cárdenas-Morales, P. Garrancho, I. Rasa, Asymptotic formulae via a Korovkin-type result, Abs. Appl. Anal. 2012, Article ID 217464, 12 p.

[18] D. Cárdenas-Morales, F. J. Muñoz-Delgado, A general uniform estimate of Korovkin-Type for conservative operators, Commun. Appl. Anal. (5) 4 (2001) 445–454.

[19] D. Cárdenas-Morales, F. J. Muñoz-Delgado, A Korovkin-type result in C^k, an application to the M_n operators, Approx. Theory Appl. (N.S.) 17(3) (2001) 1–13.

[20] E. Censor, Quantitative results for positive linear approximation operators, J. Approx. Theory 4 (1971) 442–450.

[21] E. W. Cheney, A. Sharma, Bernstein power series, Canad. J. Math. 16 (1964) 241–252.

[22] L. J. Deluca, Algebraic approximation and saturation classes, Thesis (Ph.D)-Syracuse University, 1966.

[23] K. Demirci, S. Karakus, Statistically A-Summability of positive Linear Operators, Math. Comput. Modelling 53 (2011) 189–195.

[24] R. A. DeVore, The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators, Lecture Notes in Mathematics 293, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[25] O. Duman and E. Erkuş, Approximation of continuous periodic functions via statistical convergence, Comput. Math. Appl. 52 (2006) 967–974.

[26] O. Duman, M. K. Khan, C. Orhan, A-statistical convergence of approximating operators, Math. Inequ. Appl. 4 (2003) 689–698.

[27] O. Duman, C. Orhan, Statistical approximation by positive linear operators, Studia Mathematica 162(2) (2004) 187–197.

[28] O. Duman, C. Orhan, Rates of A-statistical convergence of positive linear operators, Appl. Math. Lett. 18 (2005) 1339–1344.

[29] O. H. H. Edely, B-statistically A-summability, Thai J. Math. 11 (2013) 1–10.

[30] S. Eisenberg and B. Wood, Approximation of analytic functions by Bernstein-type operators, J. Approx. Theory 6 (1972) 242–248.

[31] H. Fast, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2 (1951) 241–244.

[32] A. R. Freedman and J. J. Sember, Densities and summability, Pacific. J. Math. 95 (1981), 293–305.

[33] A. D. Gadjiev, C. Orhan, Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mount. Jour. Math. 32(1) (2002) 1339–1344.

[34] P. Garrancho, D. Cárdenas-Morales, A converse of asymptotic formulae in simultaneous approximation, Appl. Math. Comput. 217 (2010) 2676–2683.

[35] P. Garrancho, D. Cárdenas-Morales, F. Aguilera, On asymptotic formulae via summability, Math. Comput. Simulat. 81 (2011) 2174–2180.

[36] J. M. Hernández Guerra, D. Cárdenas-Morales, Qualitative Korovkin-type results on almost convergence, Monogr. Semin. Mat. García Galdeano Universidad de Zaragoza 27 (2003) 331–336.

[37] S. J. Karlin, W. J. Studden, Tchebycheff Systems, Interscience, New York, 1966.

[38] S. J. Karlin, Z. Ziegler, Iteration of positive approximation operators, J. Approximation Theory 3 (1970) 310–339.

[39] J. P. King, The Lototsky transform and Bernstein polynomials, Can. J. Math. 18 (1966) 89–91.

[40] J. P. King, J. J. Swetits, Positive linear operators and summability, Austral J. Math. 11 (1970) 281–291.

[41] H. B. Knoop, P. Pottinger, Eim Satz von Korovkin-Typ für C^k-Räume, Math. Z. 148 (1976) 123–132.

[42] P. P. Korovkin, On convergence of linear operators in the space of continuous functions, Dokl. Akad. Nauk SSSR 90 (1953) 961–964.

[43] P. P. Korovkin, Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing Corp., Delhi, India, 1960.

[44] G. G. Lorentz, A contribution to the theory of divergent sequences, Acta Math. 80 (1948) 167–190.

[45] G. G. Lorentz, Inequalities and saturation classes of Bernstein polynomials, in: On Approximation Theory, Proc. Conference Oberwolfach, 1963, Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart (1964), pp. 200–207.

[46] G. G. Lorentz, L. L. Schumaker, Saturation of positive operators, J. Approx. Theory 5 (1972) 413–424.

[47] A. J. López-Moreno, *Expresiones y estimaciones de operadores lineales conservativos*, Doctoral Thesis, University of Jaén, Spain (2001).

[48] A. Lupas, Some Properties of the Linear Positive Operators (I), Mathematica, Cluj 9 (1967) 77–83.

[49] C. A. Micchelli, Saturation classes and iterates of operators, Thesis (Ph.D)-Stanford University, 1969.

[50] R. N. Mohapatra, Quantitative results on almost convergence of sequence of positive linear operators, J. Approx. Theory 20 (1977) 239–250.

[51] S. A. Mohiuddine and A. Alotaibi, Korovkin second theorem via statiscal summability (C,1), J. Inequal. Appl. (2013) 2013:149.

[52] G. Mühlbach, Operatoren vom Bernsteinschen Typ, J. Approx. Theory 3 (1970) 274–292.

[53] F. J. Muñoz-Delgado, D. Cárdenas-Morales, Almost convexity and quantitative Korovkin type results, Appl. Math. Lett. 11(4) (1998) 105–108.

[54] F. J. Muñoz-Delgado, V. Ramírez-González, D. Cárdenas-Morales, An extension of Korovkin's theorem. Convergence for sequences of operators preserving shape properties, C. R. Acad. Sci. Paris t. 323 Série I (1996) 421–426.

[55] F. J. Muñoz-Delgado, V. Ramírez-González, D. Cárdenas-Morales, Qualitative Korovkin-type results on conservative approximation, J. Approx. Theory 94 (1998) 144–159.

[56] M. Mursaleen and A. Kilicman, Korovkin second theorem via B-statiscal A-summability, Abstr. Appl. Anal. Article ID 5989 (2013) 6 pages.

[57] M. A. Özarslan, O. Duman, MKZ operators providing a better estimation on $[1/2, 1)$, Canad. Math. Bull. 50 (2007) 434–439.

[58] I. Pesin, Classical and Modern Integration Theories, Academic Press, New York, 1951.

[59] R. Schnabl, Zum globalen saturionsproblem del folge der Bernstein operatoren, Acta Sci. Math. 31 (1970) 351–358.

[60] O. Shisha, B. Mond, The degree of convergence of sequences of linear positive operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 60 (1968) 1196–1200.

[61] O. Shisha, B. Mond, The degree of convergence of sequences of linear positive operators, J. Aprox. Theory 1 (1968) 335–339.

[62] S. P. Singh, On the rapidity of almost convergence by positive linear operators, J. Approx. Theory 20 (1977) 239–250.

[63] S. P. Singh, O. P. Varshney, On positive linear operators, J. Orissa Math. Soc. 1(2) (1982) 51–56.

[64] S. P. Singh, O. P. Varshney, A note on convergence of linear positive operators, J. Approx. Theory 39 (1983) 386–388.

[65] Y. Suzuki, Saturation of local approximation by linear positive operators of Bernstein type, Tohoku Math. J. 19 (1967) 429–453.

[66] Y. Suzuki, S. Watanabe, Some remarks on saturation problem in the local approximation II, Tohoku Math. J. 21 (1969) 65–83.

[67] J. J. Swetits, On summability and positive linear operators, J. Approx. Theory 25 (1979) 186–188.

[68] E. Voronovskaya, Détermination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynômes de S. Bernstein, Dokl. Akad. Nauk. USSR A (1932), 79–85.