

ANÁLISIS DEL MÉTODO DE BORINO PARA FORMULACIONES NO LOCALES EN MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

F. Suárez Guerra^{1*}

¹Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera, EPS de Linares (Universidad de Jaén)
Campus Científico Tecnológico de Linares, Cinturón Sur, s/n 23700 Linares (Jaén)

*E-mail: fsuarez@ujaen.es

RESUMEN

A diferencia de lo que ocurre con los modelos usuales de elementos finitos, en los modelos no locales el comportamiento del material en un punto de integración no depende únicamente del estado del material en ese punto sino de un valor promediado utilizando otros puntos de integración que lo rodean. Esto disminuye notablemente la dependencia del tamaño de malla de los modelos.

Cuando el punto de integración en cuestión se encuentra cerca de un borde del cuerpo han de adoptarse estrategias que permitan corregir el valor no local obtenido por la fórmula estándar. Además de algunas que dependen de la cercanía al borde y otras que lo hacen del estado de tensiones de dicho punto, existe un método propuesto por Borino que añade al valor obtenido por la fórmula estándar un cierto valor que depende del local.

En algunos estudios realizados con modelos no locales se han observado resultados que presentan ciertas irregularidades cuando se emplea el método propuesto por Borino. En esta contribución se estudian los motivos que provocan estas irregularidades y por qué otras formulaciones proporcionan modelos más estables sin irregularidades en los resultados.

PALABRAS CLAVE: Fractura, Modelos no locales, Borino

ABSTRACT

In fracture nonlocal models, the behaviour of an integration point does not depend only on the local fields of the material (that is to say, the local fields of the integration point itself), but on an averaged value obtained with other integration points around it. This reduces the mesh size effect of the finite element model.

When the integration point is next to a body border, different strategies have been developed to correct the nonlocal value computed by the standard expression. Apart from some strategies that depend on the proximity of the border and some that depend on the stress state of the integration point, there exists a strategy proposed by Borino that corrects the value obtained by the standard expression by adding up a value that depends on the local value in the integration point itself.

In previous studies, some irregularities have been observed in the results when using the Borino's approach. In this contribution, these irregularities are explained, furthermore, the reason why other approaches do not present such irregularities are identified.

KEYWORDS: Fracture, Nonlocal models, Borino

1. INTRODUCCIÓN

El uso de leyes constitutivas con ablandamiento está ampliamente extendido en el estudio del daño en medios continuos. Este tipo de modelos adolece de una gran dependencia del tamaño de la malla, aspecto que puede ser mitigado en parte mediante el uso de formulaciones no locales, que promedian las variables de estado entre

varios puntos de integración, logrando una mayor uniformidad de resultados en modelos con mallas de diferente tamaño.

Además, existe un aspecto particularmente interesante en este tipo de formulaciones, que es el modo en que dichas formulaciones realizan el cálculo en las cercanías del borde del cuerpo. Una de las estrategias para abordar

este problema fue propuesta por Polizzotto [1] y Borino [2], proporcionando buenos resultados en los modelos de daño habituales. No obstante, en algunos casos se han observado ciertas inestabilidades en los resultados cuando se emplea esta técnica.

El presente estudio pretende encontrar la explicación a este comportamiento inestable de la formulación de Borino y Polizzotto. Para ello, se realizan modelos sencillos de daño en elementos rectangulares sometidos a tracción y se comparan los resultados para diversas formulaciones no locales y diversas estrategias de cálculo en las cercanías del borde del cuerpo, entre ellas la de Borino y Polizzotto, en adelante denominada *complemento local*.

2. FORMULACIONES NO LOCALES

El valor no local se obtiene sumando de forma ponderada la contribución de aquellos puntos de integración que se encuentran a una distancia menor o igual que un valor denominado *longitud característica*, a la que en adelante nos referiremos como R . El cálculo ponderado viene definido por la siguiente expresión:

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) \varepsilon(\xi) d\xi \quad (1)$$

donde x representa el punto de Gauss donde se calcula el valor no local (en adelante referido como *punto de interés*), ξ cada uno de los puntos de integración que se encuentran a una distancia menor o igual que R del punto de interés y contribuyen por tanto al valor no local, $\alpha(x, \xi)$ el peso definido por una función de ponderación que corresponde a la distancia entre el punto de interés y cada uno de los puntos de integración ξ y $\bar{\varepsilon}(\xi)$ la deformación equivalente en ξ .

Por lo tanto, la expresión (1) proporciona un valor ponderado de la deformación equivalente integrando los valores de los puntos de integración ξ circundantes ponderados mediante una función de peso α .

2.1. Funciones de peso

La función de ponderación puede definirse de muchas maneras, en este estudio se han considerado las tres más habituales, que a continuación se describen:

a) Función gaussiana

$$\alpha_0(s) = \exp\left(-\frac{s^2}{R^2}\right) \quad (2)$$

b) Función exponencial

$$\alpha_0(s) = \exp\left(-\frac{s}{R}\right) \quad (3)$$

c) Función en forma de campana

$$\alpha_0(s) = \left\langle 1 - \frac{s^2}{R^2} \right\rangle^2 \quad (4)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota los corchetes de Macaulay:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } x \geq 0 \end{cases} \quad (5)$$

Nótese que en la ecuación (1) se ha denominado a la función de peso α mientras que aquí se están denotando por α_0 . Esto es debido a que las expresiones (2), (3) y (4) no están normalizadas y emplearlas directamente en la expresión (1) llevaría a resultados erróneos. Para solventar este problema, basta con definir el peso α de la siguiente manera:

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_0(\|x - \xi\|)}{V_{r\infty}} \quad (6)$$

donde:

$$V_{r\infty} = \int_{V_\infty} \alpha_0(\|\xi\|) d\xi \quad (7)$$

El valor de $V_{r\infty}$ puede obtenerse analíticamente para cada una de las funciones de peso presentadas obteniendo los siguientes valores para cada una de ellas:

- Función gaussiana: $V_{r\infty} = \pi R^2$
- Función exponencial: $V_{r\infty} = 2\pi R^2$
- Función en forma de campana: $V_{r\infty} = \frac{\pi R^2}{3}$

2.2. Cálculo en las proximidades de los bordes

Cuando se emplea el cálculo descrito anteriormente en las proximidades de un borde, el valor de $V_{r\infty}$ que permite normalizar la expresión del peso α no puede calcularse empleando la ecuación (7), ya que dicha expresión asume que existen todos los puntos de integración en un radio R . No obstante, tal y como muestra la Figura 1, cerca del borde algunos puntos de integración dejan de existir, ya que parte del área encerrada por el radio R está fuera del cuerpo. Para afrontar esta situación existen diversas estrategias, a continuación se describen las utilizadas en este estudio.

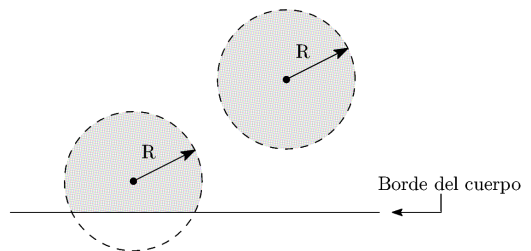


Figura 1. Cerca del borde el volumen que contribuye al valor no local se ve reducido.

a) *Fórmula estándar*

En este caso el procedimiento es el mismo descrito anteriormente para un punto situado en el interior del cuerpo, con la salvedad de que la normalización de α se hace empleando un valor $V_{r\infty}$ que sólo tiene en cuenta los puntos de integración existentes dentro del radio R .

De este modo, la expresión del valor no local es la siguiente:

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_r(\mathbf{x})} \int_V \alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (8)$$

donde:

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)}{V_r(\mathbf{x})} \quad (9)$$

y:

$$V_r(\mathbf{x}) = \int_V \alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|) d\boldsymbol{\xi} \quad (10)$$

b) *Complemento local de Borino*

En lugar de normalizar α utilizando V_r y no $V_{r\infty}$, este método añade un término a la expresión (6), resultando:

$$\alpha(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|)}{V_{r\infty}} + \left(1 - \frac{V_r(\mathbf{x})}{V_{r\infty}}\right) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad (11)$$

donde δ es la distribución de Dirac. Esto lleva a la siguiente expresión de la deformación no local:

$$\bar{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_{r\infty}} \int_V \alpha_0(\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|) \tilde{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \left(1 - \frac{V_r(\mathbf{x})}{V_{r\infty}}\right) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

donde $V_{r\infty}$ es la integral de α_0 extendida a un volumen infinito y que puede obtenerse con la expresión (7).

c) *Dependiente de la distancia al borde*

Al igual que ocurre con la formulación estándar, en este caso la función de peso también está escalada, pero α_0 se considera dependiente de la mínima distancia del punto en el que se obtiene el valor no local. Existen diversas definiciones de esta formulación; en este caso se ha utilizado una descrita por Grassl et al. en [3]. En ella, el valor de α_0 se escala mediante una función $\gamma(\mathbf{x})$ que depende de la mínima distancia del punto de interés al borde más próximo.

En el caso del artículo de Grassl et al., esta formulación se implementa asumiendo una función exponencial para la función de pesos, dando lugar a la siguiente expresión modificada de α_0 :

$$\alpha_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|}{\gamma(\mathbf{x})R}\right) \quad (13)$$

donde:

$$\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } d(\mathbf{x}) \geq tR \\ \frac{1-\beta}{tR}d(\mathbf{x}) + \beta & \text{if } d(\mathbf{x}) < tR \end{cases} \quad (14)$$

En su artículo, Grassl et al. comprobaron que si en lugar de utilizar una expresión lineal de $\gamma(\mathbf{x})$, como la descrita por (14), se emplea una expresión exponencial, los resultados para el perfil de energía disipada por el modelo cerca de la región donde se inicia la fisura presentan resultados más adecuados, eliminando el pico local que se produce cerca del borde (ver [3]). En dicho estudio, proponen la siguiente expresión exponencial de $\gamma(\mathbf{x})$:

$$\gamma(\mathbf{x}) = 1 - (1 - \beta) \exp\left(-\frac{d(\mathbf{x})}{tR}\right) \quad (15)$$

Aquí se analizarán ambas formulaciones descritas para el caso dependiente de la distancia al borde, con una expresión de $\gamma(\mathbf{x})$ lineal y otra exponencial.

3. ANÁLISIS DE DIFERENTES FORMULACIONES NO LOCALES EN UN ELEMENTO RECTANGULAR SOMETIDO A TRACCIÓN

En este apartado se estudia la influencia de diversos parámetros sobre los resultados de un modelo sencillo que simula un ensayo de tracción sobre una probeta rectangular plana. En primer lugar se analizará la influencia de la longitud característica R sobre cada una de las formulaciones no locales descritas anteriormente y en segundo lugar la influencia de la densidad de la malla.

A continuación se describe el modelo empleado y se presentan los dos análisis descritos.

3.1. Descripción del modelo

El modelo empleado reproduce un ensayo de tracción sobre una probeta rectangular plana, la Figura 2 muestra las principales características de dicho modelo. Dado que se emplean formulaciones no locales, se han definido condiciones de contorno periódicas en los bordes izquierdo y derecho del modelo, de manera que los puntos de integración cercanos a dichos bordes puedan calcular correctamente sus valores no locales.

Todos los modelos, como se verá más adelante, tienen una única fila de elementos en la dirección de la tracción, la altura de estos es siempre de 10mm. pero su ancho varía entre 1 y 4mm. dependiendo del modelo.

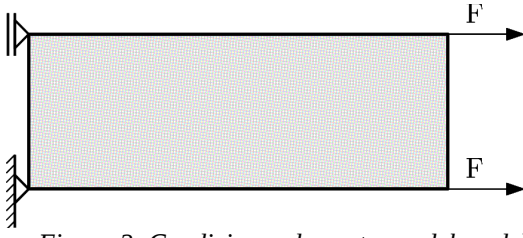


Figura 2: Condiciones de contorno del modelo

El modelo de daño se ha definido mediante un parámetro de daño ω que modifica el tensor de rigidez elástico D_e de la siguiente manera: $D = (1 - \omega)D_e$. La evolución del daño se ha definido siguiendo una ley de ablandamiento exponencial:

$$\omega = 1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}\right) \quad (16)$$

Para localizar el daño en un material totalmente homogéneo, se ha provocado una perturbación aleatoria en el campo de desplazamientos en uno de los nudos del modelo al final de cada paso de cálculo; de esta manera se garantiza que los resultados no están influidos por elementos externos al problema.

Los modelos se han realizado con el código de elementos finitos OOFEM [4].

3.2. Influencia de la longitud característica

Los elementos empleados aquí tienen siempre un ancho igual a 1mm y una altura de 10mm. La malla consta de 16 elementos.

Para estudiar la influencia de la longitud característica sobre los resultados obtenidos y compararla con las otras formulaciones no locales, se han considerado dos valores de R :

- $R = 2mm$: Este valor es menor que la distancia mínima de cualquier punto de integración al borde del modelo, tal y como muestra la Figura 3 (las cruces rojas indican la posición de los puntos de integración de los elementos).
- $R = 7mm$: Este valor garantiza un área de influencia extensa alrededor del punto de interés aumentando el área que queda fuera del cuerpo, lo que incrementa la influencia del valor local en el término que la expresión de Borino añade a la formulación estándar (ver ecuación (12)).

Resultados

La Figura 5 muestra los diagramas carga-deformación obtenidos con cada una de las formulaciones no locales descritas para un valor de $R = 2mm$ y la Figura 6 los mismos diagramas para un valor de $R = 7mm$.

En la Figura 5 se observa cómo el resultado de la formulación estándar, el obtenido con el *complemento local* de Borino y el obtenido con la formulación dependiente de la distancia con una expresión lineal de γ son coincidentes, mientras que el resultado obtenido con la formulación dependiente de la distancia al borde con una expresión exponencial de γ difiere ligeramente del resto, desarrollando el daño para deformaciones menores.

La Figura 6 muestra cómo aparecen diferencias entre todas las formulaciones, siendo las dependientes de la distancia al borde las que desarrollan el daño para valores de deformación menores. No obstante, lo más reseñable en estos resultados es la inestabilidad que se observa en la curva correspondiente al *complemento local* de Borino, que llegado un descenso de carga determinado presenta una evolución instantánea del daño. En opinión del autor, este resultado es debido a que la formulación de Borino, para valores de R grandes que implican que gran parte del volumen encerrado por esta distancia se encuentra fuera del cuerpo, tiende a sobrevalorar la influencia del valor local del punto de interés x , dando lugar a inestabilidades en la evolución del daño definido por la curva de ablandamiento del material.

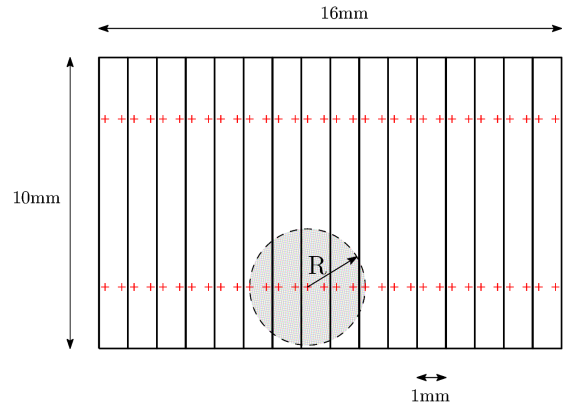


Figura 3: Malla de 1mm. x 10mm. Con una circunferencia de radio $R = 2mm$. superpuesta.

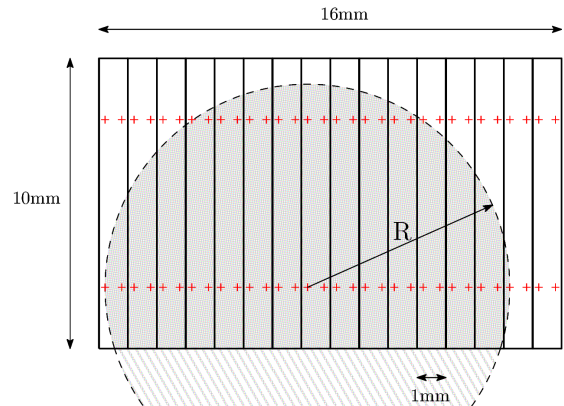


Figura 4: Malla de 1mm. x 10mm. Con una circunferencia de radio $R = 7mm$. superpuesta.

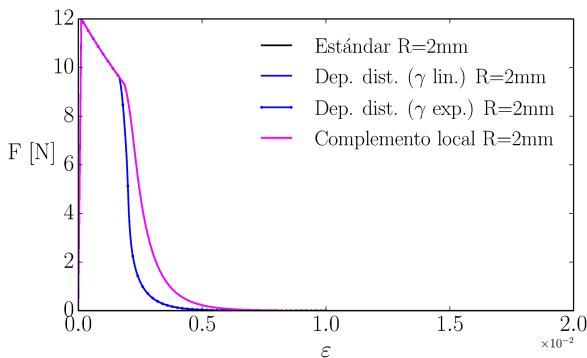


Figura 5: Diagramas carga-deformación para valores de $R = 2mm$.

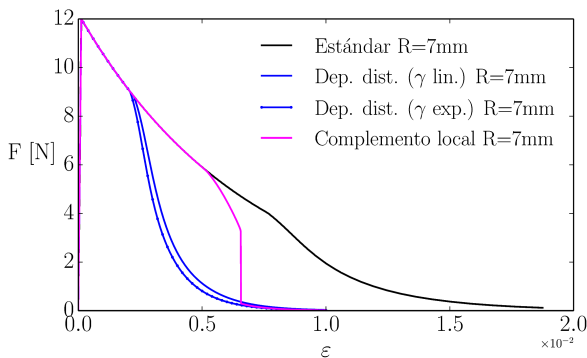


Figura 6: Diagramas carga-deformación para valores de $R = 7mm$.

3.3 Influencia de la densidad de malla

En este análisis la altura de los elementos es siempre de 10mm. pero su ancho varía entre 1, 2 y 4mm.

El objetivo es estudiar cómo la densidad de malla y, por tanto, el número de puntos de integración que contribuyen al cálculo del valor no local, afecta a los resultados. Para ello se han considerado tres mallas:

- Elementos de 1mm. de ancho (ver Fig. 4)
- Elementos de 2mm. de ancho (ver Fig. 7)
- Elementos de 4mm. de ancho (ver Fig. 8)

Resultados

La Figura 9 muestra los diagramas carga-deformación obtenidos con cada una de las formulaciones consideradas para cada una de las mallas descritas anteriormente.

En todos los casos, considerando como diagrama de referencia el correspondiente a la malla de elementos $1 \times 10mm$., el daño se desarrolla de manera más tardía en el resto de casos. Cuanto mayor es el ancho del elemento, más tarda en desarrollarse el daño.

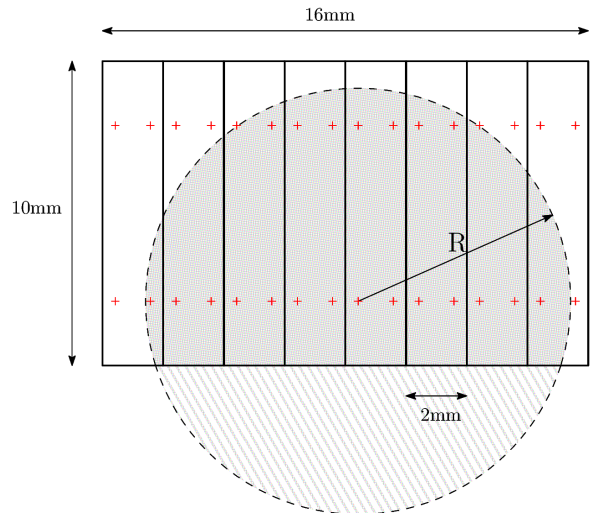


Figura 7: Malla de $2mm. \times 10mm$. Con una circunferencia de radio $R = 7mm$. superpuesta.

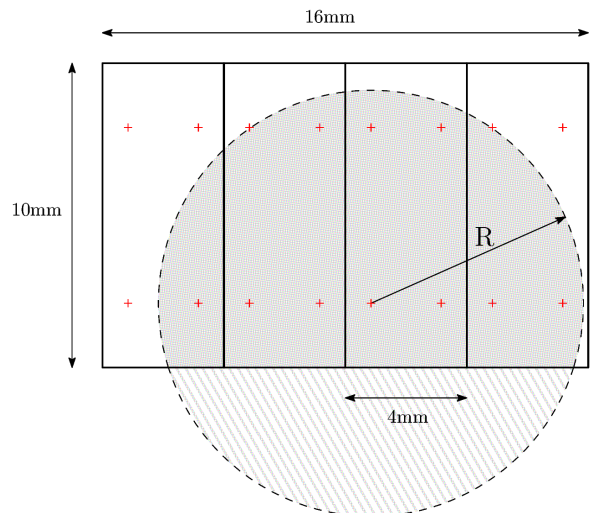


Figura 8: Malla de $4mm. \times 10mm$. Con una circunferencia de radio $R = 7mm$. superpuesta.

Este efecto es debido a que al incrementar el ancho de los elementos, se reduce el número de puntos de integración cercanos al punto de interés y, por tanto, su influencia en el valor no local calculado, provocando que éste sea menor y, por tanto, tarde más en alcanzarse el valor límite que desencadena el daño.

4. CONCLUSIONES

En este estudio se ha modelizado el ensayo de tracción sobre una probeta rectangular empleando diversas formulaciones no locales, entre ellas, la estrategia del *complemento local*, propuesta por Borino y Polizzotto para abordar el cálculo en las cercanías del borde del cuerpo.

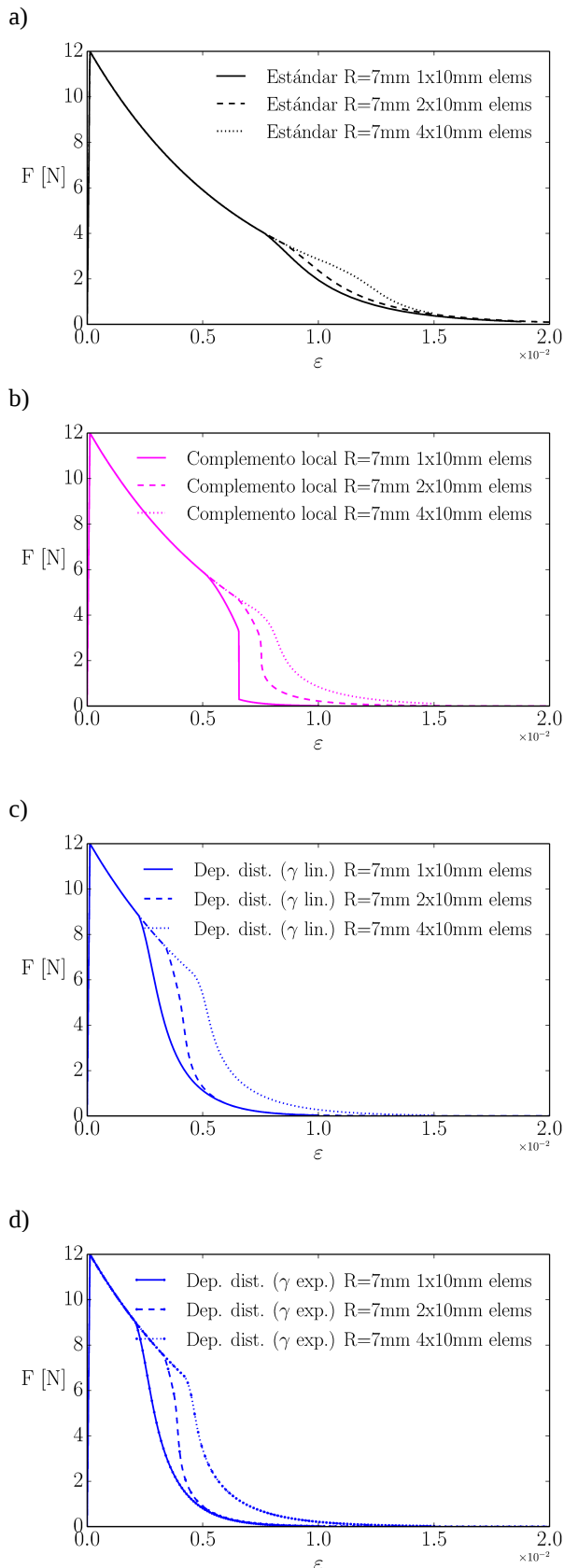


Figura 9: Diagramas carga-deformación para las mallas con elementos de 1, 2 y 4mm.de ancho.

Los resultados obtenidos muestran que cuando el radio de acción definido por la longitud característica R queda dentro del cuerpo, los resultados de todas las formulaciones, incluida el *complemento local*, son estables, pero cuando dicho valor de R se incrementa y el radio de acción abarca un área importante fuera del cuerpo, el *complemento local* presenta inestabilidades, no ocurriendo lo mismo con el resto de formulaciones.

El motivo de dichas inestabilidades parece ser que la estrategia del *complemento local* tiende a incrementar notablemente el peso del valor local en el cálculo del valor no local promediado, dificultando un desarrollo suave de la curva de ablandamiento y provocando aperturas excesivamente rápidas de las fisuras en cada paso de cálculo.

AGRADECIMIENTOS

El autor quiere agradecer al Prof. Milan Jirásek su tiempo y su paciencia durante el tiempo que estuvo trabajando bajo su dirección en la Universidad Técnica de Praga.

REFERENCIAS

- [1] Polizzotto, C., Remarks on some aspects of nonlocal theories in solid mechanics. *Proc., 6th National Congr. SIMAI*, 2002.
- [2] Borino, G., Faili, B. and Parrinello, F., A symmetric nonlocal damage theory. *International Journal of Solids and Structures*, **40**(13): 3621-3645, 2003
- [3] Grassl, P., Xenos, D., Jirásek, M., and Horák, M., Evaluation of nonlocal approaches for modelling fracture near nonconvex boundaries. *International Journal of Solids and Structures*, **51**(18): 3239-3251, 2014.
- [4] Patzák, B., Oofem- an object-oriented simulation tool for advanced modeling of materials and structures. *Acta Polytechnica*, 52(6), 2012.