



**UNIVERSIDAD DE JAÉN**  

---

**ESCUELA POLITÉCNICA  
SUPERIOR DE JAÉN  
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA**

**TESIS DOCTORAL**

**USO DE PREFERENCIAS LINGÜÍSTICAS  
COMPARATIVAS EN TOMA DE DECISIONES  
BAJO INCERTIDUMBRE**

**PRESENTADA POR:  
ROSA M<sup>a</sup> RODRÍGUEZ DOMÍNGUEZ**

**DIRIGIDA POR:  
DR. D. LUIS MARTÍNEZ LÓPEZ**

**JAÉN, 29 DE ABRIL DE 2013**

**ISBN 978-84-8439-784-7**



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Escuela Politécnica Superior de Jaén  
Departamento de Informática



USO DE PREFERENCIAS LINGÜÍSTICAS COMPARATIVAS EN TOMA  
DE DECISIONES BAJO INCERTIDUMBRE

MEMORIA DE TESIS PRESENTADA POR

**Rosa M<sup>a</sup> Rodríguez Domínguez**

PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTORA EN INFORMÁTICA

DIRECTOR

DR. LUIS MARTÍNEZ LÓPEZ

Jaén, MARZO de 2013



La memoria titulada *Uso de Preferencias Lingüísticas Comparativas en Toma de Decisiones Bajo Incertidumbre*, que presenta D<sup>a</sup> Rosa M<sup>a</sup> Rodríguez Domínguez para optar al grado de Doctora en Informática, ha sido realizada en el Departamento de Informática de la Universidad de Jaén bajo la dirección del Doctor Luis Martínez López.

En Jaén, a 14 de Marzo de 2013  
El Doctorando

Fdo. D<sup>a</sup> Rosa M<sup>a</sup> Rodríguez Domínguez

El Director:

Fdo. Dr. Luis Martínez López



# Agradecimientos

Llegados a este punto es el momento de agradecer a todas aquellas personas que de una manera u otra han hecho posible la realización de este trabajo.

En primer lugar y como no podía ser de otra forma, a mi director Luis Martínez, por su dedicación, esfuerzo y confianza depositada en mi a lo largo de estos cuatro años. A todos los miembros del grupo *SINBAD*<sup>2</sup> por su apoyo desde el primer día, y en especial a Iván, Macarena y Francisco, por su colaboración y ayuda en todo momento.

Parte de este trabajo se ha realizado durante mis estancias en el Centro Nuclear de Investigación de Bélgica, Universidad de Ulster y Universidad de Granada. Por lo que quiero agradecer a Da Ruan<sup>\*</sup>, Jun Liu y Francisco Herrera, su colaboración y ayuda, porque sin ellos no tendría los resultados y propuestas realizadas en esta investigación

Por último, y no por ello menos importante, agradecer el apoyo y ánimo constante que me ha dado mi familia durante mucho tiempo.

Gracias a todos!

---

<sup>\*</sup>Fallecido el 31 de Julio de 2011, D.E.P.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Motivación . . . . .	5
1.2. Objetivos . . . . .	6
1.3. Estructura . . . . .	7
<b>2. Toma de Decisiones Lingüística bajo Incertidumbre. Modelos Lingüísticos Computacionales</b>	<b>11</b>
2.1. Fundamentos sobre Lógica Difusa y Enfoque Lingüístico Difuso . .	12
2.1.1. Conceptos Básicos sobre Lógica Difusa . . . . .	12
2.1.1.1. Conjuntos Difusos y Función de Pertenencia . . .	13
2.1.1.2. Tipos de Funciones de Pertenencia . . . . .	16
2.1.1.3. Principio de Extensión . . . . .	17
2.1.1.4. Número Difuso . . . . .	18
2.1.2. Enfoque Lingüístico Difuso . . . . .	18
2.1.2.1. Elección del Conjunto de Términos Lingüísticos .	20
2.1.2.2. Definición de la Semántica del Conjunto de Términos Lingüísticos . . . . .	22
2.2. Toma de Decisiones Lingüística . . . . .	24
2.2.1. Toma de Decisiones . . . . .	25
2.2.2. Uso de Información Lingüística en Toma de Decisiones . . .	26
2.2.3. Modelos Lingüísticos Computacionales . . . . .	30
2.2.3.1. Modelo Lingüístico Computacional basado en el Principio de Extensión . . . . .	31
2.2.3.2. Modelo Lingüístico Computacional basado en Conjuntos Difusos Tipo-2 . . . . .	35

---

2.2.3.3.	Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en Escalas Ordinales . . . . .	36
2.2.3.4.	Modelo Lingüístico Computacional 2-Tupla . . . . .	40
2.2.3.5.	Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en Términos Lingüísticos Virtuales . . . . .	45
2.2.3.6.	Modelo Lingüístico Computacional 2-tupla Proporcional . . . . .	48
2.2.3.7.	Otros Modelos Lingüísticos Computacionales basados en el Modelo 2-tupla . . . . .	50
2.2.4.	Estudio Comparativo entre Modelos Lingüísticos Computacionales Simbólicos . . . . .	55
2.2.4.1.	Problema de Toma de Decisión Lingüístico . . . . .	56
2.2.4.2.	Estudio Comparativo . . . . .	63
2.2.5.	Retos de la Información Lingüística en Toma de Decisiones Lingüística . . . . .	65
2.3.	Toma de Decisiones Lingüística: Aplicaciones . . . . .	66
<b>3.</b>	<b>Modelado de Información Lingüística en Contextos Dudosos</b>	<b>71</b>
3.1.	Introducción . . . . .	71
3.2.	Conjuntos Difusos Dudosos . . . . .	73
3.3.	Modelado de Duda en Contextos Cualitativos: Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos . . . . .	75
3.3.1.	Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos . . . . .	79
3.3.2.	Propiedades de los CTLDD . . . . .	82
3.4.	Elicitación de Expresiones Lingüísticas Comparativas . . . . .	85
3.4.1.	Gramática Libre de Contexto . . . . .	85
3.4.2.	Expresiones Lingüísticas Comparativas para Toma de Decisiones basadas en CTLDD . . . . .	88
<b>4.</b>	<b>Modelos de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas</b>	<b>91</b>
4.1.	Toma de Decisiones en Grupo . . . . .	92
4.2.	Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en la Combinación Convexa . . . . .	94

---

---

4.3.	Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla . . . . .	102
4.4.	Ejemplo Ilustrativo de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico en Grupo . . . . .	110
4.4.1.	Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en la Combinación Convexa . . . . .	111
4.4.2.	Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla . . . . .	114
<b>5.</b>	<b>Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas</b>	<b>119</b>
5.1.	Toma de Decisiones Multicriterio . . . . .	120
5.2.	Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en Max-Min . . . . .	121
5.3.	Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla . . . . .	129
5.4.	Ejemplo Ilustrativo de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico Multicriterio . . . . .	133
5.4.1.	Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en Max-Min . . . . .	133
5.4.2.	Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla . . . . .	138
5.5.	Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio Multiexperto con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla . . . . .	141
<b>6.</b>	<b>Aplicación del Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio Multiexperto: Evaluación de Riesgo Nuclear</b>	<b>147</b>
6.1.	Descripción del Problema de Evaluación de Riesgo Nuclear . . . . .	148
6.2.	Algoritmo de Resolución . . . . .	148
<b>7.</b>	<b>Aplicación Software</b>	<b>157</b>

---

---

7.1. Arquitectura de la Aplicación MCDACW . . . . .	157
7.2. Funcionalidad del Módulo Hesitant . . . . .	158
<b>8. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>165</b>
<b>A. Comparación de Intervalos</b>	<b>171</b>
<b>B. English Summary</b>	<b>175</b>
<b>English Summary</b>	<b>175</b>
B.1. Motivation . . . . .	175
B.2. Objectives . . . . .	177
B.3. Structure . . . . .	178
B.4. Linguistic Decision Making under Uncertainty. Computational Lin- guistic Models . . . . .	181
B.5. Linguistic Information Modelling in Hesitant Contexts . . . . .	201
B.6. Group Decision Making Models with Comparative Linguistic Ex- pressions . . . . .	215
B.7. Multicriteria Decision Making Models with Comparative Linguistic Expressions . . . . .	255
B.8. Multicriteria Multiexpert Decision Making Model applied to Nu- clear Safeguards Evaluation . . . . .	261
B.8.1. Description of the Nuclear Safeguards Evaluation Problem .	261
B.8.2. Resolution Algorithm . . . . .	262
B.9. Decision Support System . . . . .	271
B.9.1. Architecture of the Application MCDACW . . . . .	271
B.9.2. Functionality of the Hesitant Module . . . . .	272
B.10. Conclusions and Future Works . . . . .	279
B.10.1. Conclusions . . . . .	279
B.10.2. Future Works . . . . .	280
B.10.3. Publications . . . . .	281
<b>Índices</b>	<b>283</b>
Índice de Tablas . . . . .	283
Índice de Figuras . . . . .	285

---

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación

Al comenzar mi investigación, empecé a colaborar con el profesor Da Ruan en el problema de evaluación de riesgo nuclear (nuclear safeguards evaluation), estudiando modelos de decisión lingüísticos para tratar la incertidumbre.

La *Evaluación de Riesgo Nuclear* consiste en un conjunto de actividades de las que se encarga la Agencia de Energía Atómica Internacional (IAEA), para verificar que un país no está desarrollando armas o actividades nucleares no autorizadas. El control de *riesgo nuclear* se basa en la evaluación que realiza la IAEA para detectar tales actividades, utilizando para ello diferentes fuentes de información.

Para llevar a cabo dicha evaluación, la IAEA ha desarrollado un Modelo Físico [77] basado en una estructura jerárquica que permite incluir todas las actividades que podrían estar implicadas en el desarrollo de armas nucleares, que van desde indicadores básicos a factores complejos, sintetizados a partir de los indicadores, que indican el desarrollo de actividades nucleares (ver Fig. 1.1).

Los inspectores de la IAEA evalúan los indicadores basándose en sus análisis y conocimientos según las diferentes fuentes de información disponibles que suelen ser vagas e imprecisas. Inicialmente, el problema de la evaluación de riesgo nuclear era el tratamiento de dicha incertidumbre que fue satisfactoriamente resuelto en [94, 95] mediante modelos de evaluación basados en el Enfoque Lingüístico Difuso [175, 176, 177].

Posteriormente, el foco de atención fue desplazado a mejorar los resultados del

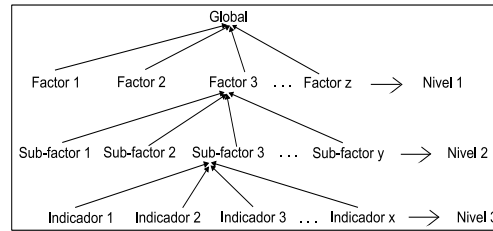


Figura 1.1: Estructura de la evaluación global

proceso de evaluación cuando aparecían valores perdidos en la evaluación. Esta es una situación habitual por la complejidad, la gran cantidad de indicadores a evaluar y la imprecisión de la información que forma parte del problema. Por tanto, inicialmente mi estudio se dirigió al tratamiento de valores perdidos mediante modelos de filtrado colaborativo [19, 61]. El tratamiento de dichos valores perdidos dieron algunos resultados, pero no eran satisfactorios porque no se podían justificar los valores obtenidos de una forma verosímil.

El siguiente planteamiento para manejar la aparición de valores perdidos en situaciones de duda fue estudiar cómo mejorar la elicitación de información lingüística de los expertos, cuando dudaban entre varios términos lingüísticos para proporcionar sus valoraciones. El profesor Da Ruan, había propuesto un modelo lingüístico inicial [100] que generaba expresiones más flexibles que simples términos lingüísticos para que los expertos expresen sus preferencias, pero dicho modelo no se adaptaba al modelo cognitivo de los seres humanos. Por tanto, el principal objetivo de mi investigación se centró en mejorar la flexibilidad de los modelos lingüísticos para facilitar a los expertos la expresión de sus preferencias mediante términos complejos que se asemejen a su vocabulario habitual, no solo en el problema de evaluación de riesgo nuclear, sino en cualquier problema de decisión donde los expertos duden entre varios términos lingüísticos para expresar sus preferencias.

## 1.2. Objetivos

El interés principal de esta memoria se centra en mejorar la flexibilidad de la elicitación de la información lingüística en problemas de toma de decisiones bajo incertidumbre. Para ello nos planteamos los siguientes objetivos:

- Estudiar los modelos lingüísticos más utilizados en toma de decisiones, analizando su representación y procesos de computación.
- De los distintos modelos lingüísticos realizar un estudio comparativo entre los modelos simbólicos que son de interés para nuestra investigación, analizando su uso en situaciones de toma de decisiones con alto grado de incertidumbre.
- Definir un nuevo modelo de representación de información lingüística, que denominaremos *Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos*, que permita expresar a los expertos sus preferencias con más de un término lingüístico mediante expresiones lingüísticas comparativas en aquellas situaciones de decisión donde hay un alto grado de incertidumbre, y el uso de un único término lingüístico no es adecuado a su conocimiento.
- Definir un modelo lingüístico computacional que opere con Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos y obtenga resultados lingüísticos fácilmente comprensibles.
- Proponer modelos de toma de decisiones en grupo, toma de decisiones multicriterio y toma de decisiones multicriterio multiexperto, donde los expertos puedan expresar sus preferencias mediante expresiones lingüísticas comparativas. Para ello, se definen los operadores y procesos necesarios que permitan manejar este tipo de información.
- Mostrar el uso de los Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos en un problema de toma de decisión real.
- Introducir el uso de Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos en el sistema de apoyo a la toma de decisiones con información lingüística MCDACW (Multicriteria Decision Analysis with Computing with Words), así como los modelos propuestos en esta investigación.

### 1.3. Estructura

Para alcanzar los objetivos mencionados previamente, esta memoria se estructura en los siguientes capítulos:

---

- **Capítulo 2:** En él se presenta una revisión del Enfoque Lingüístico Difuso y de toma de decisiones con información lingüística. A continuación se revisan diferentes modelos lingüísticos ampliamente utilizados en toma de decisiones lingüística, prestando atención tanto a su representación lingüística como al modelo computacional de cada uno de ellos. Finalmente, se presenta un análisis comparativo de dichos modelos lingüísticos, centrándonos en los modelos computacionales simbólicos, que son los modelos de mayor interés para nuestra investigación.
  - **Capítulo 3:** Este capítulo se centra en la necesidad de modelar situaciones de decisión con alto grado de incertidumbre donde los expertos dudan entre varios valores para expresar sus preferencias. En primer lugar se revisan modelos cuantitativos que han abordado estas situaciones. Y a continuación se define un nuevo modelo de representación de información lingüística denominado *Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos* que permite manejar múltiples términos lingüísticos en la expresión de preferencias mediante el uso de expresiones lingüísticas comparativas generadas por gramáticas libres de contexto. Además se presentan algunas propiedades de los Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos y operadores para realizar procesos de computación con palabras con este tipo de información.
  - **Capítulo 4:** Aquí se presentan dos nuevos modelos lingüísticos de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas en los que se definen las herramientas matemáticas y procesos necesarios para resolver dichos problemas de toma de decisión en grupo.
  - **Capítulo 5:** En este capítulo se proponen dos modelos novedosos de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas. Para ello se definen los operadores y procesos necesarios para resolver este tipo de problemas de toma de decisiones. Posteriormente, para finalizar el capítulo, se define un nuevo modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto con expresiones lingüísticas comparativas.
  - **Capítulo 6:** Presenta un problema de evaluación de riesgo nuclear (nuclear safeguards) y se resuelve aplicando el modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto definido en el capítulo anterior.
-

- 
- Capítulo 7: Muestra el uso de Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos y de los modelos de toma de decisiones presentados en esta memoria en un sistema de apoyo a la toma de decisiones lingüística, MCDACW.
  - Capítulo 8: Se señalan las conclusiones y resultados más relevantes obtenidos en la investigación realizada, así como las futuras líneas de investigación a seguir. Finalmente se muestran las publicaciones obtenidas durante el desarrollo de esta investigación.

Por último, se añade un anexo que presenta un resumen en inglés de la memoria, para obtener la mención internacional de doctorado.

La memoria concluye con una recopilación bibliográfica de las contribuciones más destacadas de la materia estudiada.

---



## Capítulo 2

# Toma de Decisiones Lingüística bajo Incertidumbre. Modelos Lingüísticos Computacionales

El interés de esta memoria de investigación se centra en mejorar la elicitación de información lingüística en toma de decisiones bajo incertidumbre, donde la información es vaga e imprecisa. En estas situaciones no es adecuado el uso de los modelos determinísticos ni probabilísticos proporcionados por la *Teoría Clásica de la Decisión*. Para tratar y manejar este tipo de información, se ha mostrado adecuado el uso del *Enfoque Lingüístico Difuso* [175, 176, 177], ya que mejora la fiabilidad y flexibilidad [110].

En este capítulo, revisamos el *Enfoque Lingüístico Difuso* como base para mejorar la elicitación de información lingüística y distintos modelos lingüísticos utilizados en toma de decisiones, prestando atención tanto a su representación lingüística como a su modelo computacional. Finalmente, nos centraremos en los modelos computacionales simbólicos que son de mayor interés para nuestra investigación realizando un análisis comparativo en el que se estudian diferentes características tales como: la representación de la información, su precisión e interpretabilidad.

## **2.1. Fundamentos sobre Lógica Difusa y Enfoque Lingüístico Difuso**

En esta sección se revisan conceptos básicos de la teoría de conjuntos difusos necesarios para manejar información lingüística bajo el Enfoque Lingüístico Difuso, que será el enfoque de representación de la información lingüística utilizado en esta memoria de investigación.

### **2.1.1. Conceptos Básicos sobre Lógica Difusa**

La *Teoría de los Conjuntos Difusos* propuesta por L. Zadeh en la década de los sesenta [174], se centra en modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos de la *Teoría de Conjuntos* y la *Teoría de Probabilidades* resultan insuficientes o no operativos. Para ello, dicha teoría generaliza el concepto de conjunto clásico para introducir el concepto de conjunto difuso, como aquel conjunto cuya frontera no es precisa. Los conjuntos difusos surgen como una nueva forma de representar la incertidumbre e imprecisión [86, 185]. A lo largo del tiempo, muchos investigadores han prestado especial atención en sus investigaciones a la *Teoría de Conjuntos Difusos* y la han aplicado en dos vertientes principales:

- Como una teoría matemática formal [74], generalizando la Teoría de Conjuntos y la Lógica Multivaluada, que ha ampliado los conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como el Álgebra, la Teoría de Grafos, etc., aplicando conceptos de la Teoría de Conjuntos Difusos a dichas áreas.
- Como una herramienta que puede utilizarse en muchas situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre (imprecisión, vaguedad, inconsistencia, etc). Debido a la generalidad de esta Teoría, ésta se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas, tales como, Teoría de Sistemas [17, 124], Teoría de la Decisión [51, 56], Bases de Datos [15, 101], etc. Esto implica adaptar los conceptos originales de la Teoría de los Conjuntos Difusos a los diferentes contextos en los que se esté trabajando.

En esta memoria de investigación nos centramos en la segunda vertiente, donde utilizaremos la Teoría de Conjuntos Difusos en problemas de toma de decisiones bajo incertidumbre.

---

A continuación se introducen una serie de conceptos básicos de la Teoría de Conjuntos Difusos para poder entender fácilmente las definiciones y procesos presentados a lo largo de esta memoria.

### 2.1.1.1. Conjuntos Difusos y Función de Pertenencia

La noción de conjunto refleja la tendencia a organizar, resumir y generalizar el conocimiento sobre los objetos del mundo real. El encapsulamiento de los objetos es una colección cuyos miembros comparten una serie de características que implican la noción de conjunto. Los conjuntos introducen una noción fundamental de *dicotomía*. En esencia, cualquier proceso de dicotomización es una clasificación binaria: aceptar o rechazar que un objeto pertenezca a una categoría determinada. Normalmente, la decisión de aceptar se nota por “1” y la de rechazar por “0”. Por tanto, una decisión de clasificación puede expresarse a través de una función característica.

**Definición 1** Sea  $A$  un conjunto en el universo  $X$ , la función característica asociada a  $A$ ,  $A(x)$ ,  $x \in X$ , se define como:

$$A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La función  $A : X \rightarrow \{0, 1\}$  tiene una restricción con un límite bien definido sobre los objetos del universo  $X$  que pueden ser asignados al conjunto  $A$ . El concepto de conjunto difuso lo que hace es suavizar este requerimiento y admitir valores intermedios en la función característica, que pasa a denominarse *función de pertenencia*.

Esto permite una interpretación más realista de las categorías que describen los objetos del mundo real que no tienen unos límites claros y bien definidos, como por ejemplo, *buen* sabor, persona *joven*, coche *potente*, vestido *cómodo*, etc. (las palabras en itálica indican fuente de imprecisión). Si un objeto pertenece a una categoría con un grado que puede ser expresado mediante un número real en el intervalo  $[0, 1]$ , cuanto más cercano a 1 sea el grado, mayor será el grado de pertenencia a la categoría determinada, y cuanto más cercano a 0, menor será el grado de pertenencia a dicha categoría.

Por tanto, un conjunto difuso puede definirse como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 y 1. Los valores de pertenencia expresan los

---

## 14 2.1. Fundamentos sobre Lógica Difusa y Enfoque Lingüístico Difuso

---

grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir un conjunto difuso de la siguiente forma.

**Definición 2** [174]. *Un conjunto difuso  $\tilde{A}$  sobre  $X$  está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio o universo del discurso  $X$  en el intervalo  $[0, 1]$ .*

$$\mu_{\tilde{A}} : X \longrightarrow [0, 1]$$

Así, un conjunto  $\tilde{A}$  en  $X$  puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico  $x, x \in X$  y su grado de pertenencia  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ :

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) / x \in X, \mu_{\tilde{A}}(x) \in [0, 1]\}$$

Por tanto, podemos observar que un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto clásico cuya función de pertenencia toma sólo dos valores  $\{0, 1\}$ .

**Ejemplo 1** *Consideremos el concepto “persona alta”, en un contexto donde la altura oscila en el intervalo  $[0, 200]$  centímetros. Claramente una persona cuya altura sea mayor o igual a 180cm se puede considerar una persona alta y se le asignará un valor de 1 a su grado de pertenencia al conjunto difuso de personas altas. Una persona cuya altura sea igual o inferior a 150cm no puede considerarse como una persona alta, y de ahí que se le asigne un valor 0 al grado de pertenencia al conjunto difuso de persona alta. La cuantificación del resto de valores puede realizarse mediante una función de pertenencia  $\mu_{\tilde{L}} : U \rightarrow [0, 1]$  que caracteriza el conjunto difuso  $\tilde{L}$  de personas altas en el universo  $U = [0, 200]$ .*

$$\mu_{\tilde{L}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 150 \\ \frac{x-150}{30} & 150 < x < 180 \\ 1 & x \geq 180. \end{cases}$$

Los conjuntos difusos pueden ser definidos sobre universos finitos o infinitos usando distintas notaciones. Si un universo  $X$  es discreto y finito, con cardinalidad  $n$ , el conjunto difuso puede expresarse con un vector  $n$ -dimensional cuyos valores son los grados de pertenencia de los correspondientes elementos de  $X$ . Por ejemplo,

---

si  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  entonces un conjunto difuso  $\tilde{A} = \{(a_i/x_i) | x_i \in X\}$ , donde  $a_i = \mu_{\tilde{A}}(x_i)$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ , puede notarse por [86]:

$$\tilde{A} = a_1/x_1 + a_2/x_2 + \dots + a_n/x_n = \sum_{i=1}^n a_i/x_i$$

Cuando el universo  $X$  es continuo, para representar un conjunto difuso usamos la siguiente expresión:

$$\tilde{A} = \int_x a/x$$

donde  $a = \mu_{\tilde{A}}(x)$  y la integral debería ser interpretada de la misma forma que el sumatorio en el universo finito.

A continuación introducimos otros conceptos básicos a la hora de trabajar con conjuntos difusos, como son el **soporte**, el **núcleo** y el  $\alpha$ -**corte** de un conjunto difuso.

**Definición 3** *El soporte de un conjunto difuso  $\tilde{A}$ ,  $\text{Soporte}(\tilde{A})$ , es el conjunto de todos los elementos de  $x \in X$ , tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero:*

$$\text{Soporte}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\}$$

**Definición 4** *El núcleo de un conjunto difuso  $\tilde{A}$ ,  $\text{Núcleo}(\tilde{A})$ , es el conjunto de todos los elementos de  $x \in X$ , tales que el grado de pertenencia es igual a 1.*

$$\text{Núcleo}(\tilde{A}) = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) = 1\}$$

En muchas ocasiones puede ser interesante conocer no sólo los elementos que pertenecen en algún grado al conjunto difuso, sino también conocer el conjunto de aquellos elementos que lo hacen con un valor al menos igual o mayor que un determinado umbral  $\alpha$ . Estos conjuntos se denominan  $\alpha$ -cortes.

**Definición 5** *Sea  $\tilde{A}$  un conjunto difuso sobre el universo  $X$  y dado un número  $\alpha \in [0, 1]$ , se define el  $\alpha$ -corte sobre  $\tilde{A}$ ,  ${}^\alpha A$ , como un conjunto clásico que contiene todos los valores del universo  $X$  cuya función de pertenencia en  $\tilde{A}$  sea mayor o igual al valor  $\alpha$ :*

$${}^\alpha A = \{x \in X | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$$

**2.1.1.2. Tipos de Funciones de Pertenencia**

La función de pertenencia no es una función trivial como en los conjuntos clásicos, por lo que hay que definirla. En principio, cualquier forma de la función  $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ , describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso  $\tilde{A}$  que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Estas funciones pueden tener diferentes representaciones gráficas (ver Figura 2.1), y pueden tener algunas propiedades específicas (ej., continuidad). A veces, la semántica de los conjuntos difusos no es muy sensible a variaciones en la forma, y es conveniente el uso de funciones simples.

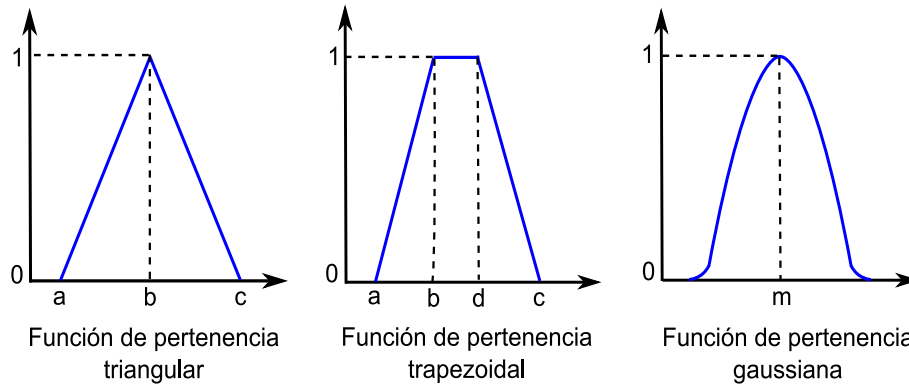


Figura 2.1: Representaciones gráficas de funciones de pertenencia

Los conjuntos difusos suelen representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son las siguientes:

**1. Función triangular**

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in (a, b) \\ \frac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in (b, c) \\ 0 & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde  $b$  es el punto modal de la función triangular, con  $a$  y  $c$  siendo los límites inferior y superior respectivamente, para los valores no nulos de  $\mu_{\tilde{A}}(x)$ .

## 2. Función trapezoidal

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in (a, b] \\ 1 & \text{si } x \in (b, d] \\ \frac{c-x}{c-d} & \text{si } x \in (d, c) \\ 0 & \text{si } x \geq c, \end{cases}$$

donde  $b$  y  $d$  indican el intervalo dónde la función de pertenencia vale 1.

## 3. Función Gaussiana

$$A(x) = e^{-k(x-m)^2},$$

donde  $k > 0$ .

### 2.1.1.3. Principio de Extensión

El *Principio de Extensión* es un concepto básico de la Teoría de Conjuntos Difusos utilizado para generalizar conceptos matemáticos no difusos a conjuntos difusos. A lo largo del tiempo han aparecido diferentes formulaciones de este concepto [43, 86] que se puede definir como:

**Definición 6** [86] Sea  $X$  el producto cartesiano de los universos  $X_1, \dots, X_r$  y sean  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$ ,  $r$  conjuntos difusos en  $X_1, \dots, X_r$  respectivamente. Sea  $f$  una función definida desde el universo  $X$ , ( $X = X_1 \times \dots \times X_r$ ), al universo  $Y$ ,  $y = f(x_1, \dots, x_r)$ . El Principio de Extensión nos permite definir un conjunto difuso  $\tilde{B}$  en  $Y$ , a partir de los conjuntos difusos  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_r$  representando su imagen a partir de la función  $f$ , de acuerdo a la siguiente expresión,

$$\tilde{B} = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x_1, \dots, x_r), (x_1, \dots, x_r) \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_r) \in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_r}(x_r)\}, & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.1)$$

Para  $r = 1$ , el Principio de Extensión se reduce a,

$$\tilde{B} = f(A) = \{(y, \mu_{\tilde{B}}(y)) / y = f(x), x \in X\}$$

donde

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\tilde{A}}(x), & \text{si } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

#### 2.1.1.4. Número Difuso

Entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen un especial significado aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$ :

$$\tilde{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

Bajo ciertas condiciones estos conjuntos difusos pueden ser vistos como “números difusos” o “intervalos difusos”, definiéndose el concepto de número difuso como sigue [43, 86]:

**Definición 7** [86] *Un número difuso  $\tilde{A}$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que verifica las siguientes propiedades:*

1. *La función de pertenencia es convexa*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall \lambda \in [0, 1], \mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$$
2. *Para cualquier  $\alpha \in (0, 1]$ ,  ${}^{\alpha}A$  debe ser un intervalo cerrado*
3. *El soporte de  $\tilde{A}$  debe ser finito*
4.  *$\tilde{A}$  está normalizado,*

$$\sup_x \mu_{\tilde{A}}(x) = 1$$

#### 2.1.2. Enfoque Lingüístico Difuso

Los problemas presentes en el mundo real presentan atributos que pueden ser de distinta naturaleza. Cuando dichos atributos son de naturaleza cuantitativa, éstos se valoran fácilmente utilizando valores numéricos. Sin embargo, cuando se trabaja con información vaga e imprecisa o cuando la naturaleza de tales atributos no es cuantitativa sino cualitativa, no es habitual utilizar un modelado de preferencias preciso. En estos casos, se ha mostrado adecuado el uso del modelado lingüístico, ya que mejora la fiabilidad y flexibilidad [110]. Este tipo de atributos suele aparecer

---

frecuentemente en problemas en los que se pretende evaluar fenómenos relacionados con percepciones y sensaciones de los seres humanos (diseño, diversión, gusto, amistad, etc.). En estos casos, se suelen utilizar palabras del lenguaje natural (bonito, feo, dulce, amargo, simpático, mucho, poco, seguro, cómodo, etc. . . .) en lugar de valores numéricos para emitir tales valoraciones. Tal y como se indica en [22, 178], el uso de un modelado lingüístico de preferencias puede deberse a varias razones:

- La información disponible con la que trabajan los expertos es demasiado vaga o imprecisa para ser valorada utilizando valores numéricos precisos.
- Información cuantitativa que no puede medirse porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta o porque el coste de su medición es muy elevado. En este caso, el uso de un valor aproximado que permita reflejar los distintos valores del problema puede ser adecuado. Por ejemplo, imaginemos una situación en la que se pretende evaluar la *velocidad de un coche* y no disponemos de un velocímetro, sirviéndonos tan solo de nuestras percepciones. Entonces, en lugar de valores numéricos, podemos utilizar términos lingüísticos como, *rápido, muy rápido, lento, etc.*, para medir la *velocidad*.

En la literatura existen diferentes enfoques para modelar la información lingüística [88, 113, 114, 160, 175, 176, 177]. En esta memoria utilizaremos el Enfoque Lingüístico Difuso, ya que proporciona un método directo para modelar dicha información lingüística mediante el uso de variables lingüísticas, cuyo dominio de expresión son términos lingüísticos o frases del lenguaje natural o artificial [175, 176, 177].

El Enfoque Lingüístico Difuso es un enfoque aproximado que tiene como base teórica para su desarrollo la *Teoría de Conjuntos Difusos*, y se muestra como una técnica para valorar aspectos de naturaleza cualitativa [3, 5, 11, 31, 33, 65, 166].

Una variable lingüística se caracteriza por un *valor sintáctico* o etiqueta y por un *valor semántico* o significado. La etiqueta es una palabra que pertenece a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo del discurso. Dado que las palabras son menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística parece ser adecuado

---

para caracterizar objetos que son demasiados complejos, o están mal definidos, para poder ser evaluados mediante valores numéricos precisos. Una variable lingüística en el Enfoque Lingüístico Difuso es definida como sigue:

**Definición 8** [175]. *Una variable lingüística se caracteriza por una quintupla  $(H, T(H), U, G, M)$ , donde  $H$  es el nombre de la variable;  $T(H)$  (o sólo  $T$ ) simboliza el conjunto de términos de  $H$ , es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de  $H$ , donde cada valor es una variable difusa notada genéricamente como  $X$  y que varía a lo largo del universo del discurso  $U$ , el cuál está asociado con una variable base llamada  $u$ ;  $G$  es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los nombres de los valores de  $H$ ; y  $M$  es una regla semántica para asociar significado  $M(X)$ , a cada elemento de  $H$ , el cual es un conjunto difuso de  $U$ .*

Para resolver cualquier problema desde el punto de vista del Enfoque Lingüístico Difuso es necesario llevar a cabo dos operaciones básicas y fundamentales:

- Elección de un adecuado conjunto de términos lingüísticos,  $T(H)$ .
- Definición de la semántica asociada a cada término lingüístico.

Ambas operaciones se describen a continuación.

### 2.1.2.1. Elección del Conjunto de Términos Lingüísticos

El objetivo de establecer los descriptores lingüísticos de una variable lingüística, es proporcionar a una fuente de información un número reducido de términos con los cuáles se pueda expresar con facilidad su información y/o conocimiento. Para cumplimentar este objetivo hay que analizar un aspecto muy importante, tal y como es, la *granularidad de la incertidumbre* [12], esto es, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usado para expresar la información. Se dice que un conjunto de términos lingüísticos tiene:

- Una granularidad baja o un tamaño de grano grueso cuando la cardinalidad del conjunto de términos lingüístico es pequeño. Esto significa que el dominio está poco particionado y que existen pocos niveles de distinción de la incertidumbre, produciéndose una pérdida de expresividad.
-

- Una granularidad alta o un tamaño de grano fino cuando la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos es alto. Esta granularidad es adecuada cuando el conocimiento de los expertos sobre la variable a valorar es alto. Sin embargo, cuando los expertos tienen un grado de conocimiento bajo, este tipo de granularidad puede resultar complejo, ya que los expertos no serían capaces de discriminar y seleccionar qué etiqueta representa mejor su valoración.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos no debe ser demasiado pequeña como para imponer una restricción de precisión a la información que quiere expresar cada fuente de información, y debe ser lo suficientemente grande para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Valores típicos de cardinalidad usados en modelos lingüísticos son valores impares, tales como 7 ó 9, donde el término medio representa una valoración de *aproximadamente 0.5*. El resto de los términos se distribuyen alrededor de éste [12]. Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de Miller [115] sobre la capacidad humana en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de siete o nueve términos diferentes.

Una vez establecida la cardinalidad es necesario establecer un mecanismo para generar los descriptores lingüísticos. Existen varios enfoques [14, 143, 166]. A continuación se introduce un enfoque que se utilizará en esta memoria.

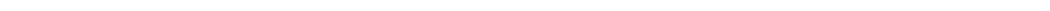
*Enfoque basado en Términos Primarios con una Estructura Ordenada*

Este enfoque consiste en asignar directamente un conjunto de términos lingüísticos distribuidos sobre una escala con un orden total definido [13, 65, 166]. Por ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de siete etiquetas  $T(H) = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$ :

$$\begin{aligned} s_0 &= N = Nada & s_1 &= MB = Muy Bajo \\ s_2 &= B = Bajo & s_3 &= M = Medio \\ s_4 &= A = Alto & s_5 &= MA = Muy Alto & s_6 &= P = Perfecto \end{aligned}$$

donde  $s_i < s_j$  si y sólo si  $i < j$ .

Normalmente en estos casos es necesario que los términos lingüísticos satisfagan las siguientes condiciones [165]:



## 22 2.1. Fundamentos sobre Lógica Difusa y Enfoque Lingüístico Difuso

1. Existe un operador de negación, por ejemplo,  $\text{Neg}(s_i) = s_j$  tal que  $j = g - i$ , siendo  $(g + 1)$  la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Tiene un operador de maximización:  $\max(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \leq s_j$ .
3. Tiene un operador de minimización:  $\min(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \geq s_j$ .

### **2.1.2.2. Definición de la Semántica del Conjunto de Términos Lingüísticos**

En la literatura existen varios enfoques para definir la semántica del conjunto de etiquetas lingüísticas [13, 143], siendo uno de los más utilizados el enfoque basado en funciones de pertenencia [12, 14, 33, 142]. Este enfoque define la semántica del conjunto de términos lingüísticos utilizando números difusos en el intervalo  $[0,1]$  donde cada número difuso es descrito mediante una función de pertenencia.

Un método eficiente desde un punto de vista computacional para caracterizar un número difuso es usar una representación basada en parámetros de su función de pertenencia [11, 32, 35, 36]. Debido a que las valoraciones lingüísticas dadas por las fuentes de información son aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones de pertenencia paramétricas trapezoidales son lo suficientemente buenas para representar la vaguedad de dichas valoraciones lingüísticas [35, 36]. Esta representación paramétrica se expresa usando una 4-tupla  $(a,b,d,c)$ . Los parámetros  $b$  y  $d$  indican el intervalo en el que la función de pertenencia vale 1; mientras que  $a$  y  $c$  indican los extremos izquierdo y derecho de la función de pertenencia [11].

En la Figura 2.2 se muestra la semántica de una variable lingüística que evalúa la altura de una persona, utilizando números difusos definidos por funciones de pertenencia trapezoidales.

---

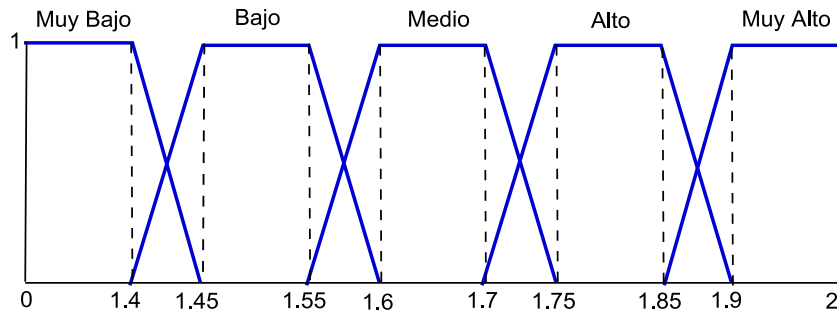


Figura 2.2: Definición semántica de la variable lingüística altura utilizando funciones trapezoidales

Un caso particular de este tipo de funciones de pertenencia son las funciones de pertenencia triangulares, en las que  $b = d$ , por lo que se representan mediante una 3-tupla  $(a,b,c)$ , donde  $b$  es el valor donde la función de pertenencia vale 1, mientras que  $a$  y  $c$  indican los extremos izquierdo y derecho de la función. La Figura 2.3 muestra el mismo conjunto anterior pero representado con funciones de pertenencia triangulares.

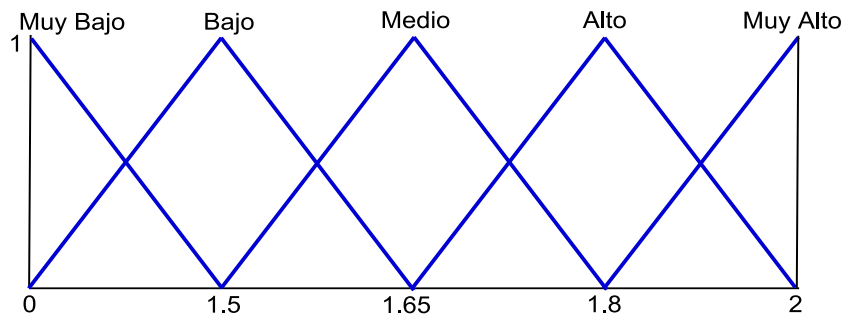


Figura 2.3: Definición semántica de la variable lingüística altura utilizando funciones triangulares

Otros autores utilizan otros tipos de funciones de pertenencia como por ejemplo, funciones Gaussianas [14].

Este enfoque implica establecer las funciones de pertenencia asociadas a cada etiqueta. Esta tarea presenta el problema de determinar los parámetros según los puntos de vista de todas las fuentes de información. En la realidad, es difícil que

todas las fuentes de información propongan exactamente las mismas funciones de pertenencia asociadas a los términos lingüísticos, debido a que cada una de ellas puede interpretar de forma parecida, pero a la vez diferente, el mismo concepto. Por ejemplo, dos percepciones muy cercanas pero diferentes de la evaluación del concepto *muy alto* pueden verse en la Figura 2.4.

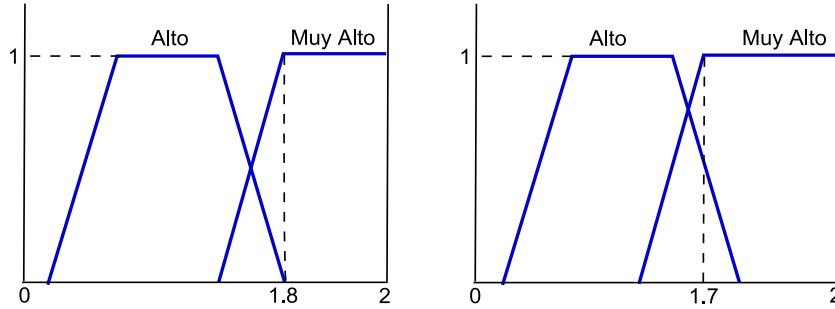


Figura 2.4: Diferentes distribuciones para el concepto muy alto

Por tanto, pueden darse situaciones de términos lingüísticos con una sintaxis similar y diferente semántica [65]. Además, no siempre es posible para las fuentes de información definir un conjunto difuso para cada etiqueta, porque requiera un exceso de precisión que la fuente de información no es capaz de proporcionar. Por ello, en muchas ocasiones consideraremos entornos donde las fuentes de información pueden discriminar sin problemas el mismo conjunto de términos lingüísticos bajo una concepción parecida, teniendo en cuenta que el concepto de variable lingüística sirve para expresar una medida de una caracterización aproximada de información para una preferencia imprecisa.

## 2.2. Toma de Decisiones Lingüística

En esta sección se introducen conceptos básicos y un esquema general de resolución de un problema de toma de decisiones y se extiende al uso de información lingüística. Posteriormente se revisan los modelos lingüísticos computacionales más utilizados en toma de decisiones lingüística.

### 2.2.1. Toma de Decisiones

La Toma de Decisiones es sin duda una de las actividades fundamentales de los humanos, ya que constantemente nos enfrentamos a situaciones en las que existen varias alternativas y tenemos que decidir cuál es mejor, o cuál llevar a cabo.

La Toma de Decisiones es un área que se aplica en distintas disciplinas y contextos del mundo real, tales como evaluación [28], inversión [58], selección [85], planificación [183], etc. Esta amplia gama de campos de aplicación tiene como consecuencia la existencia de diferentes modelos de Toma de Decisiones que han dado lugar a la Teoría de la Decisión.

Un problema clásico de decisión tiene los siguientes elementos básicos:

- Un conjunto de alternativas o posibles decisiones.
- Un conjunto de estados de la naturaleza que definen el contexto del problema.
- Un conjunto de valores de utilidad, cada uno de los cuales está asociado a un par formado por una alternativa y un estado de la naturaleza.
- Una función que establece las preferencias del experto sobre los posibles resultados.

Ante la gran variedad de situaciones o problemas de decisión que se pueden presentar en la vida real, la Teoría de Decisión ha establecido una serie de criterios que permiten clasificar los problemas atendiendo a diferentes puntos de vista:

- Según el número de criterios o atributos que se han de valorar en la toma de decisiones. Existen problemas de decisión que implican una “optimización simple” de las alternativas de acuerdo a un único criterio, mientras que otros problemas implican una “optimización múltiple” de acuerdo a varios criterios, hablándose de *Toma de Decisiones Multicriterio*.
  - Según el número de expertos que participan en el proceso de decisión. En caso de que en el problema de decisión sólo participe un único experto hablamos de *Toma de Decisiones Individual*, y en caso de participar varios expertos hablamos de *Toma de Decisiones Multiexperto* o *Toma de decisiones en Grupo*.
-

En esta memoria de investigación nos centraremos en problemas de decisión con múltiples expertos y/o con múltiples criterios.

A pesar de los distintos problemas de decisión [125] a los que nos podemos enfrentar, un esquema básico de resolución de este tipo de problemas fue presentado en [131] el cuál se compone de dos fases (ver Figura 2.5):

- *Fase de agregación*: Su objetivo es obtener un valor colectivo de preferencias para cada alternativa y/o criterio de representación, a partir de los valores individuales de preferencias proporcionados por los expertos que participan en el problema, utilizando un operador de agregación adecuado a las necesidades del problema.
- *Fase de explotación*: La información de entrada de esta fase son los valores colectivos obtenidos en la fase anterior. Su objetivo es seleccionar la/s mejor/es alternativa/s a partir de los valores colectivos. Para ello, se utilizan funciones de selección [120] que permiten seleccionar y ordenar las mejores alternativas a partir de vectores de utilidad o relaciones de preferencia.

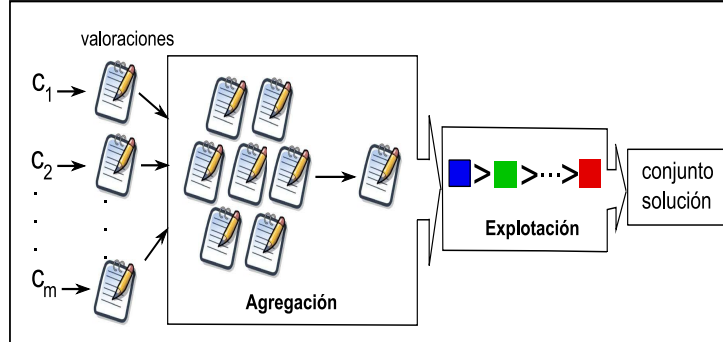


Figura 2.5: Esquema básico de resolución de un problema de Toma de Decisión

### 2.2.2. Uso de Información Lingüística en Toma de Decisiones

Como ya se ha comentado, los problemas de toma de decisiones se pueden definir en distintos contextos. El interés de esta memoria de investigación se centra en contextos vagos e imprecisos donde los problemas de decisión se definen bajo

incertidumbre y los seres humanos expresan sus valoraciones mediante información lingüística. En estas situaciones el uso del Enfoque Lingüístico Difuso ha proporcionado buenos resultados modelando este tipo de preferencias. Estos problemas de toma de decisiones se denominan *problemas de toma de decisión lingüísticos*.

El uso de información lingüística en toma de decisiones modifica el esquema básico de un problema de toma de decisión, introduciendo dos nuevos procesos tal y como indican Herrera y Herrera-Viedma en [64] (ver Figura 2.6).

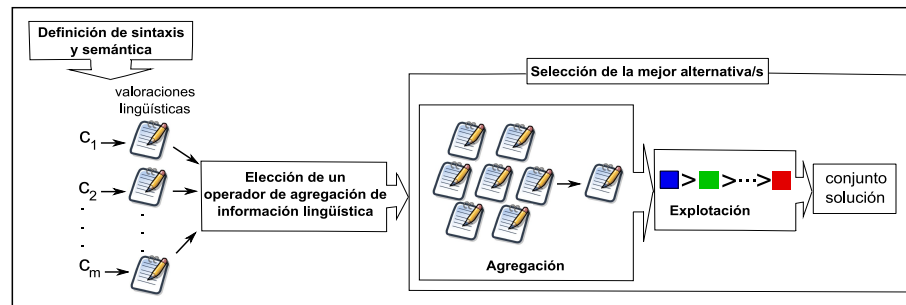


Figura 2.6: Esquema de un problema de Toma de Decisión Lingüístico

- *Elección del conjunto de términos lingüísticos con su semántica:* En esta fase se establece el dominio de expresión lingüística en el que los expertos expresan sus valoraciones lingüísticas sobre las alternativas según su conocimiento y experiencia.
- *Elección del operador de agregación de información lingüística:* Se elige un operador de agregación lingüístico adecuado para agregar las valoraciones lingüísticas proporcionadas por los expertos.
- *Selección de la mejor/es alternativa/s:* La mejor alternativa es elegida según las valoraciones lingüísticas proporcionadas por los expertos. Para ello se realizan las dos fases del esquema de resolución básico:
  - *Fase de agregación de información lingüística:* Obtiene una valoración colectiva para cada alternativa, agregando mediante el operador de agregación lingüístico seleccionado, las valoraciones lingüísticas proporcionadas por los expertos o sobre distintos criterios.

- *Fase de explotación*: Ordena las alternativas utilizando las valoraciones colectivas obtenidas en la fase anterior para seleccionar la/s mejor/es alternativa/s.

El modelado lingüístico de preferencias implica la necesidad de realizar procesos de computación con palabras, es decir, el uso de técnicas computacionales que tienen definidos operadores de agregación, comparación, negación, etc., sobre información lingüística. A continuación revisamos brevemente en qué consiste la computación con palabras en toma de decisiones.

### **Computación con Palabras en Toma de Decisiones**

La computación con palabras [179] es una metodología de razonamiento, computación y toma de decisiones en la que se utilizan palabras procedentes del lenguaje natural. La computación con palabras se ha convertido en un importante tema de investigación, en el que a lo largo del tiempo se han propuesto diferentes metodologías y enfoques.

La computación con palabras utiliza palabras o frases del lenguaje natural, lo que hace que pueda simular los procesos cognitivos humanos para mejorar los procesos de resolución de problemas que tratan con incertidumbre. Por tanto, la computación con palabras ha sido aplicada como base computacional en toma de decisiones lingüística [60, 106], ya que proporciona herramientas cercanas a los procesos de razonamiento de los seres humanos relacionados con la toma de decisiones. Pero no sólo se ha aplicado en toma de decisiones, sino también en otros campos como aprendizaje [9], clasificación [78], base de datos [83], etc.

En esta memoria de investigación nos centraremos en los procesos computacionales que se realizan en toma de decisiones lingüística donde los expertos que participan en el proceso de decisión proporcionan sus preferencias mediante información lingüística. En este caso, la salida que se obtiene tras la computación con palabras se puede clasificar en dos categorías:

1. Aquella que proporciona un orden entre las alternativas definidas en el proceso de decisión, para seleccionar la mejor alternativa como solución del problema de toma de decisión, que es en la que se centrará esta investigación.
  2. Y aquella que devuelve como salida un resultado lingüístico fácil de entender e interpretar por los seres humanos.
-

En la literatura se han propuesto diferentes esquemas de computación con palabras. Tong y Bonissone presentaron en [142] una técnica para toma de decisiones lingüística en la que se asumía que el uso de etiquetas lingüísticas con semántica difusa era adecuada para tratar la incertidumbre propia de estos problemas. También se asumía que los resultados para tomar una decisión, debían ser cuantificables en lenguaje natural (ver Figura 2.7).

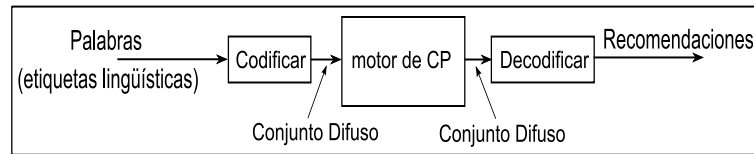


Figura 2.7: Esquema de computación lingüística difusa

De forma similar Schmucker [135] y principalmente Yager [167, 168] propusieron esquemas lingüísticos para manejar incertidumbre (ver Figura 2.8).

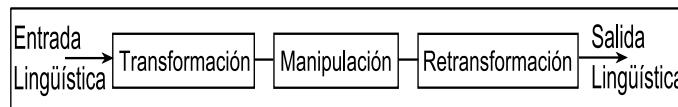


Figura 2.8: Esquema de computación con palabras

Yager [167, 168] señala la importancia de las fases de *transformación* y *retransformación* en los procesos de computación con palabras. El primero implica transformar la información lingüística en un formato manipulable por las máquinas basado en herramientas difusas, y el segundo, consiste en convertir los resultados computacionales en información lingüística para facilitar su comprensión a los seres humanos, siendo éste el principal objetivo en la computación con palabras.

Por consiguiente, diferentes esquemas de computación con palabras han sido desarrollados y aplicados como base computacional para toma de decisiones lingüística.

Teniendo en cuenta las consideraciones previas y las aplicaciones de la computación con palabras en toma de decisiones lingüística, vemos que es clara la necesidad de modelos lingüísticos computacionales que permitan realizar procesos de computación con información lingüística, para obtener resultados precisos y

comprensibles. Por tanto, a continuación revisaremos y analizaremos los modelos lingüísticos computacionales más ampliamente utilizados en toma de decisiones lingüística, centrándonos en los modelos computacionales simbólicos en los que además realizamos un análisis comparativo entre ellos, ya que son los que utilizaremos en esta investigación.

### 2.2.3. Modelos Lingüísticos Computacionales

Tal y como hemos visto en la sección anterior, el uso de información lingüística implica la necesidad de realizar procesos de computación con palabras, es decir, el uso de técnicas computacionales que tienen definidas diferentes operaciones tales como, agregación, negación, comparación, etc., sobre información lingüística. En la literatura relacionada con el Enfoque Lingüístico Difuso existen distintos modelos para realizar procesos de computación con palabras. Inicialmente en el Enfoque Lingüístico Difuso se utilizaban:

- El modelo lingüístico computacional basado en el Principio de Extensión [12, 31], también denominado *modelo semántico*, ya que utiliza la representación difusa de la semántica para operar.
- El modelo lingüístico computacional simbólico basado en Escalas Ordinales [34, 163].

Estos dos modelos, denominados habitualmente *modelos clásicos*, presentan diversas limitaciones debido a su forma de operar. Los resultados obtenidos con el modelo basado en el principio de extensión son precisos, pero difíciles de interpretar, ya que son representados mediante números difusos. Este modelo se puede hacer interpretable a costa de su precisión, es decir, el resultado se puede aproximar al término lingüístico más cercano perdiendo precisión. Sin embargo, el modelo simbólico basado en Escalas Ordinales es fácilmente interpretable, pero presenta pérdida de información en sus procesos computacionales. Estas limitaciones y la necesidad de realizar procesos de computación con palabras han provocado mucho interés investigador en los últimos años para superar dichas limitaciones [34, 39, 67, 89, 147, 148, 149, 160, 165].

La Figura 2.9 muestra la clasificación de los modelos lingüísticos computacionales que extienden los modelos *simbólico* y *semántico*.

---

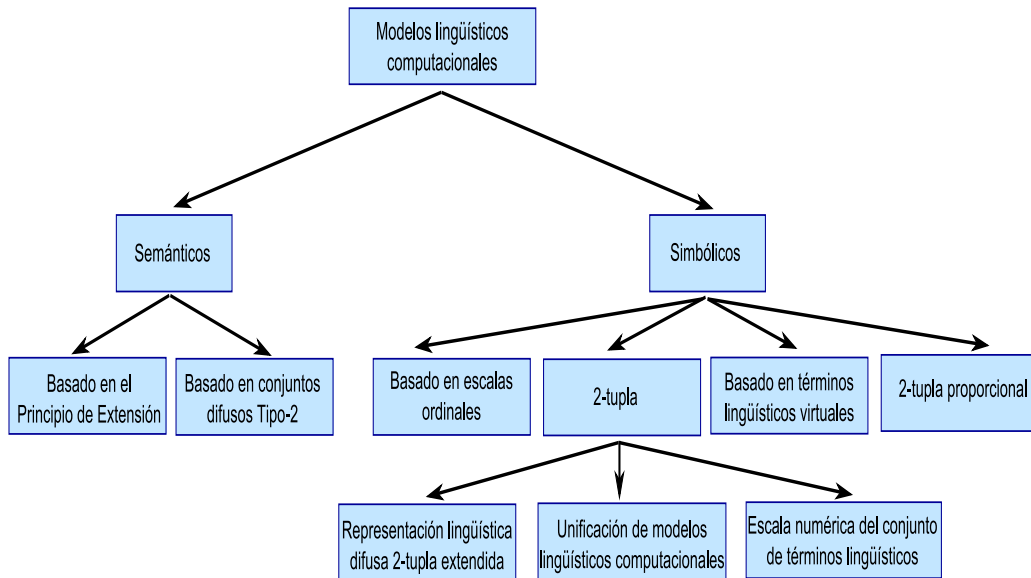


Figura 2.9: Clasificación de los modelos lingüísticos computacionales

**2.2.3.1. Modelo Lingüístico Computacional basado en el Principio de Extensión**

**A) Modelo de representación**

Este modelo computacional, también denominado *modelo semántico*, está basado en el Enfoque Lingüístico Difuso y representa la información lingüística mediante un conjunto de términos lingüísticos, tal como indica la Definición 8 (ver Figura 2.3).

**B) Modelo computacional**

Este modelo computacional realiza las operaciones con palabras utilizando la aritmética difusa basada en el Principio de Extensión [86]. El uso de la aritmética difusa produce un incremento de la vaguedad en los resultados de operaciones con palabras, ya que los números difusos obtenidos de operar con etiquetas lingüísticas no suelen coincidir con los números difusos que

representan la semántica de los términos lingüísticos iniciales.

Para entender el funcionamiento de este modelo computacional, a continuación mostramos un ejemplo de agregación de etiquetas lingüísticas en un problema de toma de decisiones lingüístico. Para ello, en primer lugar definimos un operador de agregación sobre información difusa:

**Definición 9** Sea  $\mu_{y_i}$  una función de pertenencia triangular de la forma,  $\mu_{y_i} = (a_i, b_i, c_i)$  y  $m$  el número de valores a agregar, la Media basada en el Principio de Extensión se define como:

$$\mu_{y_i} = \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m a_{ij}, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m b_{ij}, \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m c_{ij} \right) \quad (2.2)$$

**Ejemplo 2** Sea  $S = \{Nada(N), Muy Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Perfecto(P)\}$ , un conjunto de 7 términos lingüísticos, y sea  $y_j = (MB, M, M, B)$  un vector de utilidad cuyos valores queremos agregar. Si utilizamos la función definida en la Definición 9 obtenemos los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \mu_{y_j} &= ((.25 * (0 + .33 + .33 + .17)), (.25 * (.17 + .5 + .5 + .33)), \\ & (.25 * (.33 + .67 + .67 + .5))) = (.25 * (.83, 1.5, 2.17)) = (.207, .375, .542) \end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto difuso obtenido no coincide exactamente con ningún término lingüístico del conjunto de términos lingüístico inicial  $S$ .

$$\begin{aligned} N &= (0, 0, .17) & MB &= (0, .17, .33) & B &= (.17, .33, .5) \\ M &= (.33, .5, .67) & A &= (.5, .67, .83) & MA &= (.67, .83, 1) \\ P &= (.83, 1, 1). \end{aligned}$$

La forma de tratar estos resultados en toma de decisiones puede realizarse de forma diferente [12, 31], y dependerá del tipo de salida que queramos obtener en los problemas de decisión tal y como se indicó anteriormente.

- i) En aquellos problemas de decisión en los que la precisión es más importante que la interpretación de los resultados, éstos son expresados

mediante números difusos y se utilizan procedimientos de ordenación difusa para poder ordenar las alternativas [52].

- ii) Si lo que se requiere es un resultado lingüístico y fácil de entender por los expertos involucrados en el problema, entonces se hace necesario un proceso de aproximación lingüístico. Este proceso de aproximación puede realizarse de distintas formas. En el caso de un problema de toma de decisiones lingüístico donde se quieren obtener resultados expresados lingüísticamente, un esquema de aproximación basado en el Principio de Extensión es como sigue:

$$T(L)^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathbb{R}) \xrightarrow{app_1(\cdot)} T(L) \quad (2.3)$$

donde  $T(L)^n$  representa el dominio de definición de los términos lingüísticos,  $F(\mathbb{R})$  es el conjunto de números difusos sobre  $\mathbb{R}$ ,  $\tilde{F}$  es un operador de agregación basado en el Principio de Extensión,  $app_1(\cdot)$  es una función de aproximación lingüística y  $T(L)$  es el conjunto de términos lingüísticos inicial.

Siguiendo con el ejemplo anterior, utilizaremos como función de aproximación  $app_1(\cdot)$ , la mínima distancia euclídea sobre los valores de representación de los números difusos triangulares, ponderando éstos:

$$d(\mu_{s_j}, \mu_{y_k}) = \sqrt{P_1(a_j - a_k)^2 + P_2(b_j - b_k)^2 + P_3(c_j - c_k)^2} \quad (2.4)$$

representando  $(a_j, b_j, c_j)$  y  $(a_k, b_k, c_k)$  las funciones de pertenencia de  $s_j$  y de  $y_k$  respectivamente y  $P_1, P_2, P_3$  los pesos que representan la importancia de los parámetros  $a, b$  y  $c$ . Entonces  $app_1(\cdot)$  selecciona  $s_j^*$ , como etiqueta representativa del resultado obtenido,  $(app_1(y_k) = s_j^*)$ , tal que,

$$d(\mu_{s_j^*}, \mu_{y_k}) \leq d(\mu_{s_l}, \mu_{y_k}) \quad \forall s_l \in S$$

**Ejemplo 3** *Este proceso de aproximación lingüística lo aplicamos a los conjuntos difusos obtenidos en el Ejemplo 2, con  $P_1 = 0.2$ ,  $P_2 = 0.6$ ,  $P_3 = 0.2$ :*

*La Figura 2.10 muestra el proceso de aproximación lingüístico para  $y_k$ . Vemos que  $y_k$  no coincide con ningún término en  $S$ , entonces el término*

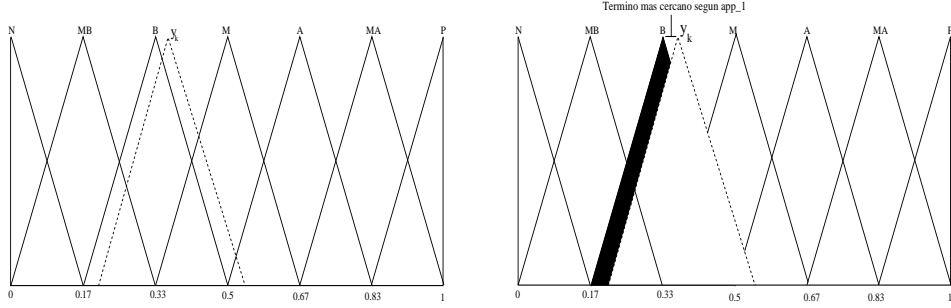


Figura 2.10: Proceso de aproximación lingüística

más cercano a  $y_k$  según  $app_1(\cdot)$  es obtenido de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\min\{d(\mu_{y_k}, \mu_N), d(\mu_{y_k}, \mu_{MB}), d(\mu_{y_k}, \mu_B), d(\mu_{y_k}, \mu_M), d(\mu_{y_k}, \mu_A), d(\mu_{y_k}, \mu_{MA}), d(\mu_{y_k}, \mu_P)\}$$

siendo,

$$d(\mu_{y_k}, \mu_N) = .347$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_{MB}) = .207$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_B) = .043$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_M) = .125$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_A) = .293$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_{MA}) = .457$$

$$d(\mu_{y_k}, \mu_P) = .595$$

donde,

$$d(\mu_{s_j^*}, N) = \sqrt{.2 \cdot (0 - .207)^2 + .6 \cdot (0 - .375)^2 + .2 \cdot (.17 - .542)^2} = .347$$

por tanto,

$$app_1(y_k) = B$$

ya que es la etiqueta más cercana a  $y_k$ .

En la Figura 2.10 se observa que existe una cantidad de información que se pierde durante el proceso de aproximación lingüístico. Esto se debe a que el resultado original (superficie blanca) puede tener una forma y superficie distinta al resultado final (superficie negra) y hay que realizar una aproximación desde el resultado original al resultado final.

Por tanto, este proceso de aproximación implica una pérdida de información y una falta de precisión en los resultados.

### 2.2.3.2. Modelo Lingüístico Computacional basado en Conjuntos Difusos Tipo-2

#### A) Modelo de representación

Este modelo computacional hace uso de conjuntos difusos Tipo-2 (ver Figura 2.11) para modelar valoraciones lingüísticas [112, 148]. El concepto de conjunto difuso Tipo-2 fue introducido como una extensión del concepto de conjunto difuso (también llamado conjunto difuso Tipo-1). Estos conjuntos son conjuntos difusos cuyo grado de pertenencia es otro conjunto difuso. Un ejemplo de un conjunto difuso Tipo-2 sería, *que el grado de pertenencia de un hombre al conjunto difuso alto es posiblemente 0.8*. Por tanto, un conjunto difuso Tipo-2 se utiliza cuando es difícil determinar con exactitud el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso.

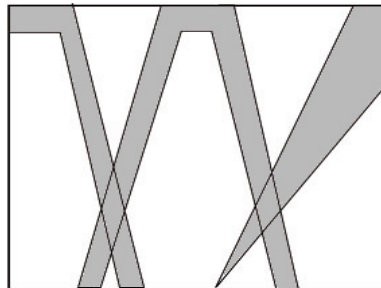


Figura 2.11: Ejemplo de representación de conjuntos difusos Tipo-2

Los conjuntos difusos Tipo-2 han sido utilizados por diferentes motivos, tal y como muestran los siguientes autores:

- Türkşen [148]: La representación Tipo-1 es un enfoque “reduccionista” que descarta incertidumbre en los valores de pertenencia mediante el cálculo del valor medio o mediante técnicas de ajuste de curva, por lo que camufla la incertidumbre de los valores de pertenencia.
- Mendel [113]: Las palabras tienen un significado diferente para cada

persona, lo que significa que las palabras son imprecisas. Por tanto, necesitamos un modelo difuso que tenga la capacidad de capturar la imprecisión de las palabras. Y un conjunto difuso intervalar Tipo-2 podría ser usado como un modelo difuso de una palabra.

### B) Modelo computacional

La mayoría de los trabajos de investigación en este área, utilizan conjuntos difusos intervalares Tipo-2 que son un tipo especial de conjuntos difusos Tipo-2. Estos conjuntos mantienen las propiedades del modelado de la imprecisión de los conjuntos difusos generales Tipo-2, pero disminuyen los esfuerzos computacionales necesarios para operar con ellos. En [40] y [184] fueron presentados los operadores Linguistic Weighted Averaging (LWA) y Linguistic Ordered Weighted Average (LOWA) basados en la representación Tipo-2. Estos operadores pueden verse como extensiones de los operadores Fuzzy Weighted Average (FWA) [93] y Ordered Weighted Average (OWA) [164], donde tanto el peso como los atributos son palabras modeladas mediante conjuntos difusos intervalares Tipo-2.

Este modelo basado en conjuntos difusos Tipo-2 necesita aproximar el resultado obtenido a un término lingüístico mediante un operador de agregación lingüístico, produciendo pérdida de información e imprecisión en los resultados obtenidos.

#### 2.2.3.3. Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en Escalas Ordinales

Los modelos simbólicos han sido ampliamente utilizados en los procesos de computación con palabras debido a su simplicidad en los procesos computacionales y a la fácil interpretación de los resultados obtenidos. A continuación se revisan dos modelos computacionales simbólicos basados en escalas ordinales.

#### Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en Escalas Ordinales y Operadores max-min

##### A) Modelo de representación

---

Este modelo representa la información según el Enfoque Lingüístico Difuso, pero impone un orden lineal para el conjunto de términos lingüísticos,  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  tal que  $s_i \leq s_j \Leftrightarrow i \leq j$ .

**B) Modelo computacional**

Este modelo simbólico utiliza la estructura ordenada del conjunto de términos lingüísticos para llevar a cabo los procesos de computación. Inicialmente Yager definió en [165] una serie de operadores para operar de forma simbólica, tales como, máximo, mínimo y negación que a continuación revisamos.

Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y sea  $s_i, s_j \in S$  dos términos lingüísticos.

- i) Operador de maximización:  $\max(s_i, s_j) = s_i$  si  $s_i \geq s_j$
- ii) Operador de minimización:  $\min(s_i, s_j) = s_j$  si  $s_j \leq s_i$
- iii) Operador de negación:  $\text{neg}(s_i) = s_{g-i}$ , siendo  $g + 1$  la granularidad de  $S$ .

Además, el orden obtenido sobre las etiquetas en este modelo permite definir un operador de comparación de la siguiente forma:

- i) Si  $i < j$ , entonces  $s_i < s_j$
- ii) Si  $j > i$ , entonces  $s_j > s_i$
- iii) Si  $i = j$ , entonces  $s_i = s_j$

**Ejemplo 4** Sea  $S = \{Nada(N), Muy Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Perfecto(P)\}$ , un conjunto de términos lingüísticos, y sea *Muy Bajo*, *Bajo*  $\in S$  dos términos lingüísticos. El resultado de los operadores definidos previamente son los siguientes:

$$\max(\text{Muy Bajo}, \text{Bajo}) = \text{Bajo}$$

$$\min(\text{Muy Bajo}, \text{Bajo}) = \text{Muy Bajo}$$

$$\text{neg}(\text{Muy Bajo}) = s_{6-1} = s_5 = \text{Muy Alto}$$

La comparación entre *Muy Bajo* y *Bajo* es,

$$\text{Muy Bajo} < \text{Bajo}$$

ya que  $s_1 < s_2$ .

En la literatura han sido propuestos otros operadores de agregación para este modelo. Yager [165, 169] estudió algunos operadores de agregación para información ordinal tales como, normas ponderadas, uninormas y media ordinal. Buckley [16] propuso diferentes variaciones de los operadores, mediana, max y min para agregar criterios y valoraciones lingüísticas.

### Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en la Combinación Convexa

#### A) Modelo de representación

Este modelo [34] es una extensión del anterior y tiene la misma base de representación.

#### B) Modelo computacional

Este modelo proporciona un amplio rango de operadores de agregación utilizando la Combinación Convexa de los términos lingüísticos [34], el cual trabaja directamente sobre los índices de las etiquetas,  $\{0, \dots, g\}$ , de los términos lingüísticos  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , en un proceso recursivo obteniendo como resultado un valor real en el intervalo de granularidad  $[0, g]$ , del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .

En este modelo normalmente la cardinalidad del conjunto de términos lingüístico es impar y las etiquetas lingüísticas son simétricamente distribuidas alrededor de un término medio. Normalmente, el resultado obtenido mediante el uso de la Combinación Convexa no coincide con ninguna etiqueta del conjunto de términos lingüísticos  $S$ , por tanto, es necesario introducir una función de aproximación  $app_2(\cdot)$  para obtener como solución un término lingüístico en el conjunto de términos lingüísticos  $S$ :

$$S^n \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{app_2(\cdot)} \{0, \dots, g\} \rightarrow S \quad (2.5)$$

Para entender el funcionamiento de este modelo computacional, mostraremos un ejemplo de agregación de etiquetas lingüísticas utilizando la Combinación Convexa que se define como sigue:

**Definición 10** [34] Sea  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$  un conjunto de términos lingüísticos para ser agregados, la Combinación Convexa  $C^m$  se define como:

$$C^m\{w_k, b_k, k = 1, \dots, m\} = w_1 \odot b_1 \oplus (1 - w_1) \odot C^{m-1}\{\eta_h, b_h, h = 2, \dots, m\} \quad (2.6)$$

donde  $W = (w_1, \dots, w_m)$  es un vector de pesos asociado a  $A$ , tal que, (i)  $w_i \in [0, 1]$ , y (ii)  $\sum_i w_i = 1$ ; y  $B = (b_1, \dots, b_m)$  es un vector, tal que,  $B = (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)})$ , con  $a_{\sigma(j)} \leq a_{\sigma(i)} \forall i \leq j$ , y  $\sigma$  es una permutación sobre los valores  $a_i$ .  $\eta_h = w_h / \sum_2^m w_k, h = 2, \dots, m$ .

Si  $m=2$ , entonces se define la Combinación Convexa como

$$C^2\{w_i, b_i, i = 1, 2\} = w_1 \odot s_j \oplus (1 - w_1) \odot s_i = s_k, \quad s_j, s_i, \in S, (j \geq i)$$

con,

$$k = \text{mín}\{g, i + \text{round}(w_1 \cdot (j - i))\},$$

siendo  $g + 1$  la cardinalidad de  $S$ , “round” el operador usual de redondeo y  $b_1 = s_j, b_2 = s_i$ .

Si  $w_j = 1$  y  $w_i = 0$  con  $i \neq j \forall i$ , definimos la Combinación Convexa como:

$$C^m\{w_i, b_i, i = 1, \dots, m\} = b_j.$$

**Ejemplo 5** Supongamos un ejemplo en el que se quiere agregar el vector lingüístico  $(A, A, M, MB)$ , donde todos los valores tienen el mismo grado de importancia, por lo que en este caso el vector de pesos es  $W = (.25, .25, .25, .25)$ , entonces los valores agregados obtenidos serán:

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = M$$

El proceso de cálculo con el operador Combinación Convexa es el siguiente:

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, MB)\}$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (M, MB)\}$$

$$C^2\{(.5, .5), (M, MB)\} = s_{k_2} = s_2 = B$$

$$k_2 = \text{mín}\{6, 1 + \text{round}(0.5(2))\} = 2$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, MB)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_3 = M$$

$$k_3 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.33(2))\} = 3$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot M = s_{k_4} = s_3 = M$$

$$k_4 = \min\{6, 3 + \text{round}(0.25(1))\} = 3$$

Como podemos observar, de forma similar a los modelos revisados en las Secciones 2.2.3.1 y 2.2.3.2, el proceso de aproximación produce pérdida de información y por tanto, falta de precisión en los resultados obtenidos.

Otros operadores de agregación basados en este modelo simbólico son los siguientes:

- Linguistic Ordered Weighted Average (LOWA) [157] basado en el operador OWA y en la Combinación Convexa de etiquetas lingüísticas.
- Linguistic Weighted Disjunction (LWD) [62].
- Linguistic Weighted Conjunction (LWC) [62].
- Linguistic Weighted Averaging (LWA) [62].
- Linguistic Aggregation of Majority Additive [127].
- Majority Guided Induced Linguistic Aggregation Operators [72].

A pesar de su simplicidad y a la fácil interpretación de los resultados obtenidos, este modelo presenta pérdida de información en sus procesos computacionales. Para superar esta limitación, diferentes modelos computacionales han sido propuestos extendiendo los modelos simbólicos clásicos para obtener resultados precisos e interpretables. A continuación revisamos algunos de estos modelos computacionales.

#### 2.2.3.4. Modelo Lingüístico Computacional 2-Tupla

El modelo lingüístico computacional 2-Tupla es revisado en mayor detalle, ya que es uno de los modelos simbólicos utilizados en los modelos de toma de decisiones propuestos en esta investigación.

Este modelo simbólico fue introducido por Herrera y Martínez en [67] con el objetivo de mejorar la precisión de los resultados y facilitar los procesos de computación con palabras tratando el dominio lingüístico continuo pero manteniendo la

---

base lingüística (sintaxis y semántica). Para ello, este modelo extiende la representación lingüística difusa añadiendo un nuevo parámetro.

A) **Modelo de representación**

El modelado de la información lingüística está basado en el concepto de *Traslación Simbólica* y lo utiliza para representar la información lingüística mediante un par de valores, llamados *2-tupla lingüística*  $(s_i, \alpha)$ , donde  $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$  es un término lingüístico y  $\alpha$  es un valor numérico representando la *Traslación Simbólica*.

**Definición 11** [67] Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $\beta \in [0, g]$  el resultado de una operación de agregación simbólica. La *Traslación Simbólica* de un término lingüístico  $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$  es un valor numérico definido en  $[-0.5, 0.5)$  que representa la “diferencia de información” entre una cantidad de información  $\beta \in [0, g]$  obtenida de una operación simbólica y el índice del término lingüístico más cercano.

Este modelo de representación define un conjunto de funciones para realizar transformaciones entre valores numéricos y 2-tupla lingüística con objeto de facilitar los procesos de computación con palabras [67].

**Definición 12** [67] Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos. La 2-tupla asociada a  $\beta$  es obtenida mediante la función  $\Delta : [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5)$  definida como:

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \quad \text{con} \quad \begin{cases} i = \text{round}(\beta), \\ \alpha = \beta - i, \end{cases} \quad (2.7)$$

donde *round* es el operador de redondeo,  $s_i$  es la etiqueta con índice más cercano a  $\beta$  y  $\alpha$  es el valor de la traslación simbólica.

El funcionamiento de la función  $\Delta$  que acabamos de definir puede observarse a continuación.

**Ejemplo 6** Supongamos una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos,  $S = \{Nada(N),$

$\{Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$  que obtiene como resultado de dicha operación un valor  $\beta = 2.8$ , entonces la representación de esta información mediante una 2-tupla lingüística es mostrada en la Figura 2.12.

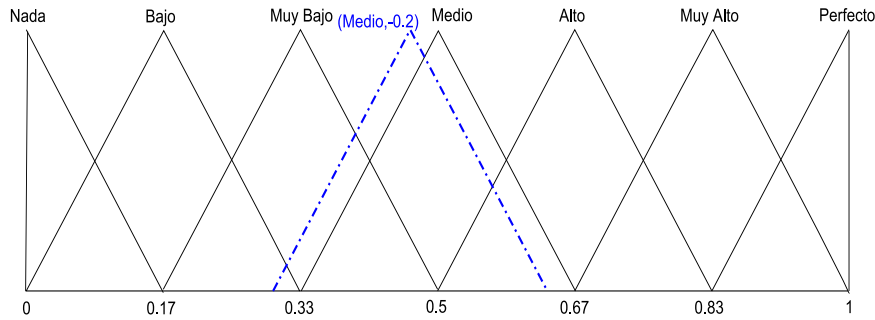


Figura 2.12: Ejemplo de una representación lingüística 2-tupla

Debemos tener en cuenta que  $\Delta$  es biyectiva y  $\Delta^{-1} : S \times [-0.5, 0.5) \rightarrow [0, g]$  es definida mediante  $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$ . De esta forma la 2-tupla en  $S \times [-0.5, 0.5)$  es identificada con el valor numérico en el intervalo  $[0, g]$ .

Obviamente la conversión de un término lingüístico en un valor 2-tupla lingüístico consiste en añadir un valor 0 como traslación simbólica:

$$s_i \in S \Rightarrow (s_i, 0)$$

## B) Modelo computacional

Junto a este modelo de representación de información lingüística, Herrera y Martínez definieron un modelo computacional lingüístico basado en las funciones de transformación  $\Delta$  y  $\Delta^{-1}$ . En [67] se definieron los operadores de comparación, negación y varios operadores de agregación para 2-tuplas que revisamos a continuación.

### Comparación de 2-Tuplas

La comparación de información lingüística representada mediante 2-tuplas se realiza según un orden lexicográfico. Sea  $(s_k, \alpha_1)$  y  $(s_l, \alpha_2)$  dos 2-tuplas, cada una representando una cantidad de información, entonces:

- Si  $k < l$  entonces  $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
- Si  $k = l$  entonces
  - a) Si  $\alpha_1 = \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1), (s_l, \alpha_2)$  representa la misma información
  - b) Si  $\alpha_1 < \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
  - c) Si  $\alpha_1 > \alpha_2$  entonces  $(s_k, \alpha_1) > (s_l, \alpha_2)$

### Operador de negación de una 2-Tupla

Este operador fue definido como:

$$Neg((s_i, \alpha)) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha))) \quad (2.8)$$

donde  $g + 1$  es la cardinalidad de  $S$ ,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

### Agregación de 2-Tuplas

La agregación consiste en obtener un valor colectivo que exprese la información de un conjunto de valores marginales. El resultado de una operación de agregación debe ser consistente con la representación de los valores de entrada, por tanto, el resultado de la agregación de 2-tuplas debe ser una 2-tupla.

A continuación revisaremos algunos operadores de agregación sobre 2-tuplas que fueron definidos en [67], aunque posteriormente se han definido otros [91, 127].

#### a) Media Aritmética

**Definición 13** [2] Sea  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de valores numéricos para una variable  $x$ . La media aritmética  $\bar{x}$  se obtiene dividiendo la suma de todos los valores por su cardinalidad, i.e.,

$$\bar{x}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.9)$$

Este operador simboliza el concepto intuitivo de punto de equilibrio o centro del conjunto de valores. Extender este operador para tener un operador equivalente para información lingüística representada mediante 2-tuplas, se puede hacer como muestra la siguiente definición:

**Definición 14** [67] Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_n, \alpha_n)\}$  un conjunto de 2-tuplas, su media aritmética se calcularía con el operador media aritmética extendida,  $\bar{x}^e$ , que es definido como,

$$\bar{x}^e((r_1, \alpha_1), \dots, (r_n, \alpha_n)) = \Delta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i)\right) = \Delta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i\right) \quad (2.10)$$

b) Media ponderada

La media ponderada permite que diferentes valores  $x_i$  tengan diferente importancia. Esto se realiza asignando a cada valor  $x_i$  un peso asociado  $w_i$ , que indica cuál es la importancia de ese valor.

**Definición 15** [2] Sea  $x = \{x_1, \dots, x_n\}$  un conjunto de valores numéricos y  $W = (w_1, \dots, w_n)$  un vector numérico con los pesos asociados a cada  $x_i$ , tal que,  $w_1$  corresponde a  $x_1$  y así sucesivamente. La media ponderada se obtiene como sigue:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad (2.11)$$

Este operador fue adaptado para operar con 2-tuplas [67] de la siguiente forma:

Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas y  $W = (w_1, \dots, w_m)$  un vector numérico con los pesos asociados a cada 2-tupla. La media ponderada extendida  $\bar{x}^e$  se define como:

$$\bar{x}^e = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i}\right) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot w_i}{\sum_{i=1}^m w_i}\right) \quad (2.12)$$

Una modificación interesante sobre este operador,  $\bar{x}^e$ , sería que los pesos  $w_i$  fuesen también valores lingüísticos (2-tuplas). Dicho operador fue notado como  $\bar{x}_l^e$  y definido como sigue:

**Definición 16** [67] Sea  $x = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas y  $W = ((w_1, \alpha_1), \dots, (w_m, \alpha_m))$  el vector de pesos lingüísticos asociado. La media ponderada extendida  $\bar{x}_l^e$  sería:

$$\bar{x}_l^e = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(r_i, \alpha_i) \cdot \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}{\sum_{i=1}^m \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)}\right) = \Delta\left(\frac{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot \beta_{w_i}}{\sum_{i=1}^m \beta_{w_i}}\right), \quad (2.13)$$

donde  $\beta_{w_i} = \Delta^{-1}(w_i, \alpha_i)$ .

c) OWA (Ordered Weighted Aggregation)

Este operador fue introducido por Yager en [164] como un operador de agregación ponderado, en el cuál, los pesos no están asociados a un valor predeterminado sino que están asociados a una posición determinada.

**Definición 17** [164] Sea  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  un vector de valores numéricos y  $W = (w_1, \dots, w_n)$  un vector de pesos asociado, tal que, (i)  $w_i \in [0, 1]$  y (ii)  $\sum w_i = 1$ .

El operador OWA,  $F$ , se obtiene como:

$$F(a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^n w_j b_j, \quad (2.14)$$

donde  $b_j$  es el  $j$ -ésimo mayor valor del conjunto  $A$ .

Para trabajar con 2-tuplas el operador OWA fue extendido,  $F^e$ , tal y como sigue:

**Definición 18** [67] Sea  $A = \{(r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)\}$  un conjunto de 2-tuplas y  $W = (w_1, \dots, w_m)$  un vector de pesos asociado que satisface que (i)  $w_i \in [0, 1]$  y (ii)  $\sum w_i = 1$ . El operador OWA extendido  $F^e$  para combinar 2-tuplas actúa como:

$$F^e((r_1, \alpha_1), \dots, (r_m, \alpha_m)) = \Delta\left(\sum_{j=1}^m w_j \cdot \beta_j^*\right), \quad (2.15)$$

siendo  $\beta_j^*$  el  $j$ -ésimo mayor valor de los  $\Delta^{-1}((r_i, \alpha_i))$ .

### 2.2.3.5. Modelo Lingüístico Computacional Simbólico basado en Términos Lingüísticos Virtuales

Xu presentó en [160] un nuevo modelo lingüístico computacional para trabajar con el Enfoque Lingüístico Difuso mejorando la precisión con respecto al modelo simbólico basado en escalas ordinales. Además, incrementó el número de leyes operacionales que se pueden aplicar a la información lingüística.

#### A) Modelo de representación

Dado que uno de los objetivos de Xu al presentar el modelo lingüístico Virtual era aumentar las leyes operacionales que se podían aplicar a los procesos de computación con palabras, este autor definió la representación de la información lingüística de forma que extendió los valores de un conjunto de términos lingüístico discreto  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  a un conjunto de términos continuo  $\bar{S} = \{s_\alpha | s_0 < s_\alpha \leq s_g, \alpha \in [-q, q]\}$ , donde  $q$  ( $q \gg g$ ) es un número entero lo suficientemente grande, tal que si  $s_\alpha \in S$ ,  $s_\alpha$  es llamado *término lingüístico original*, y en caso contrario,  $s_\alpha \in \bar{S}$  y  $s_\alpha \notin S$  se denomina *término lingüístico virtual*.

Es importante señalar que aunque Xu introduce su modelo basándose en el Enfoque Lingüístico Difuso, los términos lingüísticos virtuales, no tienen ni semántica ni sintaxis alguna asignada.

La Figura 2.13 muestra un conjunto de términos discretos  $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$  (términos lingüísticos originales) que extiende a un conjunto de términos continuos con términos lingüísticos virtuales tales como,  $s_{3.25} \in \bar{S}$ , que pueden ser obtenidos para evitar pérdida de información.

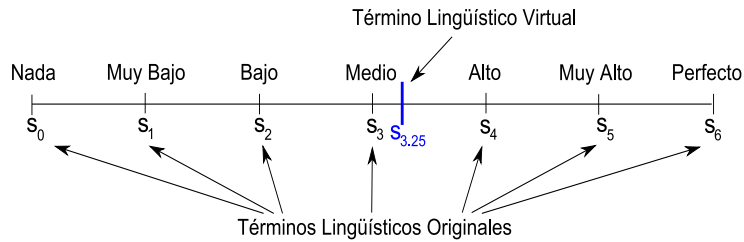


Figura 2.13: Ejemplo de representación del modelo propuesto por Xu

Según Xu, esta extensión permite conservar toda la información dada en el problema, evitando la pérdida de información presente en los modelos computacionales simbólicos clásicos. Es necesario decir que Xu indica que normalmente los expertos utilizarán términos lingüísticos originales para dar su información, mientras que los términos virtuales aparecerán como resultados de las operaciones sobre los primeros.

## B) Modelo computacional

Con la representación anterior y con la idea de ampliar el número de leyes

operacionales en los procesos de computación con palabras y obtener resultados precisos, Xu definió el siguiente conjunto de operaciones [158, 161]:

Sea  $s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$ , dos términos lingüísticos y  $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ .

- a)  $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$
- b)  $(s_\alpha)^{\mu_1} \otimes (s_\alpha)^{\mu_2} = (s_\alpha)^{\mu_1 + \mu_2}$
- c)  $(s_\alpha \otimes s_\beta)^\mu = (s_\alpha)^\mu \otimes (s_\beta)^\mu$
- d)  $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$
- e)  $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha+\beta}$
- f)  $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha$
- g)  $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$
- h)  $(\mu_1 + \mu_2)s_\alpha = \mu_1 s_\alpha \oplus \mu_2 s_\alpha$
- i)  $\mu(s_\alpha \oplus s_\beta) = \mu s_\alpha \oplus \mu s_\beta$

**Ejemplo 7** Si aplicamos dichas operaciones a un conjunto de términos,  $S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$  siendo  $\mu = 0.25$   $\mu_1 = 0.3$   $\mu_2 = 0.4$ , los resultados obtenidos son los siguientes:

- a)  $(B)^{0.25} = (s_2)^{0.25} = s_{1.19}$
- b)  $(B)^{0.3} \otimes (B)^{0.4} = (s_2)^{0.3+0.4} = (s_2)^{0.7} = s_{1.62}$
- c)  $(B \otimes MA)^{0.25} = (s_2)^{0.25} \otimes (s_5)^{0.25} = s_{1.19} \otimes s_{1.49} = s_{2.68}$
- d)  $B \otimes MA = s_2 \otimes s_5 = s_{5.2} = s_{10}$
- e)  $B \oplus MA = s_{2+5} = s_7$
- f)  $0.25 \cdot B = s_{0.25 \cdot 2} = s_{0.5}$
- g)  $(0.3 + 0.4)B = 0.3 \cdot s_2 \oplus 0.4 \cdot s_2 = s_{0.6} \oplus s_{0.8} = s_{0.6+0.8} = s_{1.4}$
- h)  $0.25(B \oplus MA) = 0.25 \cdot s_2 \oplus 0.25 \cdot s_5 = s_{0.25 \cdot 2} \oplus s_{0.25 \cdot 5} = s_{0.5} \oplus s_{1.25} = s_{0.5+1.25} = s_{1.75}$

Como podemos observar, los resultados obtenidos no coinciden con ninguna etiqueta lingüística del conjunto de términos lingüísticos inicial  $S$  y algunos están fuera del dominio de expresión, por lo que dichos resultados no tienen asignada ninguna sintaxis ni semántica y, por consiguiente no mantiene la base del Enfoque Lingüístico Difuso.

### 2.2.3.6. Modelo Lingüístico Computacional 2-tupla Proporcional

A pesar de que el modelo lingüístico computacional 2-tupla [67] es bastante reciente, en la literatura se han propuesto distintas extensiones de dicho modelo. El modelo lingüístico computacional 2-tupla proporcional fue presentado por Wang y Hao en [149] con el objetivo de desarrollar un nuevo modelo para representar la información lingüística extendiendo y generalizando el modelo lingüístico computacional 2-tupla.

#### A) Modelo de representación

Este modelo computacional representa la información lingüística mediante una 2-tupla proporcional. Supongamos dos etiquetas lingüísticas  $A$  y  $B$  que representan dos posibles calificaciones de un curso académico. Si un estudiante obtiene  $(0.2A, 0.8B)$ , su calificación sería 20% $A$  y 80% $B$ . Wang y Hao remarcan que si  $B$  fuese usada como la calificación aproximada, entonces se perdería información. Este enfoque de 2-tupla proporcional, está basado en el concepto de *Proporción Simbólica* [149].

**Definición 19** [149] Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos ordinales,  $I = [0, 1]$  y

$$IS \equiv I \times S = \{(\alpha, s_i) : \alpha \in [0, 1] \text{ y } i = 0, 1, \dots, g\} \quad (2.16)$$

donde  $S$  es el conjunto ordenado de  $g + 1$  términos ordinales  $\{s_0, \dots, s_g\}$ . Dado un par  $(s_i, s_{i+1})$  de dos términos ordinales sucesivos de  $S$ , cualquiera dos elementos de  $(\alpha, s_i), (\beta, s_{i+1})$  de  $IS$  es denominado par de proporción simbólica y  $\alpha, \beta$  son denominados pares de proporción simbólicos del par  $(s_i, s_{i+1})$  siendo  $\alpha + \beta = 1$ . Un par de proporción simbólica  $(\alpha, s_i), (1 - \alpha, s_{i+1})$  es representado por  $(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1})$  y el conjunto de todos los pares de proporciones simbólicas es representado mediante  $\bar{S}$ , tal que,  $\bar{S} = \{(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1}) : \alpha \in [0, 1], i = 0, 1, \dots, g - 1\}$ .

$\bar{S}$  es denominado el conjunto ordinal 2-tupla proporcional generado por  $S$  y los miembros de  $\bar{S}$ , 2-tupla proporcional ordinal, el cual es usado para representar la información ordinal en computación con palabras.

De forma similar a las funciones que Herrera y Martínez definieron en [67], Wang y Hao definieron funciones para facilitar las operaciones con este tipo de representación.

**Definición 20** [149] Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos ordinales y  $\bar{S}$  el conjunto 2-tupla proporcional ordinal generado por  $S$ . La función  $\pi : \bar{S} \rightarrow [0, g]$  fue definida como sigue:

$$\pi((\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1})) = i + (1 - \alpha), \quad (2.17)$$

donde  $i = \{0, 1, \dots, g - 1\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$  y  $\pi$  es la posición de la función índice de la 2-tupla ordinal.

Cabe destacar que la función  $\pi$  es biyectiva,  $\bar{S} \rightarrow [0, g]$  y su inversa  $\pi^{-1} : [0, g] \rightarrow \bar{S}$  es definida como sigue:

$$\pi^{-1}(x) = ((1 - \beta)s_i, \beta s_{i+1}) \quad (2.18)$$

donde  $i = E(x)$ ,  $E$  es la parte entera de la función y  $\beta = x - i$ , siendo  $x$  un valor real en el intervalo  $[0, g]$ .

Debemos destacar que los autores de este modelo no dejan claro si la proporción simbólica se refiere al soporte, superficie o  $\alpha$ -corte de las etiquetas lingüísticas, por lo que la semántica de una 2-tupla proporcional no puede ser representada.

## B) Modelo computacional

Junto a este modelo de representación de información lingüística, Wang y Hao presentaron un modelo computacional lingüístico que al igual que el modelo computacional del modelo 2-tupla [67] tiene definidos los siguientes operadores:

### Comparación de 2-tupla proporcional

Para cualquier  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1}) \in \bar{S}$ , se define  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1}) \Leftrightarrow \alpha i + (1 - \alpha)(i + 1) < \beta j + (1 - \beta)(j + 1) \Leftrightarrow i + (1 - \alpha) < j + (1 - \beta)$ .

De esta forma, para cualquier dos 2-tupla proporcionales  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1})$  y  $(\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$ :

- Si  $i < j$ , entonces
  - a)  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  son iguales cuando  $i = j - 1$  y  $\alpha = 0, \beta = 1$
  - b)  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  en otro caso,
- Si  $i = j$ , entonces
  - a) Si  $\alpha = \beta$  entonces  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  representan la misma información
  - b) Si  $\alpha < \beta$  entonces  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$
  - c) Si  $\alpha > \beta$  entonces  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) > (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$

### Operador de negación de una 2-tupla proporcional

Este operador fue definido de la siguiente forma:

$$Neg((\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1})) = ((1 - \alpha)s_{g-i-1}, \alpha s_{g-i}) \quad (2.19)$$

siendo  $g + 1$  la cardinalidad de  $S$ .

### Agregación de 2-tupla proporcional

De forma análoga a Herrera y Martínez, Wang y Hao definieron varios operadores de agregación para realizar procesos de computación con palabras. Las definiciones de estos operadores están basados en valores característicos de las etiquetas lingüísticas [149, 150].

#### 2.2.3.7. Otros Modelos Lingüísticos Computacionales basados en el Modelo 2-tupla

Recientemente han sido presentados tres nuevos modelos lingüísticos computacionales basados en el modelo lingüístico computacional 2-tupla [38, 39, 89, 147]. A continuación revisamos brevemente dichos modelos.

- *Representación lingüística difusa 2-tupla extendida*

Li presentó en [89] una extensión del modelo lingüístico computacional 2-tupla utilizando el modelo lingüístico computacional basado en términos lingüísticos virtuales [160] y el modelo lingüístico computacional 2-tupla [67].

**A) Modelo de representación**

La principal característica de este modelo es que transforma términos lingüísticos virtuales en términos lingüísticos originales utilizando una representación basada en el modelo lingüístico computacional 2-tupla, denominado, *2-tupla extendida*.

Supongamos una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  que obtiene como resultado de dicha operación un término lingüístico virtual  $s_\alpha \in \bar{S} = \{s_\alpha | \alpha \in [-q, q]\}$ , donde  $q$  ( $q \gg g$ ) es un número entero lo suficientemente grande.  $\bar{S}$  es un conjunto de términos lingüístico extendido asociado al conjunto de términos lingüísticos  $S$ .

**Definición 21** [89] Sea  $\varphi : \bar{S} \rightarrow S \times [-0.5, 0.5)$  una función que para cualquier  $s_\alpha \in \bar{S}$ ,  $\varphi(s_\alpha) = (s_{t_\alpha}, \alpha - t_\alpha)$  donde  $s_{t_\alpha} \in S$ , y  $t_\alpha$  es un valor entero  $t_\alpha \in \{0, \dots, g\}$ , que satisface la siguiente relación,

$$|\alpha - t_\alpha| = \min\{|\alpha - t| / t \in \{0, \dots, g\}\}$$

Por tanto, a la expresión  $\varphi(s_\alpha) = (s_{t_\alpha}, \alpha - t_\alpha)$  se le denomina *representación lingüística difusa 2-tupla extendida*.  $s_{t_\alpha}$  es el término lingüístico más cercano al término lingüístico virtual  $s_\alpha \in \bar{S}$  y  $\alpha - t_\alpha \in [-0.5, 0.5)$  es el valor de la traslación simbólica que expresa la diferencia entre  $s_\alpha \in \bar{S}$  y  $s_{t_\alpha} \in S$ .

**Ejemplo 8** Supongamos una operación de agregación simbólica sobre etiquetas valoradas en el conjunto de términos lingüísticos,  $S = \{Nada(N), Muy Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Perfecto(P)\}$ , que obtiene como resultado de dicha operación un valor  $s_{0.53}$ , entonces la transformación de este término lingüístico virtual a una 2-tupla extendida se obtiene aplicando la Definición 21.

$$\min = \{|0.53 - 0|, |0.53 - 1|, |0.53 - 2|, |0.53 - 3|, |0.53 - 4|, |0.53 - 5|, |0.53 - 6|\} = |0.53 - 1|$$

$$\varphi(s_{0.53}) = (\text{Muy Bajo}, -0.47)$$

Es importante señalar que si  $s_\alpha \in S$ , entonces su representación lingüística difusa 2-tupla extendida sería:

$$\varphi(s_\alpha) = (s_\alpha, 0)$$

### B) Modelo computacional

Li utilizó esta representación junto con el modelo computacional basado en términos lingüísticos virtuales [159] para operar con la *2-tupla extendida*.

- *Escala numérica del conjunto de términos lingüísticos*

Dong et al. [38, 39] introdujeron un modelo de representación lingüística 2-tupla basado en los modelos de Herrera y Martínez [67] y Wang y Hao [149]. Aunque estos modelos usan una representación lingüística diferente, Dong et al. indican que la clave de los modelos de representación lingüísticos 2-tupla es definir una función que permita realizar transformaciones entre valores 2-tupla lingüística y valores numéricos. Para ello proponen el concepto de *Escala Numérica*.

### A) Modelo de representación

Este modelo computacional representa la información mediante la definición de *escala numérica*.

**Definición 22** [39] Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $\mathbb{R}$  un conjunto de números reales. Una escala numérica de  $S$  es definida mediante la función,

$$NS : S \rightarrow \mathbb{R}$$

donde  $NS(s_i)$  es el índice numérico de  $s_i$ .

**Definición 23** [39] La escala numérica  $\overline{NS}$  de un valor 2-tupla  $(s_i, \alpha) \in S$  es definida mediante la función,

$$\overline{NS}(s_i, \alpha) = \begin{cases} NS(s_i) + \alpha \times (NS(s_{i+1}) - NS(s_i)), & \alpha \geq 0 \\ NS(s_i) + \alpha \times (NS(s_i) - NS(s_{i-1})), & \alpha < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

El segundo modelo de representación lingüístico 2-tupla se obtiene estableciendo  $NS(s_i) = CCV(s_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, g\}$  donde  $CCV$  es el valor característico canónico del conjunto de términos lingüísticos  $S$ . Este modelo de representación lingüístico 2-tupla es similar al modelo propuesto por Wang y Hao [149].

### B) Modelo computacional

Dong et al. [39] también presentaron un modelo de optimización que calcula la escala numérica de un conjunto de términos lingüísticos mediante la definición de *Calibración Transitiva*.

Supongamos un conjunto de términos lingüísticos  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , un conjunto de tres alternativas  $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ , y dos términos lingüísticos  $s_\alpha, s_\beta, s_\delta \in S$ . Si un experto sabe que,

- a) La preferencia entre  $A_1$  y  $A_2$  es  $s_\alpha$ ,
- b) y la preferencia entre  $A_2$  y  $A_3$  es  $s_\beta$ .

Entonces, el experto utiliza un término lingüístico para proporcionar su preferencia entre  $A_1$  y  $A_3$ . Esto se denomina calibración transitiva entre  $s_\alpha$  y  $s_\beta$  y se representa como  $s_\alpha \bar{\oplus} s_\beta$ . Por tanto, si el experto proporciona el término lingüístico  $s_\delta$ , el resultado de la calibración transitiva entre  $s_\alpha$  y  $s_\beta$  es  $s_\delta$ , y se representa como  $s_\delta = s_\alpha \bar{\oplus} s_\beta$ .

**Definición 24** [39] *Una matriz de calibración transitiva se define como  $E = (e_{ij})_{(g+1) \times (g+1)}$ , donde  $e_{ij} = s_{i-1} \bar{\oplus} s_{j-1}$  y  $e_{ij} \in S$ .*

### ■ Unificación de modelos lingüísticos computacionales

#### A) Modelo de representación

Truck y Malefant [147] propusieron un enfoque para unificar diferentes modelos lingüísticos computacionales en un único modelo utilizando para ello una representación vectorial.

Básicamente la idea consiste en que cada modelo lingüístico computacional 2-tupla define un espacio vectorial para expresar todos los valores del conjunto de términos lingüísticos en este espacio, utilizando un conjunto de vectores independientes.

Un concepto básico en algebra lineal es la definición de *Base*.

**Definición 25** [147] Dado un espacio vectorial  $V$ , una base es un conjunto (finito o infinito)  $B = \vec{v}_i$  ( $i \in I$ ) de vectores  $\vec{v}_i$  con un índice  $i \in I$  que se extiende a todo el espacio vectorial.

Dada una base finita, cualquier vector  $\vec{v}$  puede ser expresado como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_1 + \dots + a_{nI} \vec{v}_{nI}$$

Truck y Malefant [147] extendieron el concepto *Base* a *Base Restringida* añadiendo restricciones para poder representar con vectores los modelos lingüísticos basados en la representación 2-tupla.

**Definición 26** [147] Dado un espacio vectorial  $V$ , una base restringida es un conjunto  $B = \vec{v}_i$  ( $i \in I$ ) de vectores  $\vec{v}_i$  indexados mediante un conjunto de índices  $I$  si solo si  $\forall \vec{v} \in V$ , existe un conjunto de números reales  $A_i = \{a_1, \dots, a_{nI}\}$  tal que,  $\vec{v} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_1 + \dots + a_{nI} \vec{v}_{nI}$ , donde  $a_i$  tiene la restricción  $a_i \in A_i \subset \mathbb{R}$ .

En [147] Truck y Malefant utilizaron el concepto *Base Restringida* para representar el modelo lingüístico computacional 2-tupla [67], el modelo lingüístico computacional 2-tupla proporcional [149], y el modelo de grados lingüísticos y sus modificadores simbólicos generalizados asociados [146], aunque podría ser aplicado en otros modelos lingüísticos computacionales. La Figura 2.14 muestra cómo los tres modelos mencionados forman una Base Restringida para el espacio vectorial  $[0, g]$ .

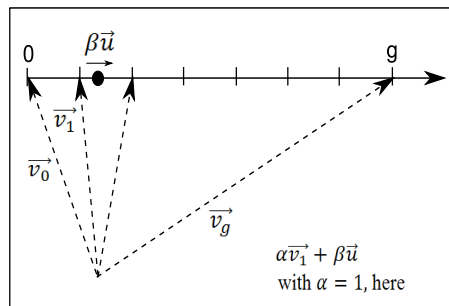


Figura 2.14: Base restringida en el espacio vectorial

B) **Modelo computacional**

Truck y Malefant no definieron ningún modelo computacional dejando como trabajos futuros la definición de diferentes operadores de agregación desde el punto de vista vectorial.

**2.2.4. Estudio Comparativo entre Modelos Lingüísticos Computacionales Simbólicos**

Para llevar a cabo uno de los objetivos presentados en el capítulo 1, aquí realizamos un análisis comparativo entre distintos modelos computacionales simbólicos que son los que utilizaremos en nuestra investigación, ya que proporcionan resultados fáciles de interpretar y han sido ampliamente utilizados en toma de decisiones lingüística.

Las características que analizaremos son las siguientes:

- Tipo de representación de la información
- Precisión
- Interpretabilidad

Para llevar a cabo este análisis comparativo, en primer lugar se define un problema de toma de decisiones lingüístico que se resolverá de forma similar utilizando cada uno de los siguientes modelos simbólicos:

- Modelo lingüístico computacional simbólico basado en escalas ordinales
- Modelo lingüístico computacional simbólico basado en términos lingüísticos virtuales
- Modelo lingüístico computacional simbólico 2-tupla
- Modelo lingüístico computacional simbólico 2-tupla proporcional

A partir de los resultados obtenidos haremos un análisis comparativo de las características anteriormente mencionadas.

---

### 2.2.4.1. Problema de Toma de Decisión Lingüístico

Por simplicidad, supongamos un problema de toma de decisión lingüístico en el que una pequeña empresa quiere renovar los ordenadores de sus empleados de ventas,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , que no son expertos en informática. Para ello se les solicita su opinión sobre cuál de las distintas alternativas  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  se adapta mejor a sus necesidades. El conjunto de alternativas  $X$  es el siguiente:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
<i>PC</i>	<i>Portatil</i>	<i>Netbook</i>	<i>Imac</i>

Dado que los empleados no son expertos en informática, sus preferencias tienen cierta incertidumbre debido a su falta de conocimiento y a que se basan en conocimiento cualitativo. Por tanto, expresan sus preferencias mediante valoraciones lingüísticas definidas en el conjunto de términos lingüísticos  $S = \{Nada(N), Muy Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Perfecto(P)\}$ , y cuya semántica es mostrada en la Figura 2.15.

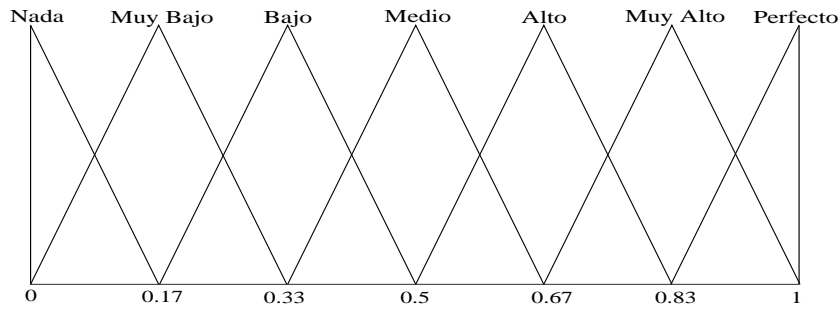


Figura 2.15: Conjunto de 7 etiquetas con su semántica asociada

Cada empleado proporciona un vector de preferencias lingüísticas que se recoge en la Tabla 2.1.

Para resolver este problema utilizaremos el esquema de resolución de la Figura 2.6 que consta de tres fases, (i) *Elección de términos lingüísticos con su semántica*, (ii) *Elección del operador de agregación de información lingüística* y (iii) *Selección de la mejor alternativa* dividida a su vez en dos procesos, agregación y explotación. En el proceso de agregación utilizaremos el operador de agregación de la media ponderada cuyos valores tendrán el mismo grado de importancia, y en el proceso de explotación seleccionaremos la alternativa con mayor valoración global.

Tabla 2.1: Preferencias de los expertos

		<i>alternativas</i>			
		$\mu_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<i>expertos</i>	$e_1$	<i>B</i>	<i>M</i>	<i>M</i>	<i>B</i>
	$e_2$	<i>M</i>	<i>B</i>	<i>MB</i>	<i>A</i>
	$e_3$	<i>A</i>	<i>MB</i>	<i>M</i>	<i>M</i>
	$e_4$	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>B</i>

### Solución basada en Escalas Ordinales

De los dos modelos basados en escalas ordinales revisados en la sección 2.2.3, utilizaremos el modelo basado en la Combinación Convexa para resolver el problema de toma de decisión lingüístico propuesto. Dado que todos los valores tienen el mismo grado de importancia, el vector de pesos es  $W = (.25, .25, .25, .25)$ , y para obtener los valores agregados para cada alternativa utilizaremos la función de la Combinación Convexa, Eq. (2.6).

#### Alternativa $x_1$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, B)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, B)\}$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, B)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (M, B)\}$$

$$C^2\{(.5, .5), (M, B)\} = s_{k_2} = s_3 = M$$

$$k_2 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.5(1))\} = 3$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (A, M, B)\} = .33 \odot A \oplus .66 \odot M = s_{k_3} = s_3 = M$$

$$k_3 = \min\{6, 3 + \text{round}(0.33(1))\} = 3$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, A, M, B)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot M = s_{k_4} = s_3 = M$$

$$k_4 = \min\{6, 3 + \text{round}(0.25(1))\} = 3$$

#### Alternativa $x_2$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\}$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (B, MB)\}$$

$$C^2\{(.5, .5), (B, MB)\} = s_{k_2} = s_2 = B$$

$$k_2 = \min\{6, 1 + \text{round}(0.5(1))\} = 2$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_2 = B$$

$$k_3 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.33(1))\} = 2$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, MB)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot B = s_{k_4} = s_3 = \mathbf{M}$$

$$k_4 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.25(2))\} = 3$$

#### Alternativa $x_3$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (M, M, B, MB)\} = .25 \odot M \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\}$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (B, MB)\}$$

$$C^2\{(.5, .5), (B, MB)\} = s_{k_2} = s_2 = B$$

$$k_2 = \min\{6, 1 + \text{round}(0.5(1))\} = 2$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, MB)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_2 = B$$

$$k_3 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.33(1))\} = 2$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (M, M, B, MB)\} = .25 \odot M \oplus .75 \odot B = s_{k_4} = s_2 = \mathbf{B}$$

$$k_4 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.25(1))\} = 2$$

#### Alternativa $x_4$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, B)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, B)\}$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, B)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot C^2\{(.5, .5), (B, B)\}$$

$$C^2\{(.5, .5), (B, B)\} = s_{k_2} = s_2 = B$$

$$k_2 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.5(0))\} = 2$$

$$C^3\{(.33, .33, .33), (M, B, B)\} = .33 \odot M \oplus .66 \odot B = s_{k_3} = s_2 = B$$

$$k_3 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.33(1))\} = 2$$

$$C^4\{(.25, .25, .25, .25), (A, M, B, B)\} = .25 \odot A \oplus .75 \odot B = s_{k_4} = s_3 = \mathbf{M}$$

$$k_4 = \min\{6, 2 + \text{round}(0.25(2))\} = 3$$

La Figura 2.16 muestra la semántica de los resultados obtenidos con este modelo.

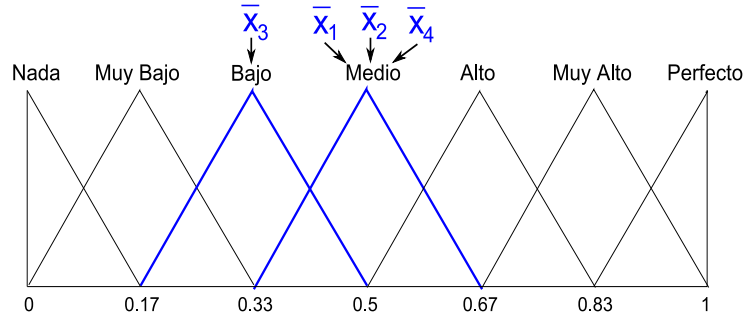


Figura 2.16: Resultados del modelo basado en la Combinación Convexa

El orden obtenido para el conjunto de alternativas es el siguiente:

$$x_3 = \text{Bajo} < x_1 = x_2 = x_4 = \text{Medio}$$

Por tanto, las mejores alternativas utilizando este modelo basado en la Combinación Convexa es,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_4 = \text{Medio}$$

### Solución basada en el Modelo Virtual

Para resolver el problema de toma de decisión con este modelo agregamos las preferencias proporcionadas por los expertos utilizando la media ponderada, que en este caso al ser las valoraciones igual de importantes coincide con la media aritmética definida por Xu mediante la siguiente ecuación:

$$\bar{x}^e = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} = \frac{1}{n} s_{\sum_{i=1}^n i} \quad (2.21)$$

Los valores colectivos obtenidos para cada alternativa son los siguientes:

$$\bar{x}_1^e = \frac{1}{4}(B + M + A + A) = \frac{1}{4}s_{(2+3+4+4)} = \frac{1}{4}s_{13} = s_{3.25}$$

$$\bar{x}_2^e = \frac{1}{4}(M + B + MB + A) = \frac{1}{4}s_{(3+2+1+4)} = \frac{1}{4}s_{10} = s_{2.5}$$

$$\bar{x}_3^e = \frac{1}{4}(M + MB + M + B) = \frac{1}{4}s_{(3+1+3+2)} = \frac{1}{4}s_9 = s_{2.25}$$

$$\bar{x}_4^e = \frac{1}{4}(B + A + M + B) = \frac{1}{4}s_{(2+4+3+2)} = \frac{1}{4}s_{11} = s_{2.75}$$

Dado que los resultados obtenidos no tienen asignada ninguna semántica ni sintaxis, no es posible realizar una representación semántica de los mismos.

El orden obtenido para el conjunto de alternativas es el siguiente:

$$x_3 = s_{2.25} < x_2 = s_{2.5} < x_4 = s_{2.75} < x_1 = s_{3.25}$$

y por tanto la mejor alternativa es  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{s}_{3.25}$ .

### Solución basada en el Modelo 2-Tupla

Para resolver el problema de toma de decisión lingüístico con este enfoque, primero pasamos las valoraciones lingüísticas proporcionadas por los expertos a 2-tupla (ver Tabla 2.2).

Tabla 2.2: Vectores de preferencia transformados a 2-tupla

		<i>alternativas</i>			
		$\mu_{ij}$	$x_1$	$x_2$	$x_3$
<i>expertos</i>	$e_1$	$(B, 0)$	$(M, 0)$	$(M, 0)$	$(B, 0)$
	$e_2$	$(M, 0)$	$(B, 0)$	$(MB, 0)$	$(A, 0)$
	$e_3$	$(A, 0)$	$(MB, 0)$	$(M, 0)$	$(M, 0)$
	$e_4$	$(A, 0)$	$(A, 0)$	$(B, 0)$	$(B, 0)$

Una vez que tenemos las valoraciones transformadas a 2-tupla, utilizamos el operador de agregación de la media aritmética (ver Def. 14), ya que las valoraciones tienen el mismo grado de importancia, y obtenemos los siguientes resultados:

$$\overline{x}_1^e = \Delta\left(\frac{1}{4}(2 + 3 + 4 + 4)\right) = \Delta\left(\frac{13}{4}\right) = \Delta(3.25) = (\textit{Medio}, .25)$$

$$\overline{x}_2^e = \Delta\left(\frac{1}{4}(3 + 2 + 1 + 4)\right) = \Delta\left(\frac{10}{4}\right) = \Delta(2.5) = (\textit{Medio}, -.5)$$

$$\overline{x}_3^e = \Delta\left(\frac{1}{4}(3 + 1 + 3 + 2)\right) = \Delta\left(\frac{9}{4}\right) = \Delta(2.25) = (\textit{Bajo}, .25)$$

$$\overline{x}_4^e = \Delta\left(\frac{1}{4}(2 + 4 + 3 + 2)\right) = \Delta\left(\frac{11}{4}\right) = \Delta(2.75) = (\textit{Medio}, -.25)$$

En la Figura 2.17 se muestra la semántica de los resultados del modelo 2-Tupla.

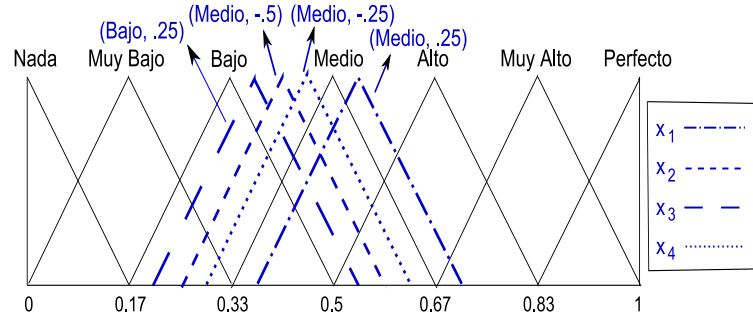


Figura 2.17: Resultados del modelo 2-Tupla

El orden de las alternativas utilizando este modelo lingüístico es el siguiente:

$$x_3 = (\text{Bajo}, .25) < x_2 = (\text{Medio}, -.5) < x_4 = (\text{Medio}, -.25) < x_1 = (\text{Medio}, .25)$$

y por tanto la mejor alternativa es  $\mathbf{x}_1 = (\text{Medio}, .25)$ .

### Solución basada en el Modelo 2-Tupla Proporcional

Para resolver el problema de toma de decisión lingüístico con este modelo, primero tenemos que transformar los valores lingüísticos a 2-Tupla proporcional como muestra la Tabla 2.3, y a continuación aplicar la media aritmética definida por Wang y Hao (ver Eq. 2.22) para obtener la preferencia colectiva de cada alternativa.

$$\bar{x}^e = \pi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \pi(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1})\right) = \pi^{-1}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i + (1 - \alpha))\right) \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^e &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(\pi(1B, 0M) + \pi(1M, 0A) + \pi(1A, 0MA) + \pi(1A, 0MA))\right) = \\ &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(2 + 3 + 4 + 4)\right) = \pi^{-1}(3.25) = ((1 - 0.25)M, 0.25A) = (0.75M, 0.25A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^e &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(\pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M) + \pi(1MB, 0B) + \pi(1A, 0MA))\right) = \\ &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(3 + 2 + 1 + 4)\right) = \pi^{-1}(2.5) = ((1 - 0.5)B, 0.5M) = (0.5B, 0.5M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_3^e &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(\pi(1M, 0A) + \pi(1MB, 0B) + \pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M))\right) = \\ &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(3 + 1 + 3 + 2)\right) = \pi^{-1}(2.25) = ((1 - 0.25)B, 0.25M) = (0.75B, 0.25M) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_4^e &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(\pi(1B, 0M) + \pi(1A, 0MA) + \pi(1M, 0A) + \pi(1B, 0M))\right) = \\ &= \pi^{-1}\left(\frac{1}{4}(2 + 4 + 3 + 2)\right) = \pi^{-1}(2.75) = ((1 - 0.75)B, 0.75M) = (0.25B, 0.75M) \end{aligned}$$

Tabla 2.3: Vectores de preferencia transformados a 2-tupla proporcional

		<i>alternativas</i>			
		$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
<i>expertos</i>	$e_1$	(1B, 0M)	(1M, 0A)	(1M, 0A)	(1B, 0M)
	$e_2$	(1M, 0A)	(1B, 0M)	(1MB, 0B)	(1A, 0MA)
	$e_3$	(1A, 0MA)	(1MB, 0B)	(1M, 0A)	(1M, 0A)
	$e_4$	(1A, 0MA)	(1A, 0MA)	(1B, 0M)	(1B, 0M)

En este modelo no podemos representar la semántica de los resultados obtenidos como hemos realizado con el modelo 2-Tupla, ya que sus autores no definieron la representación gráfica de la proporción simbólica.

El orden obtenido para el conjunto de alternativas es el siguiente:

$x_4 = (0.25B, 0.75M) < x_2 = (0.5B, 0.5M) < x_3 = (0.75B, 0.25M) < x_1 = (0.75M, 0.25A)$ , siendo la mejor alternativa la  $\mathbf{x}_1 = (\mathbf{0.75M}, \mathbf{0.25A})$ .

En la Tabla 2.4 podemos observar los resultados obtenidos con los distintos modelos en el problema de toma de decisión lingüístico.

Tabla 2.4: Resolución del problema con distintos modelos simbólicos

	Comb. Conv.	2-Tupla	Ling. Virtual	2-Tupla Prop
$\bar{x}_1$	<b>Medio</b>	(M, .25)	(s <sub>3.25</sub> )	(0.75M, 0.25A)
$\bar{x}_2$	<b>Medio</b>	(M, -.5)	(s <sub>2.5</sub> )	(0.5B, 0.5M)
$\bar{x}_3$	Bajo	(B, .25)	(s <sub>2.25</sub> )	(0.75B, 0.25M)
$\bar{x}_4$	<b>Medio</b>	(M, -.25)	(s <sub>2.75</sub> )	(0.25B, 0.75M)

Aunque la solución final con los distintos modelos es similar o igual, a continuación realizaremos un análisis comparativo de los resultados obtenidos centrándonos en las siguientes características:

- Tipo de representación de la información (TRI)
- Precisión
- Interpretabilidad

2.2.4.2. Estudio Comparativo

En esta sección vamos a realizar un análisis de los modelos computacionales simbólicos aplicados al problema de toma de decisión lingüístico, además de estudiar su adecuación al Enfoque Lingüístico Difuso.

La Tabla 2.5 muestra un análisis comparativo centrado básicamente en las tres características mencionadas que pasamos a ver más detalladamente.

Tabla 2.5: Análisis comparativo de modelos simbólicos

	Comb. Conv	2-Tupla	Lingüístico Virtual	2-Tupla Prop.
TRI	Difusa	Difusa	No difusa	No difusa
Precisión	No	Si	Si	Si
Interpretab.	Sí	Sí	No	Sí

▪ Tipo de representación de la información, TRI

- El modelo basado en la Combinación Convexa [34] mantiene una representación difusa de la información lingüística, ya que como podemos observar en la Figura 2.16, los resultados tienen asignada una sintaxis y una semántica, tal y como define el Enfoque Lingüístico Difuso.
- El modelo Virtual [161] obtiene resultados numéricos que pueden estar fuera del universo del discurso, por lo que no pueden ser representados lingüísticamente, ya que no tienen asignados ninguna semántica ni sintaxis. Por tanto, no mantiene la base en el Enfoque Lingüístico Difuso [142, 167].
- El modelo 2-Tupla [67] mantiene la representación difusa de la información lingüística, por lo que los resultados obtenidos tienen una sintaxis y semántica definida (ver Fig. 2.17) siguiendo el Enfoque Lingüístico Difuso.
- El modelo 2-Tupla proporcional [151] no mantiene una representación difusa, ya que utiliza la proporción de dos etiquetas lingüísticas consecutivas para representar el resultado.

**■ Precisión**

Con la precisión estudiamos la pérdida de información que se produce en los resultados de las operaciones en los procesos de computación con palabras.

- El modelo basado en la Combinación Convexa realiza normalmente un proceso de aproximación en los resultados obtenidos en la agregación, ya que no coinciden con ninguna etiqueta del conjunto de términos lingüísticos. Esto produce pérdida de información y por tanto, falta de precisión en los resultados obtenidos.
- El modelo Virtual es preciso en cualquier conjunto de etiquetas, ya que no utiliza semántica alguna y puede obtener valores fuera del universo del discurso de la variable lingüística.
- El modelo 2-Tupla sólo puede obtener valores dentro del universo de discurso de la variable, y garantiza precisión cuando el conjunto de etiquetas es simétrico y uniformemente distribuido.
- El modelo 2-Tupla proporcional sólo puede obtener valores dentro del universo de discurso, y garantiza la precisión aunque el conjunto de etiquetas no sea simétrico ni uniformemente distribuido.

**■ Interpretabilidad**

- El modelo basado en la Combinación Convexa obtiene resultados fáciles de entender ya que tienen sintaxis y semántica asignada.
- El modelo Virtual obtiene valores pseudo-lingüísticos difíciles de entender porque al no tener ni sintaxis ni semántica su única utilidad es la ordenación.
- El modelo 2-Tupla, sin embargo, obtiene resultados cualitativos fáciles de entender e interpretar.
- El modelo 2-Tupla proporcional es interpretable, pero algo más complejo que el modelo 2-Tupla, ya que utiliza cuatro valores para representar una única valoración.

De este análisis destacamos que sólo el modelo basado en la Combinación Convexa y el modelo lingüístico 2-Tupla siguen la base del Enfoque Lingüístico Difuso, ya que mantienen una sintaxis y una semántica difusa al representar y operar

---

con términos lingüísticos. Sin embargo, el modelo lingüístico 2-Tupla tiene mejores características respecto a precisión, por lo que de los dos modelos, el modelo lingüístico 2-Tupla es más apropiado para el tratamiento de la incertidumbre, y cercano al modelo cognitivo de los seres humanos. Mientras que los modelos Virtual y 2-Tupla proporcional no son modelos simbólicos tal y como definen sus autores en [149, 160] porque no mantienen la base del Enfoque Lingüístico Difuso.

Teniendo en cuenta este análisis comparativo, en los modelos de toma de decisiones propuestos en esta investigación para realizar los procesos de computación con palabras se utilizará el modelo simbólico clásico, el modelo simbólico basado en la Combinación Convexa y el modelo 2-Tupla.

### **2.2.5. Retos de la Información Lingüística en Toma de Decisiones Lingüística**

Los modelos lingüísticos computacionales simbólicos revisados en la sección anterior han proporcionado herramientas para mejorar los procesos de computación con palabras respecto a la precisión e interpretabilidad de los resultados obtenidos. Esto no significa que todos los problemas se puedan modelar y solucionar con estos modelos. Hasta ahora los resultados obtenidos mediante los modelos lingüísticos computacionales simbólicos son precisos y fáciles de entender, sin embargo restringen a los expertos a utilizar un único término lingüístico del conjunto de términos lingüísticos establecido, para valorar las alternativas o criterios en los problemas de toma de decisiones lingüísticos.

Uno de los principales retos de estos modelos lingüísticos computacionales simbólicos es enriquecer el vocabulario de expresión tanto para que los expertos proporcionen sus preferencias, como para expresar los resultados obtenidos en los procesos computacionales. Estos retos deberían ser alcanzados utilizando como base el Enfoque Lingüístico Difuso y manteniendo la simplicidad de los modelos actuales desde el punto de vista de la interpretabilidad.

En la literatura se han propuesto algunos enfoques [100, 141, 149] que utilizan más de un término lingüístico para valorar alternativas o criterios, sin embargo, ninguno de ellos proporciona expresiones similares a las expresiones utilizadas por los expertos en problemas de decisión y no son cercanos al modelo cognitivo de los seres humanos. Por tanto, el principal objetivo de esta tesis, indicado en el capítulo 1, se centra en facilitar la elicitación de la información lingüística de los

---

expertos en situaciones de decisión donde hay un alto grado de incertidumbre y no pueden proporcionar un único término lingüístico porque están pensando en varios de ellos o en expresiones lingüísticas más complejas que un simple término lingüístico. En el siguiente capítulo presentaremos una propuesta para el modelado de información lingüística en contextos dudosos cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos.

### 2.3. Toma de Decisiones Lingüística: Aplicaciones

Para mostrar la importancia de la toma de decisiones lingüística en problemas del mundo real, en esta sección, se presenta una revisión detallada de las distintas aplicaciones de decisiones publicadas en la literatura entre 2007 y 2012. Estas aplicaciones han sido organizadas según las siguientes áreas.

- **Evaluación:** La existencia de problemas reales de evaluación que tratan con información imprecisa y vaga se adaptan bastante bien al análisis de decisión lingüística, lo que ha conducido a diferentes propuestas de evaluación lingüística, (Tabla 2.6).

Tabla 2.6: Evaluación

<i>Aplicaciones</i>	<i>Trabajos</i>	<i>Año</i>
Evaluación y selección de proyectos	G. Büyüközkan et al. [18]	2008
	Halouani et al. [59]	2009
	Sánchez et al. [134]	2009
Evaluación de ingeniería	Martínez et al. [106]	2007
Evaluación sensorial	Zou et al. [186]	2008
	Martínez [102]	2007
	Martínez et al. [105]	2008
	Chen et al. [23]	2009
	Martínez et al. [104]	2009
Evaluación de inversiones	Shevchenko et al. [138]	2008
Desarrollo de nuevos productos	Fan et al. [46]	2009
	Wang [152]	2009
	Ngan [116]	2011

- **Gestión de Recursos:** La gestión de recursos es realmente una tarea compleja y más aún si tenemos en cuenta la imprecisión y subjetividad de la información relacionada con tales problemas. Para ello, se han propuesto en la literatura diferentes aplicaciones basadas en toma de decisión lingüística, (Tabla 2.7).

Tabla 2.7: Gestión de Recursos

<i>Aplicaciones</i>	<i>Trabajos</i>	<i>Año</i>
Gestión de energía sostenible	Doukas et al. [42]	2007
	Doukas y Psarras [41]	2009
	Kahraman et al. [85]	2010
	Kahraman y Kaya [84]	2010
	Zhang et al. [183]	2010
	Awasthi et al. [7]	2011
	Espinilla et al. [45]	2012
Gestión de recursos del agua	Fu [52]	2008
	Sen and Altunkaynak [136]	2009
	Zarghami & Szidarovszky [180]	2009
Gestión de recursos humanos	Yang et al. [171]	2007
	Genevois et al. [54]	2008
	Sun et al. [139]	2008
	Tai et al. [140]	2009
	de Andrés et al. [29, 30]	2010
	Dursun y Karsak [44]	2010
	Balezentis et al. [8]	2012
Gestión del conocimiento	Wang et al. [150]	2007
	Fan et al. [47]	2009
Situación de conocimiento	Lu et al. [98]	2008

- **Servicios basados en Internet:** El crecimiento del uso de Internet ha provocado la necesidad de resolver diferentes problemas relacionados con los servicios, como por ejemplo, la recuperación de productos según los gustos

de los clientes, manejar redes sociales en la web 2.0 entre otros. Para tratar este tipo de problemas se han propuesto diferentes modelos lingüísticos de decisión, (Tabla 2.8).

Tabla 2.8: Servicios basados en Internet

<i>Aplicaciones</i>	<i>Trabajos</i>	<i>Año</i>
Recuperación de información	Herrera-Viedma et al. [68, 70]	2007
	Liu [95]	2009
	Pei et al. [126]	2009
Sistemas de recomendación	Martínez et al. [108]	2007
	Martínez et al. [103]	2008
	Porcel et al. [128]	2009
	Castellano and Martínez [19]	2009
	Wang [153]	2009
	Noguera et al. [117]	2012
Calidad Web	Herrera-Viedma et al. [73]	2007
	Herrera-Viedma y López-Herrera [69]	2010
	Fan et al. [48]	2011
	Zhang [182]	2011
	Gramajo y Martínez [57]	2012
Redes sociales	Yager [170]	2010

- **Aplicaciones industriales:** Diferentes estrategias de selección para procesos industriales han sido manejados mediante modelos lingüísticos de decisión debido a la incertidumbre presente en tales procesos, (Tabla 2.9).
- **Más aplicaciones:** Además de las aplicaciones previas, diferentes modelos de decisión lingüísticos han sido utilizados en otras aplicaciones como las siguientes, (Tabla 2.10).

Tabla 2.9: Aplicaciones industriales

<i>Aplicaciones</i>	<i>Trabajos</i>	<i>Año</i>
Selección y evaluación de distribuidores	Chang et al. [21]	2007
	Li et al. [90]	2007
	Onut et al. [118]	2009
	Zhang et al. [181]	2009
	Sanayei et al. [133]	2010
Selección de localización	Chou et al. [25]	2008
	Önüt et al. [119]	2008
	Anagnostopoulos et al.[4]	2008
	Demirel et al. [37]	2010
Selección de material, stock y sistemas	Lin et al. [92]	2007
	Gharehgozli et al. [55]	2008
	Lu et al. [99]	2009
Evaluación de flexibilidad industrial	Chuu [26]	2007
	Chuu [27]	2009

Tabla 2.10: Más aplicaciones

<i>Aplicaciones</i>	<i>Trabajos</i>	<i>Año</i>
Valoración de situación	Lu et al. [96]	2008
Mejoras de inversión	Güngör et al. [58]	2007
Sistemas de voto	García y Martínez [53]	2009
Valoración de riesgo	Wang et al. [154]	2007
	Chang y Wen [20]	2010
	Xu et al. [183]	2010
	Fan et al [49]	2012
	Yanbing et al. [81]	2012



## Capítulo 3

# Modelado de Información Lingüística en Contextos Dudosos

Una vez revisado el Enfoque Lingüístico Difuso y los modelos lingüísticos computacionales más utilizados en toma de decisiones lingüística, y dado que en la motivación de la memoria se indicó la necesidad de modelar múltiples términos lingüísticos en situaciones de decisión donde hay un alto grado de incertidumbre, en este capítulo se introduce el concepto de *Conjunto de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos* (CTLDD), que permite modelar múltiples términos lingüísticos cuando los expertos dudan entre varios de ellos, y se define una gramática libre de contexto que genera expresiones lingüísticas comparativas similares a las utilizadas por los expertos en problemas de toma de decisiones. Finalmente, se presenta una serie de propiedades y operadores para realizar procesos de computación con palabras con CTLDD.

### 3.1. Introducción

Normalmente la complejidad que aparece en los problemas de toma de decisiones se debe a la incertidumbre que envuelve a las alternativas y el conocimiento de los expertos. Se han realizado muchas investigaciones en toma de decisiones, siendo uno de los principales tópicos el tratamiento y modelado de la incertidum-

bre de los distintos tipos de información que pueden utilizar los expertos para proporcionar sus preferencias tales como, variables lingüísticas [71], valores intervalares [80], conjuntos difusos dudosos [144], conjuntos difusos tipo-2 [148], etc. Nuestra investigación se centra en problemas de toma de decisiones definidos en contextos lingüísticos con alto grado de incertidumbre [107] donde es habitual que los expertos utilicen información lingüística para expresar sus preferencias. El uso de información lingüística ha proporcionado resultados fiables y satisfactorios en este tipo de problemas de toma de decisión [156]. Sin embargo, diferentes autores han indicado que es necesario realizar algunas mejoras en los modelos lingüísticos [100, 141]:

- La mayoría de los modelos lingüísticos manejan términos lingüísticos previamente definidos impidiendo de esta forma utilizar otras expresiones.
- Los expertos están limitados para expresar sus preferencias utilizando un único término lingüístico, por lo que algunas veces no pueden reflejar lo que ellos exactamente quieren.

Para evitar estas limitaciones, en la literatura se han propuesto diferentes enfoques. Wang y Hao [149] propusieron el uso de la 2-tupla lingüística proporcional que proporciona la posibilidad de utilizar proporciones de 2 términos lingüísticos consecutivos. Ma et al. [100] desarrollaron otro modelo lingüístico para incrementar la flexibilidad de las expresiones lingüísticas mediante la unión de diferentes términos lingüísticos para obtener un término sintetizado. Tang y Zheng [141] introdujeron también un modelo lingüístico que maneja expresiones lingüísticas construidas mediante conectivas lógicas ( $\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow$ ) y relaciones difusas que miden la similitud entre términos lingüísticos.

Estos modelos lingüísticos permiten proporcionar expresiones más ricas y flexibles que simples términos lingüísticos, pero no son similares a las expresiones que habitualmente utilizan los expertos en problemas de decisión, o no tienen definida una formalización para obtener dichas expresiones.

Por tanto, en este capítulo se introduce un nuevo modelo lingüístico que permite representar múltiples términos lingüísticos y facilita los procesos de computación con palabras. Además, se introduce una herramienta para generar expresiones cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos y propias de la toma de decisiones.

---

El modelo propuesto sigue el *Enfoque Lingüístico Difuso* [175, 176, 177] y extiende la idea base del concepto *Conjuntos Difusos Dudosos* [144] a contextos lingüísticos.

A continuación se revisa brevemente los Conjuntos Difusos Dudosos.

### 3.2. Conjuntos Difusos Dudosos

Este concepto fue propuesto por Torra [144] para resolver situaciones de duda en contextos cuantitativos, donde los expertos pueden dudar entre varios valores para establecer el grado de pertenencia de un elemento a un conjunto difuso.

La razón para que Torra [144] introduzca el concepto de *Conjunto Difuso Dudosos* es porque en contextos con información difusa “cuando un experto expresa el grado de pertenencia de un elemento, puede tener dificultad para establecer dicho grado, no porque exista un margen de error (como en los conjuntos difusos intuitionistas), o alguna distribución de posibilidad (como en conjuntos difusos tipo-2) en los posibles valores, sino porque duda entre un conjunto de posibles valores”.

Por ejemplo, supongamos un problema de evaluación sensorial en el que un experto tiene que valorar el grado de afrutado de una muestra de aceite de oliva y duda entre varios valores para dicha muestra. En este caso podría utilizar un conjunto difuso dudoso para expresar su valoración,  $\{0.4, 0.6, 0.7\}$ .

A continuación se introduce la definición formal de *Conjunto Difuso Dudoso* y algunas operaciones básicas que Torra definió sobre dichos conjuntos.

**Definición 27** [144] Sea  $X$  un conjunto de referencia, un conjunto difuso dudoso en  $X$  es una función  $h$  que devuelve un subconjunto de valores en el intervalo  $[0, 1]$ :

$$h : X \rightarrow P([0, 1])$$

Sea  $X$  un conjunto de referencia, Torra definió el conjunto difuso vacío, el conjunto difuso completo y un conjunto para representar la completa ignorancia:

- Conjunto vacío:  $h(x) = \{0\} \forall x \in X$ .
- Conjunto completo:  $h(x) = \{1\} \forall x \in X$ .
- Completa ignorancia para  $x \in X$ :  $h(x) = [0, 1]$ .

Un conjunto difuso dudoso también puede ser definido en términos de la unión de sus grados de pertenencia, como a continuación se indica.

**Definición 28** [144] Sea  $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  un conjunto de  $n$  funciones de pertenencia, el conjunto difuso dudoso asociado a  $M$ ,  $h_M$ , es definido como:

$$h_M : M \rightarrow P([0, 1])$$

$$h_M(x) = \bigcup_{\mu \in M} \{\mu(x)\}$$

Diferentes propiedades y operaciones de los conjuntos difusos dudosos [144] fueron también definidas. A continuación se revisan brevemente algunas de ellas.

**Definición 29** [144] Dado un conjunto difuso dudoso  $h$ , su límite inferior y superior es,

$$h^-(x) = \min h(x)$$

$$h^+(x) = \max h(x)$$

**Definición 30** [144] Sea  $h$ , un conjunto difuso dudoso, su complemento se define como sigue,

$$h^c(x) = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{1 - \gamma\}$$

**Proposición 1** [144] El complemento es involutivo

$$(h^c)^c = h$$

**Definición 31** [144] Sea,  $h_1$  y  $h_2$ , dos conjuntos difusos dudosos, su unión es definida como,

$$(h_1 \cup h_2)(x) = \{h \in (h_1(x) \cup h_2(x)) / h \geq \max(h_1^-, h_2^-)\}$$

**Definición 32** [144] Sea,  $h_1$  y  $h_2$ , dos conjuntos difusos dudosos, su intersección es definida como,

$$(h_1 \cap h_2)(x) = \{h \in (h_1(x) \cap h_2(x)) / h \leq \min(h_1^+, h_2^+)\}$$

**Definición 33** [144] Sea  $h$ , un conjunto difuso dudoso, la envoltura de  $h$ ,  $A_{env(h)}$ , es definida como,

$$A_{env(h)} = \{x, \mu_A(x), \nu_A(x)\}$$


---

donde  $A_{env(h)}$  es el conjunto difuso intuicionista [6] de  $h$  con  $\mu$  y  $v$  definido como sigue,

$$\begin{aligned}\mu_A(x) &= h^-(x) \\ v_A(x) &= 1 - h^+(x)\end{aligned}$$

Una posible aplicación de conjuntos difusos dudosos es en problemas de toma de decisión definidos en contextos cuantitativos [145], donde los expertos pueden dudar entre diferentes valores para expresar sus preferencias sobre las alternativas o criterios. Para ello, es necesario definir operadores de agregación que permitan agregar conjuntos difusos dudosos. Por esta razón, Torra y Narukawa [145] propusieron una función  $\Theta$ , para extender las operaciones de conjuntos difusos a Conjuntos Difusos Dudosos.

**Definición 34** [145] Sea  $\Theta$  una función  $\Theta : [0, 1]^N \rightarrow [0, 1]$  y  $H$  un conjunto de  $N$  conjuntos difusos dudosos en el conjunto de referencia  $X$ . La extensión de  $\Theta$  en  $H$  es definida para cada  $x \in X$  mediante:

$$\Theta_H(x) = \cup_{\gamma \in \{h_1(x) \times \dots \times h_N(x)\}}$$

A continuación se presenta un ejemplo de la extensión de la Media Aritmética aplicando la definición previa.

**Ejemplo 9** Sea  $h_1 = \{0.5, 0.6, 0.7\}$  y  $h_2 = \{0.5, 0.6\}$  dos conjuntos difusos dudosos, la Media Aritmética ( $MA$ ), de  $h_1$  y  $h_2$  es definida como sigue:

$$\begin{aligned}MA_{h_1, h_2} &= \cup_{\gamma \in \{h_1(x) \times \dots \times h_N(x)\}} \{MA(\gamma)\} = \{MA(0.5, 0.5)\} \cup \{MA(0.5, 0.6)\} \cup \\ &\{MA(0.6, 0.5)\} \cup \{MA(0.6, 0.6)\} \cup \{MA(0.7, 0.5)\} \cup \{MA(0.7, 0.6)\} = \{0.5\} \cup \\ &\{0.55\} \cup \{0.6\} \cup \{0.65\} = \{0.5, 0.55, 0.6, 0.65\}\end{aligned}$$

Esta función de extensión fue aplicada en la resolución de problemas de toma de decisiones multicriterio multiexperto [145].

### 3.3. Modelado de Duda en Contextos Cualitativos: Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos

De forma similar a las situaciones descritas y manejadas por conjuntos difusos dudosos en [144], donde un experto puede considerar varios valores para definir una

---

función de pertenencia, en contextos cualitativos puede suceder que los expertos duden entre varios valores para valorar una variable lingüística.

Veamos un ejemplo para entender más fácilmente la necesidad de modelar multiples términos lingüísticos en contextos dudosos.

**Ejemplo 10** *Supongamos que un comité evaluador formado por tres especialistas en arte  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ , tiene que proporcionar sus preferencias para elegir el mejor cuadro de una exposición. La exposición consta de 30 cuadros de los cuales 3 han sido seleccionados por votación pública. Los expertos deben evaluar los 3 cuadros elegidos por el público  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ , mediante el conjunto de términos lingüísticos  $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$ , siendo el conjunto de criterios a evaluar  $C = \{Armonía, Color, Textura, Movimiento, Contraste, Equilibrio\}$ . Cada experto tiene una especialidad en arte, tal y como muestra la Tabla 3.1. Por lo que a cada experto le resulta más fácil evaluar los criterios asociados a su especialidad que el resto de criterios, en los que podría dudar entre varios términos lingüísticos (ver Fig. 3.1).*

Tabla 3.1: Especialidades de los expertos

Experto	Especialidad
<i>experto <math>e_1</math></i>	Colorimetría
<i>experto <math>e_2</math></i>	Dinamismo
<i>experto <math>e_3</math></i>	Fotometría

*Así por ejemplo, el experto  $e_1$  especialista en colorimetría, no tiene ninguna duda al aportar su valoración sobre los criterios Color, Textura y Contraste, y utiliza un único término lingüístico. Sin embargo, al expresar su preferencia sobre el criterio Movimiento duda entre varios términos lingüísticos  $\{Alto, Muy Alto\}$ , igual le sucede con los criterios Armonía y Equilibrio.*

En estas situaciones de decisión donde hay un alto grado de incertidumbre, los expertos dudan entre diferentes términos lingüísticos y les gustaría utilizar expresiones lingüísticas más complejas que no pueden ser construidas en los enfoques lingüísticos clásicos. Esta limitación se debe al uso de términos lingüísticos definidos a priori y porque la mayoría de los enfoques lingüísticos modelan la información

---

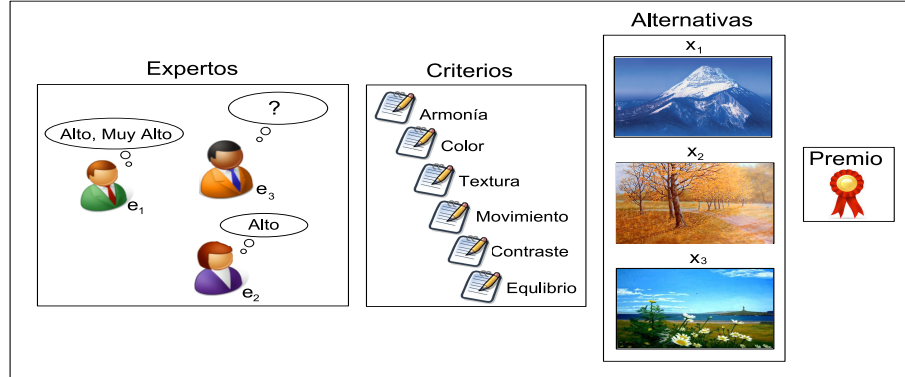


Figura 3.1: Premio al mejor cuadro

usando sólo un término lingüístico. Para evitar esta limitación, en la literatura se han presentado diferentes propuestas [100, 141, 149] que proporcionan expresiones lingüísticas más flexibles que pueden incluir más de un término lingüístico.

Tang y Zheng introdujeron en [141] un enfoque lingüístico que permite construir expresiones lingüísticas a partir de un conjunto de términos lingüísticos  $S$ , utilizando conectivas lógicas ( $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ ), cuya semántica es representada mediante relaciones difusas que describen el grado de similitud entre términos lingüísticos. El conjunto de todas las expresiones lingüísticas es denotado como  $LE$  y se define recursivamente como,

1.  $L_i \in LE$  para  $i = 1, \dots, n$
2. Si  $\theta, \phi \in LE$  entonces  $\neg\theta, \theta \vee \phi, \theta \wedge \phi, \theta \rightarrow \phi \in LE$

Ejemplos de expresiones lingüísticas en  $LE$  generadas a partir de  $S$  podrían ser:

$$\neg\text{Alto} \vee \text{Medio}$$

$$\text{Medio} \wedge \text{Alto}$$

Como vimos en 2.2.3.6, Wang y Hao propusieron en [149] un modelado lingüístico basado en la proporción de dos términos lingüísticos consecutivos representado mediante valores 2-tupla para expresar expresiones lingüísticas. Un valor 2-tupla

proporcional tiene un término lingüístico en cada 2-tupla, que representa la información lingüística, y un valor numérico que representa su proporción en la expresión lingüística.

Ejemplos de expresiones lingüísticas basadas en 2-tupla proporcional en  $S$  son:

$$\{(Alto, 0.25), (Muy Alto, 0.75)\}$$

$$\{(Bajo, 0.37), (Medio, 0.63)\}$$

Ma et al. desarrollaron en [100] un modelo lingüístico que incrementa la flexibilidad de las expresiones lingüísticas mediante múltiples términos lingüísticos que son integrados en “comentarios sintetizados”. En este enfoque no existen reglas que fijen la sintaxis de los comentarios sintetizados obtenidos a partir de múltiples términos lingüísticos (ver Tabla 3.2):

Tabla 3.2: Comentarios sintetizados

Nada	Muy Bajo	Bajo	Medio	Alto	Muy Alto	Perfecto	Comentario
0	0	1	1	0	0	0	<i>Normalmente</i>
0	0	0	0	0	1	1	<i>Excelente</i>

Debido al uso de varios términos lingüísticos en los comentarios sintetizados, las operaciones con tales términos están basadas en un modelo difuso y medidas de determinancia y consistencia de los términos lingüísticos.

A pesar de que estas propuestas mejoran la flexibilidad para proporcionar expresiones lingüísticas, presentan el problema que no son cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos, o bien no formalizan la obtención de las expresiones lingüísticas.

Para solventar dicha limitación, presentamos el concepto de CTLDD que permite modelar múltiples términos lingüísticos, y definimos una gramática libre de contexto que permite generar formalmente expresiones lingüísticas comparativas similares a las expresiones utilizadas por los expertos, en problemas de toma de decisiones, cuya base de representación serán dichos CTLDD.

---

### 3.3.1. Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos

A continuación se introduce el concepto de CTLDD y algunas operaciones básicas para operar con ellos.

**Definición 35** [129] Sea  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, un CTLDD  $H_S$ , se define como un subconjunto finito ordenado de términos lingüísticos consecutivos de  $S$ .

$$H_S = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}, \text{ tal que } s_k \in S, \quad k \in \{i, \dots, j\}$$

Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos y  $\vartheta$  una variable lingüística, el CTLDD vacío y completo se definen como siguen:

- i) CTLDD vacío:  $H_S(\vartheta) = \{\}$
- ii) CTLDD completo:  $H_S(\vartheta) = S$

Cualquier otro CTLDD debe estar formado al menos, por un término lingüístico del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .

**Ejemplo 11** Sea  $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $\vartheta$  una variable lingüística, un CTLDD  $H_S(\vartheta)$  podría ser,

$$H_S(\vartheta) = \{Alto, Muy Alto, Perfecto\}$$

$$H_S(\vartheta) = \{Muy Bajo, Bajo, Medio\}$$

Para poder operar con CTLDD es necesario definir algunas operaciones básicas que a continuación se introducen.

Sea  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $H_S, H_S^1$  y  $H_S^2$  tres CTLDD.

**Definición 36** [129] Para obtener el límite superior e inferior de un CTLDD,  $H_S$ , se definen los operadores, upper bound,  $H_{S+}$ , y lower bound,  $H_{S-}$  como sigue,

- i)  $H_{S+} = \max(s_i) = s_j, s_i \in H_S \text{ y } s_i \leq s_j \forall i;$
- ii)  $H_{S-} = \min(s_i) = s_j, s_i \in H_S \text{ y } s_i \geq s_j \forall i;$

**Definición 37** [129] El complemento de un CTLDD  $H_S$ , se define como sigue,

$$H_S^c = S - H_S = \{s_i/s_i \in S \text{ y } s_i \notin H_S\}$$

**Proposición 2** El complemento de un CTLDD es involutivo,

$$(H_S^c)^c = H_S$$

*Demostración*

Utilizando la definición del complemento de un CTLDD,

$$(H_S^c)^c = S - H_S^c = S - (S - H_S) = H_S$$

**Definición 38** La negación de un CTLDD  $H_S = \{s_i, s_{i+1}, \dots, s_j\}$ , se define como sigue,

$$\overline{H_S} = \{s_k/\forall k \in H_S\}$$

donde  $k = \{g - j, g - (j - 1), g - (j - 2), \dots, g - i\}$  y  $g + 1$  es la granularidad del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .

**Definición 39** [129] La intersección de dos CTLDD,  $H_S^1$  and  $H_S^2$  es definida como se indica a continuación,

$$H_S^1 \cap H_S^2 = \{s_i/s_i \in H_S^1 \text{ y } s_i \in H_S^2\}$$

El resultado de esta operación es otro CTLDD.

**Definición 40** [129] De la misma forma podemos definir la unión entre dos CTLDD,  $H_S^1$  y  $H_S^2$ ,

$$H_S^1 \cup H_S^2 = \{s_i/s_i \in H_S^1 \text{ or } s_i \in H_S^2\}$$

Si  $H_S^1 \cap H_S^2 \neq \emptyset$ , entonces  $H_S^1 \cup H_S^2$  es un CTLDD.

También es posible definir los operadores de minimización y maximización de CTLDD como definimos a continuación.

**Definición 41** El operador de maximización de dos CTLDD  $H_S^1$  y  $H_S^2$  se denota como  $H_S^1 \vee H_S^2$  y se define como sigue,

$$H_S^1 \vee H_S^2 = \{max\{s_i, s_j\} : s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2\}$$


---

**Definición 42** El operador de minimización de dos CTLDD  $H_S^1$  y  $H_S^2$  se denota como  $H_S^1 \wedge H_S^2$  y se define como sigue,

$$H_S^1 \wedge H_S^2 = \{\min\{s_i, s_j\} : s_i \in H_S^1, s_j \in H_S^2\}$$

Veamos un ejemplo de cada una de las operaciones definidas para entender mejor su funcionamiento.

**Ejemplo 12** Sea  $S = \{s_0 : Nada, s_1 : Muy Bajo, s_2 : Bajo, s_3 : Medio, s_4 : Alto, s_5 : Muy Alto, s_6 : Perfecto\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $H_{S_1} = \{Muy Bajo, Bajo, Medio\}$  y  $H_{S_2} = \{Alto, Muy Alto\}$  dos CTLDD en  $S$ .

$$H_{S_1^+} = \max(MB, B, M) = \{M\}$$

$$H_{S_1^-} = \min(MB, B, M) = \{MB\}$$

$$H_{S_1^C} = S - H_{S_1} = \{N, MB, B, M, A, MA, P\} - \{MB, B, M\} = \{N, A, MA, P\}$$

$$\overline{H_{S_1}} = \{s_{6-3}, s_{6-2}, s_{6-1}\} = \{s_3, s_4, s_5\} = \{M, A, MA\}$$

$$H_{S_1} \cup H_{S_2} = \{MB, B, M\} \cup \{A, MA\} = \{MB, B, M, A, MA\}$$

$$H_{S_1} \cap H_{S_2} = \{MB, B, M\} \cap \{A, MA\} = \emptyset$$

$$H_{S_1} \vee H_{S_2} = \{\max\{MB, A\}, \max\{MB, MA\}, \max\{B, A\}, \max\{B, MA\}, \max\{M, A\}, \max\{M, MA\}\} = \{A, MA\}$$

$$H_{S_1} \wedge H_{S_2} = \{\min\{MB, A\}, \min\{MB, MA\}, \min\{B, A\}, \min\{B, MA\}, \min\{M, A\}, \min\{M, MA\}\} = \{MB, B, M\}$$

Para facilitar los procesos de computación con palabras con CTLDD se introduce el concepto de *envoltura* de un CTLDD.

**Definición 43** [129] La envoltura de un CTLDD,  $env(H_S)$ , es un intervalo lingüístico cuyos límites son obtenidos mediante el límite superior e inferior,

$$env(H_S) = [H_{S^-}, H_{S^+}], \quad H_{S^-} \leq H_{S^+}$$

**Ejemplo 13** Sea  $S = \{s_0 : Nada, s_1 : Muy Bajo, s_2 : Bajo, s_3 : Medio, s_4 : Alto, s_5 : Muy Alto, s_6 : Perfecto\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $H_S = \{Muy bajo, Bajo, Medio\}$  un CTLDD de  $S$ , su envoltura es,

$$H_{S^-}(Muy bajo, Bajo, Medio) = \mathbf{Muy Bajo}$$

$$H_{S^+}(Muy bajo, Bajo, Medio) = \mathbf{Medio}$$

$$env(H_S) = [Muy Bajo, Medio]$$

Según el esquema básico de resolución de un problema de toma de decisiones, en la fase de explotación, el conjunto de alternativas se ordena para seleccionar la mejor como solución al problema. Por tanto, para poder establecer un orden entre CTLDD se introduce la definición de comparación de dos CTLDD.

**Definición 44** Sea  $H_S^1$  y  $H_S^2$  dos CTLDD y  $\vartheta$  una variable lingüística, la comparación entre  $H_S^1$  y  $H_S^2$  se define mediante la envoltura de ambos CTLDD haciendo uso de la operativa simbólica.

$$H_S^1(\vartheta) > H_S^2(\vartheta) \quad \text{si y sólo si} \quad env(H_S^1(\vartheta)) > env(H_S^2(\vartheta))$$

$$H_S^1(\vartheta) = H_S^2(\vartheta) \quad \text{si y sólo si} \quad env(H_S^1(\vartheta)) = env(H_S^2(\vartheta))$$

Como podemos observar, el proceso de comparación de dos CTLDD se reduce a la comparación entre intervalos. En el Apéndice A se revisan diferentes enfoques para comparar intervalos y se muestra cuál es el más adecuado para comparar CTLDD.

### 3.3.2. Propiedades de los CTLDD

Las operaciones unión e intersección tienen algunas propiedades que a continuación revisamos.

Sea  $H_S^1, H_S^2$  and  $H_S^3$  tres CTLDD y  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos.

1. *Propiedad conmutativa*

$$H_S^1 \cup H_S^2 = H_S^2 \cup H_S^1$$

$$H_S^1 \cap H_S^2 = H_S^2 \cap H_S^1$$

*Demostración de la propiedad conmutativa con la operación de la unión*

⇒

Sea  $s_i \in S$  un valor lingüístico,  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ , entonces por la definición de unión,  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2$ ,

si  $s_i \in H_S^2$  o  $s_i \in H_S^1$ , entonces  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^1$

⇐

Sea  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^1$ , entonces  $s_i \in H_S^2$  o  $s_i \in H_S^1$ ,

si  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$

La demostración de la propiedad conmutativa con la operación de la intersección sería similar a la de la unión.

## 2. Propiedad Asociativa

$$H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3) = (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3$$

$$H_S^1 \cap (H_S^2 \cap H_S^3) = (H_S^1 \cap H_S^2) \cap H_S^3$$

*Demostración de la propiedad asociativa con la operación de la unión*

⇒

Sea  $s_i \in S$  un valor lingüístico,  $s_i \in H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3)$  entonces,  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^3$ .

En el segundo caso,  $s_i \in H_S^2$  o  $s_i \in H_S^3$ , por tanto,

si  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$  o  $s_i \in H_S^3$ , entonces  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3$

⇐

Sea  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3$  entonces,  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$  o  $s_i \in H_S^3$ . En el primer caso,  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2$ , por tanto, si  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^3$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3)$

De forma similar se puede demostrar la propiedad asociativa en la intersección de CTLDD.

3. *Propiedad distributiva*

$$H_S^1 \cap (H_S^2 \cup H_S^3) = (H_S^1 \cap H_S^2) \cup (H_S^1 \cap H_S^3)$$

$$H_S^1 \cup (H_S^2 \cap H_S^3) = (H_S^1 \cup H_S^2) \cap (H_S^1 \cup H_S^3)$$

*Demostración de la propiedad distributiva con la operación de la unión*

$\Rightarrow$

Sea  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cap H_S^3$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$  y  $s_i \in H_S^3$ . Por tanto,  $s_i \in H_S^1$  o  $s_i \in H_S^2$ .

Si  $s_i \in H_S^1$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$

Si  $s_i \in H_S^2$ , entonces  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$

De este modo,  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$  o  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$ , tenemos que,  $s_i \in (H_S^1 \cap H_S^3) \cup (H_S^2 \cap H_S^3)$

$\Leftarrow$

Sea  $s_i \in (H_S^1 \cap H_S^3) \cup (H_S^2 \cap H_S^3)$ . Entonces  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$  o  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$ .

En el primer caso,  $s_i \in H_S^1$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ , por tanto  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cap H_S^3$ .

En el segundo caso,  $s_i \in H_S^2$ , entonces  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ , por tanto  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cap H_S^3$

La propiedad distributiva puede ser demostrada de igual forma con la operación de la intersección.

El concepto de CTLDD nos permite manejar la duda con la elicitación de preferencias en contextos cualitativos. Sin embargo, en problemas de toma de decisiones donde hay un alto grado de incertidumbre, los expertos que dudan entre varios términos lingüísticos no suelen utilizar múltiples términos lingüísticos para expresar sus preferencias, sino expresiones lingüísticas comparativas cercanas al proceso cognitivo de los seres humanos. Por tanto, para facilitar la expresión de preferencias lingüísticas en situaciones de duda, proponemos el uso de gramáticas libres de contexto que formalizarán la creación de expresiones lingüísticas y cuya representación serán los CTLDD.

---

### 3.4. Elicitación de Expresiones Lingüísticas Comparativas

Como hemos comentado anteriormente, en situaciones dudosas donde los expertos tienen que expresar sus preferencias sobre alternativas o criterios, éstos no suelen enumerar múltiples términos lingüísticos, sino que utilizan expresiones más complejas similares a las expresiones lingüísticas utilizadas por los seres humanos. Saaty en [132] propuso una idea básica para mejorar la expresividad de la información de los expertos que participan en problemas de toma de decisiones. En esta idea Saaty asociaba una expresión lingüística a cada valor numérico. Nuestra visión es utilizar el Enfoque Lingüístico Difuso y los CTLDD para mejorar la elicitación de información lingüística.

Siguiendo con el Ejemplo 3.1, supongamos que el miembro del comité evaluador  $e_1$  especialista en colorimetría, tiene que expresar sus preferencias sobre el conjunto de criterios  $C = \{Armonía, Color, Textura, Movimiento, Contraste, Equilibrio\}$  para el cuadro  $x_1$ . Dado su conocimiento, puede que al valorar determinados criterios, como por ejemplo, para el criterio *Movimiento* dude entre los términos,  $\{Alto, Muy Alto, Perfecto\}$ . En este caso, lo habitual sería que proporcionase su preferencia mediante expresiones lingüísticas, tales como, “mayor que Medio” o “al menos Alto”. Este tipo de expresiones son habituales en los expertos al expresar sus preferencias en este tipo de situaciones de decisión.

Partiendo de esta idea básica y teniendo en cuenta nuestro objetivo de mejorar la flexibilidad de la elicitación de la información lingüística, en esta sección se presenta una herramienta que permite generar expresiones lingüísticas comparativas cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos y su representación mediante CTLDD.

#### 3.4.1. Gramática Libre de Contexto

Una de las herramientas más utilizadas en Ciencias de la Computación para generar expresiones lingüísticas son las *gramáticas libres de contexto* [24, 75]. Las gramáticas libres de contexto fueron introducidas por N. Chomsky [24] como una forma de describir lenguajes naturales de programación, y aunque esta posibilidad no ha llegado a cumplirse, a medida que en las Ciencias de la Computación el uso de

---

conceptos definidos recursivamente se ha multiplicado, se ha tenido la necesidad de emplear las gramáticas libres de contexto como una forma de describir instancias de estos conceptos.

En esta memoria las gramáticas libres de contexto se utilizan para generar expresiones lingüísticas comparativas que puedan ser utilizadas por los expertos para expresar sus preferencias en problemas de toma de decisiones. A continuación, se introduce el concepto de gramática libre de contexto, y posteriormente se define una gramática libre de contexto que permite generar expresiones lingüísticas comparativas.

**Definición 45** *Una gramática libre de contexto  $G$ , es una 4-tupla  $(V_N, V_T, I, P)$ , donde  $V_N$  es el conjunto de símbolos no terminales,  $V_T$  es el conjunto de símbolos terminales,  $I$  es el símbolo inicial de la gramática, y  $P$  son las reglas de producción definidas en la Forma Normal de Backus Extendida [75]. La elección de estos cuatro elementos determinará la forma del conjunto de expresiones lingüísticas.*

El lenguaje generado por  $G$  debe ser lo suficientemente amplio para que pueda describir cualquier situación del problema. Según las observaciones de Miller [115], el lenguaje generado no tiene que ser infinito, sino mas bien fácilmente comprensible.

Manteniendo en mente nuestro objetivo de mejorar la flexibilidad de la elicitación de la información lingüística de los expertos, aquí se define una gramática libre de contexto básica  $G_H$ , que nos permitirá generar expresiones lingüísticas comparativas similares a las expresiones utilizadas por los seres humanos en problemas de toma de decisiones lingüísticos.

**Definición 46** [129] *Sea  $G_H$  una gramática libre de contexto y  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos. Los elementos de  $G_H = (V_N, V_T, I, P)$  son definidos de la siguiente forma:*

$$V_N = \{\langle \text{término primario} \rangle, \langle \text{término compuesto} \rangle, \langle \text{relación unaria} \rangle, \langle \text{relación binaria} \rangle, \langle \text{conjunción} \rangle\}$$

$$V_T = \{\text{menor que, mayor que, al menos, como mucho, entre, y, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$$

$$I \in V_N$$

*Las reglas de producción son definidas mediante la forma extendida de Backus Naur, en la que la utilización de paréntesis indica elementos opcionales y el símbolo  $|$  indica elementos alternativos [75]. Las reglas de producción para la gramática libre de contexto,  $G_H$ , son las siguientes:*

---

$$\begin{aligned}
P &= \{I ::= \langle \text{término primario} \rangle | \langle \text{término compuesto} \rangle \\
&\langle \text{término compuesto} \rangle ::= \langle \text{relación unaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle | \\
&\langle \text{relación binaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle \langle \text{conjunción} \rangle \langle \text{término primario} \rangle \\
&\langle \text{término primario} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g \\
&\langle \text{relación unaria} \rangle ::= \text{menor que} | \text{mayor que} | \text{al menos} | \text{como mucho} \\
&\langle \text{relación binaria} \rangle ::= \text{entre} \\
&\langle \text{conjunción} \rangle ::= y \}
\end{aligned}$$

Atendiendo a la definición de la gramática libre de contexto debemos realizar las siguientes observaciones:

- La “relación unaria” presenta algunas limitaciones. Si el símbolo no terminal es “menor que”, entonces, el “término primario” no puede ser  $s_0$ , y si el símbolo no terminal es “mayor que”, entonces el “término primario” no puede ser  $s_g$ .
- De igual forma, si el símbolo no terminal es “al menos”, entonces, el “término primario” no puede ser  $s_g$ , y si el símbolo no terminal es “como mucho”, entonces el “término primario” no puede ser  $s_0$ .
- En la “relación binaria”, el “término primario” del lado izquierdo debe ser menor que el “término primario” del lado derecho.

**Ejemplo 14** Sea  $S = \{Nada, Muy Bajo, Bajo, Medio, Alto, Muy Alto, Perfecto\}$  un conjunto de términos lingüísticos, algunas expresiones lingüísticas generadas mediante la gramática libre de contexto  $G_H$ , podrían ser las siguientes:

$$\begin{aligned}
ll_1 &= Alto \\
ll_2 &= menor que Bajo \\
ll_3 &= mayor que Alto \\
ll_4 &= al menos Alto \\
ll_5 &= como mucho Bajo \\
ll_6 &= entre Medio y Muy Alto
\end{aligned}$$

El uso de las expresiones lingüísticas generadas por  $G_H$  mejora la expresividad de los expertos para aportar sus preferencias sobre alternativas o criterios cuando dudan entre varios términos lingüísticos.

---

Dada la flexibilidad que aporta la definición de una gramática libre de contexto, la definición de los elementos y reglas de producción que se utilizan para generar las expresiones lingüísticas comparativas dependerán del problema específico que se esté tratando.

### 3.4.2. Expresiones Lingüísticas Comparativas para Toma de Decisiones basadas en CTLDD

Una vez definida la gramática libre de contexto  $G_H$ , que nos permite generar las expresiones lingüísticas comparativas como las usadas por los expertos en problemas reales de toma de decisiones, a continuación vamos a mostrar cómo el uso de CTLDD permite la representación de la duda de los expertos entre múltiples términos lingüísticos, y por tanto, facilita los procesos computacionales con dicha información. Para ello, definiremos una función de transformación  $E_{G_H}$ , que convierte las expresiones lingüísticas comparativas en CTLDD.

**Definición 47** [129] Sea  $E_{G_H}$  una función que transforma las expresiones lingüísticas comparativas  $ll$  obtenidas mediante la gramática libre de contexto  $G_H$ , en CTLDD  $H_S$ , donde  $S$  es el conjunto de términos lingüísticos utilizado por  $G_H$ , y  $S_{ll}$  es el conjunto de expresiones lingüísticas generadas mediante  $G_H$ .

$$E_{G_H} : S_{ll} \longrightarrow H_S$$

La transformación de las expresiones lingüísticas comparativas en CTLDD dependerá de las expresiones que genere la gramática libre de contexto  $G_H$ . A continuación se introduce la transformación de las expresiones generadas por la gramática libre de contexto básica  $G_H$ , definida en la Def. 46.

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i/s_i \in S\}$
  - $E_{G_H}(\text{menor que } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j < s_i\}$
  - $E_{G_H}(\text{mayor que } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j > s_i\}$
  - $E_{G_H}(\text{al menos } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \geq s_i\}$
  - $E_{G_H}(\text{como mucho } s_i) = \{s_j/s_j \in S \text{ y } s_j \leq s_i\}$
  - $E_{G_H}(\text{entre } s_i \text{ y } s_j) = \{s_k/s_k \in S \text{ y } s_i \leq s_k \leq s_j\}$
-

Con la definición de la función de transformación  $E_{G_H}$ , es fácil comprender la representación de las expresiones lingüísticas comparativas  $S_{ll}$  en CTLDD. La Figura 3.2 muestra gráficamente la representación de las diferentes expresiones lingüísticas comparativas.

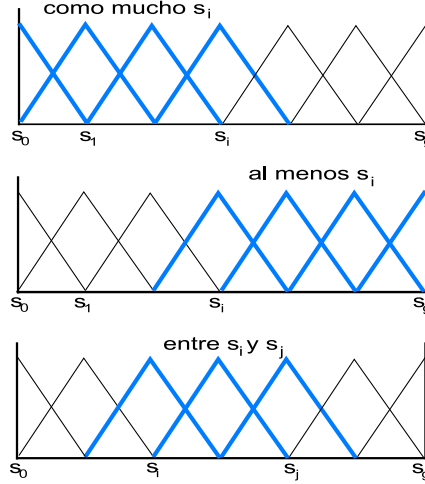


Figura 3.2: Expresiones lingüísticas representadas mediante CTLDD

**Ejemplo 15** Utilizando las expresiones lingüísticas comparativas generadas en el Ejemplo 14, es decir,  $ll_1, ll_2, ll_3, ll_4, ll_5$  and  $ll_6$ , sus transformaciones en CTLDD utilizando la función de transformación  $E_{G_H}$  son las siguientes:

$$E_{G_H}(\text{Alto}) = \{\text{Alto}\}$$

$$E_{G_H}(\text{menor que Bajo}) = \{\text{Nada}, \text{Muy Bajo}\}$$

$$E_{G_H}(\text{mayor que Alto}) = \{\text{Muy Alto}, \text{Perfecto}\}$$

$$E_{G_H}(\text{al menos Alto}) = \{\text{Alto}, \text{Muy Alto}, \text{Perfecto}\}$$

$$E_{G_H}(\text{como mucho Bajo}) = \{\text{Nada}, \text{Muy Bajo}, \text{Bajo}\}$$

$$E_{G_H}(\text{entre Medio y Muy Alto}) = \{\text{Medio}, \text{Alto}, \text{Muy Alto}\}$$

Siguiendo con el Ejemplo 10, si el experto  $e_1$  duda entre varios términos lingüísticos para valorar algunos criterios, podría utilizar las expresiones lingüísticas comparativas generadas por la gramática libre de contexto  $G_H$ ,

$$ll_i^1 = \text{al menos Alto}$$

y mediante la función de transformación  $E_{GH}$  dichas expresiones se transformarían en CTLDD, para poder realizar los procesos de computación con palabras necesarios en el proceso de resolución del problema de toma decisión definido.

## Capítulo 4

# Modelos de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas

La complejidad y el impacto de los problemas de toma de decisiones en el mundo real han conducido a considerar múltiples puntos de vista, dando lugar a problemas de toma de decisiones en grupo, en los que un grupo de expertos proporciona sus preferencias para alcanzar una solución común. Normalmente en este tipo de problemas la información es vaga e incierta. El uso de información lingüística ha proporcionado resultados fiables y satisfactorios en este tipo de problemas, aunque algunas veces está limitado, ya que los modelos lingüísticos utilizan términos lingüísticos simples y predefinidos que restringen la elicitación de preferencias de los expertos. En contextos lingüísticos con alto grado de incertidumbre, es habitual que los expertos duden entre varios términos lingüísticos y necesiten expresiones lingüísticas más complejas para expresar su conocimiento de una forma más precisa. Sin embargo, en estas situaciones, los enfoques lingüísticos de toma de decisiones en grupo no proporcionan ningún modelo que haga más flexible la elicitación de preferencias lingüísticas.

Por tanto, en este capítulo se proponen 2 modelos de toma de decisiones en grupo, donde los expertos pueden expresar sus preferencias mediante términos lingüísticos simples, o en caso de ser necesario, mediante expresiones lingüísticas comparativas cercanas al lenguaje natural usado por los expertos, en problemas

de toma de decisiones en grupo. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el análisis comparativo realizado en el capítulo 2, en el que de los modelos simbólicos revisados, el modelo basado en la Combinación Convexa y el modelo lingüístico 2-Tupla eran los únicos que seguían la base del Enfoque Lingüístico Difuso, los modelos de toma de decisiones en grupo propuestos realizarán los procesos computacionales mediante la Combinación Convexa y el modelo lingüístico 2-Tupla respectivamente.

A continuación se revisa brevemente la definición de un problema de toma de decisión en grupo, y se presentan dos modelos de toma de decisiones en grupo que integran el uso de expresiones lingüísticas comparativas. Finalmente, se define un problema de toma de decisión en grupo y se resuelve con los dos modelos propuestos.

## 4.1. Toma de Decisiones en Grupo

La toma de decisiones en grupo se define como una situación de decisión en la que participan dos o más expertos que tienen su propio conocimiento y actitudes respecto al problema de toma de decisiones, y en el que tienen que proporcionar sus preferencias para alcanzar una decisión colectiva [97]. La necesidad de múltiples puntos de vista es bastante habitual en situaciones de decisiones complejas y estructuras organizacionales [10, 27, 98, 133].

Un proceso de resolución de toma de decisiones en grupo aplica un *proceso de selección*, para alcanzar una solución colectiva y obtener la mejor alternativa o subconjunto de alternativas de acuerdo a las preferencias aportadas por los expertos. Sin embargo, a veces, el objetivo de un problema de toma de decisiones en grupo no es alcanzar la mejor solución, sino conseguir una solución satisfactoria para todos los expertos involucrados en el problema. En estos casos, las diferencias de opiniones entre los expertos son establecidas mediante negociación, dando lugar a los procesos de alcance de consenso [121, 123]. Este capítulo se centra en procesos de selección para toma de decisiones en grupo, ya que siempre son necesarios incluso para obtener soluciones satisfactorias después del proceso de negociación, cuya necesidad dependerá del problema de toma de decisiones concreto.

Formalmente, un problema de toma de decisiones en grupo se define como una situación de decisión donde dos o más expertos  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  ( $m \geq 2$ ),

---

expresan sus preferencias sobre un conjunto finito de alternativas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  ( $n \geq 2$ ), para obtener un conjunto solución de alternativas para el problema de decisión [82]. Normalmente, cada experto  $e_k$ , proporciona sus preferencias sobre  $X$  mediante una relación de preferencia  $P^k, \mu_{P^k} : X \times X \rightarrow D$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \cdots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \cdots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

donde cada valoración,  $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k$ , representa el grado de preferencia de la alternativa  $x_i$  sobre  $x_j$  según el experto  $e_k$ . La comparación de 2 alternativas representadas mediante relaciones de preferencia ha sido profundamente investigada en la literatura [51, 122].

Muchos aspectos de diferentes actividades del mundo real no pueden ser valorados mediante valores cuantitativos sino más bien mediante valores lingüísticos, por lo que es necesario el uso de información lingüística. Sin embargo, en algunas situaciones como hemos visto anteriormente, puede suceder que los expertos duden entre varios términos lingüísticos y necesiten expresiones lingüísticas más complejas. En la sección 3.3 se revisaron brevemente distintas propuestas que intentan evitar esta limitación, pero ninguna de ellas ha sido aplicada a problemas de toma de decisiones en grupo, ya que no proporcionan preferencias lingüísticas adecuadas para este tipo de problemas, o no presentan una formalización para generar expresiones lingüísticas. Por tanto, en este capítulo se proponen dos modelos de toma de decisiones en grupo que integran el uso de expresiones lingüísticas comparativas como las presentadas en la sección 3.4 similares a las expresiones utilizadas por los expertos en problemas de toma de decisiones. Estos modelos realizan los procesos de computación con palabras mediante el modelo basado en la Combinación Convexa y el modelo de representación lingüística 2-Tupla revisados en el capítulo 2.

## 4.2. Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en la Combinación Convexa

En esta sección se presenta un modelo lingüístico de toma de decisiones en grupo, donde los expertos pueden expresar sus preferencias sobre las alternativas mediante términos lingüísticos simples, y en caso de duda entre ellos utilizarán expresiones lingüísticas comparativas. Este modelo sigue el esquema básico de un problema de toma de decisiones lingüístico (ver Fig. 2.6) añadiendo las fases necesarias para manejar las expresiones lingüísticas comparativas y realizar los procesos de computación con palabras de una forma simple. El modelo se divide principalmente en 6 fases como muestra la Figura 4.1, y que a continuación se explican detalladamente.

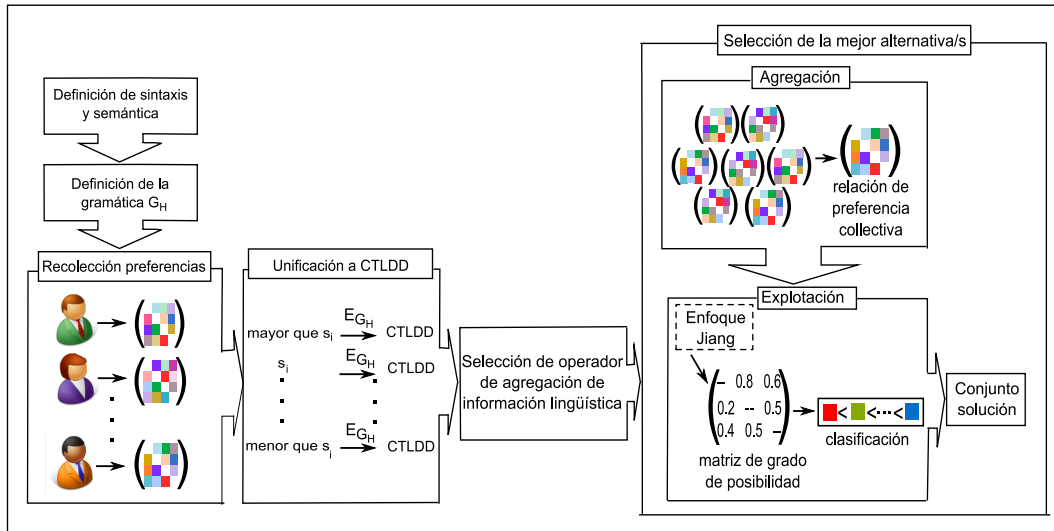


Figura 4.1: Modelo de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas basado en la Combinación Convexa

### 1. Definición de semántica y sintaxis

En esta fase se define la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ , que será utilizado por los expertos para expresar sus pre-

ferencias.

Un aspecto importante a tener en cuenta en la definición del conjunto de términos lingüístico es establecer la granularidad de la incertidumbre, es decir, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos utilizados para expresar la información. Una vez establecida la cardinalidad se generan los descriptores lingüísticos y se define su semántica.

Una posible opción para generar el conjunto de términos lingüísticos consiste en distribuir los términos en una escala totalmente ordenada.

$$S = \{s_0, \dots, s_g\}$$

donde  $g$  es la granularidad del conjunto de términos lingüísticos, y  $s_i, s_j \in S$  siendo  $s_i < s_j$ .

Para definir la semántica del conjunto de términos lingüísticos se suele utilizar un enfoque basado en funciones de pertenencia [12, 14, 33, 142].

### 2. Definición de la gramática libre de contexto

En esta fase se define una gramática libre de contexto  $G_H$ , que utiliza el conjunto de términos lingüísticos  $S$ , para generar expresiones lingüísticas comparativas. La definición de la gramática libre de contexto  $G_H$  dependerá del problema a resolver, por tanto, hay que elegir adecuadamente el conjunto de símbolos no terminales  $V_N$ , el conjunto de símbolos terminales  $V_T$ , el símbolo inicial de la gramática  $I$ , y las reglas de producción  $P$ . Una posible opción es la gramática libre de contexto base para toma de decisiones definida en el capítulo 3, (Def. 46).

### 3. Recolección de las preferencias

Los expertos implicados en el problema de toma de decisiones proporcionan sus preferencias mediante una relación de preferencia  $P^k$ , utilizando para ello términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas generadas mediante la gramática libre de contexto  $G_H$ ,  $\mu_{P^k} : X \times X \rightarrow S_U$ .

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \cdots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \cdots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

donde cada valoración  $p_{ij}^k \in S_U$  representa el grado de preferencia de la alternativa  $x_i$  sobre  $x_j$  según el experto  $e_k$ , expresada en el dominio de expresión  $S_U$ .

#### 4. Unificación de expresiones lingüísticas en CTLDD

Dado que los expertos proporcionan sus preferencias mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas, para realizar los procesos de computación con palabras en la fase de selección, es necesario unificar ambos tipos de términos en un único dominio. Para ello, las preferencias proporcionadas por los expertos son transformadas en CTLDD mediante la función de transformación  $E_{G_H}$ , que debe ser definida en esta fase. La transformación de las expresiones lingüísticas en CTLDD dependerá de las expresiones que genere la gramática libre de contexto  $G_H$ .

La función de transformación introducida en el capítulo 3 (Def. 47) es una función base para transformar expresiones lingüísticas en CTLDD en problemas de toma de decisiones en grupo.

$$E_{G_H}(p_{ij}^k) = H_S(p_{ij}^k)$$

donde  $H_S$  es el CTLDD generado según la función de transformación  $E_{G_H}$ .

Según el modelo computacional definido para CTLDD, para realizar las operaciones en la *fase de selección*, se obtiene la envoltura de cada CTLDD cuyo resultado es un intervalo lingüístico que será utilizado para agregar las preferencias proporcionadas por los expertos,  $env(H_S(p_{ij}^k)) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$ . De esta forma, la relación de preferencia de cada experto se queda como sigue,

$$P^k = \begin{pmatrix} [p_{11}^{k-}, p_{11}^{k+}] & \cdots & [p_{1n}^{k-}, p_{1n}^{k+}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^{k-}, p_{n1}^{k+}] & \cdots & [p_{nn}^{k-}, p_{nn}^{k+}] \end{pmatrix}$$

#### 5. Selección de un operador de agregación de información lingüística

Atendiendo al esquema de resolución de toma de decisiones en grupo presentado en la Figura 4.1, una vez las preferencias de los expertos son unificadas

---

en CTLDD, la siguiente fase es la selección del operador de agregación de información lingüística. Existen distintos modelos lingüísticos computacionales para agregar la información lingüística. En este modelo de toma de decisiones se utilizará un modelo lingüístico computacional simbólico, ya que como se discutió en el capítulo 2, disminuye la complejidad computacional y proporciona resultados fáciles de interpretar. En concreto se utilizará el modelo lingüístico computacional simbólico basado en la Combinación Convexa.

En la literatura se pueden encontrar diferentes operadores de agregación lingüísticos que utilizan este modelo lingüístico computacional simbólico [62, 66, 72, 127]. Por tanto, la selección del operador de agregación  $\varphi$ , dependerá del problema de toma de decisiones.

6. Selección de la mejor alternativa/s

En esta fase se obtiene el conjunto solución de alternativas al problema de toma de decisiones en grupo. Para ello se llevan a cabo las dos fases del esquema de resolución básico: (i) *Agregación* y (ii) *Explotación*.

i) *Agregación de la información lingüística*

En este paso, los intervalos lingüísticos de las relaciones de preferencia obtenidos en la fase de *unificación* son agregados para obtener una relación de preferencia colectiva  $P_C$ . Para ello, se utiliza el operador de agregación seleccionado en la fase anterior  $\varphi$ . Este operador de agregación es utilizado para agregar de forma separada los límites izquierdos  $p_{ij}^{k-}$  y derechos  $p_{ij}^{k+}$  de los intervalos lingüísticos.

$$P_{C_{ij}^-} = \varphi(p_{ij}^{k-}) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$P_{C_{ij}^+} = \varphi(p_{ij}^{k+}) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$P_{C_{ij}} = [P_{C_{ij}^-}, P_{C_{ij}^+}]$$

donde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , siendo  $n$  el número de alternativas del problema y  $m$  el número de expertos que participan.

Finalmente, se obtiene una relación de preferencia colectiva  $P_C$ , donde cada valor  $P_{C_{ij}}$  representa el grado de preferencia colectiva entre cada par de alternativas.

$$P_C = \begin{pmatrix} [p_{11}^-, p_{11}^+] & \cdots & [p_{1n}^-, p_{1n}^+] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^-, p_{n1}^+] & \cdots & [p_{nn}^-, p_{nn}^+] \end{pmatrix}$$

### ii) *Explotación*

Una vez los intervalos lingüísticos colectivos han sido agregados se realiza la fase de explotación donde se obtendrá la mejor alternativa. Normalmente, la explotación es modelada mediante funciones de selección que permiten caracterizar las alternativas y obtener la mejor de ellas [63, 130]. Cada alternativa se caracteriza mediante un grado de selección obtenido de los valores colectivos, y atendiendo a dicho valor se ordena el conjunto de alternativas. Finalmente, se seleccionan aquellas alternativas con mayor grado de selección.

La definición de la función de selección depende del tipo de representación utilizado inicialmente para proporcionar las preferencias. En problemas de toma de decisiones en grupo esta tarea no es sencilla ni directa, ya que los expertos utilizan relaciones de preferencia para aportar sus preferencias. En nuestro caso además, la relación de preferencia colectiva está representada mediante intervalos lingüísticos, por lo que tenemos que utilizar un enfoque que partiendo de una relación de preferencia de intervalos obtenga un ranking de alternativas.

En la literatura se pueden encontrar distintos enfoques para ordenar alternativas partiendo de una relación de preferencia colectiva [80, 162, 173]. Nosotros utilizaremos el modelo propuesto por Jiang [80], ya que es adecuado para obtener un ranking de alternativas utilizando intervalos.

Para aplicar dicho modelo se realizan los siguientes pasos:

- En primer lugar se calcula una relación de preferencia colectiva media  $\bar{P}_C = (\bar{p}_{ij})_{n \times n}$  utilizando el límite inferior y superior de cada intervalo de la relación de preferencia colectiva  $P_C$ .

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij}^- + p_{ij}^+) \quad (4.1)$$

Después se obtiene la matriz de error  $\delta = (\delta_{ij})_{n \times n}$  que representa la distancia media de los límites de los intervalos de la relación de

---

preferencia colectiva  $P_C$ .

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij}^+ - p_{ij}^-) \quad (4.2)$$

*Nota:* Destacar que para manejar intervalos lingüísticos simbólicamente, las anteriores ecuaciones son adaptadas como se muestra a continuación.

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(\text{ind}(p_{ij}^-) + \text{ind}(p_{ij}^+)) \quad (4.3)$$

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2}(\text{ind}(p_{ij}^+) - \text{ind}(p_{ij}^-)) \quad (4.4)$$

donde  $\text{ind}(s_i) = i$ ,  $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

- En este paso se calcula el peso de cada alternativa  $\bar{w}_i$ , de la relación de preferencia media  $\bar{P}_C$ .

$$\bar{w}_i = \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{p}_{ij} + \frac{n}{2} - 1)}{n(n-1)} \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (4.5)$$

Al utilizar la media aritmética para calcular los valores medios de la relación de preferencia colectiva se obtienen valores numéricos que representan cada intervalo de una forma aproximada. Por esta razón, se utiliza el Principio de Propagación [172] para calcular un vector de error  $\Lambda w = (\Lambda w_1, \dots, \Lambda w_n)$  del vector de pesos  $\bar{w}$  utilizando la siguiente función:

$$\Lambda w_i = \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2}, \quad i = \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.6)$$

De esta forma se obtiene un vector de pesos intervalar  $w = (w_1, \dots, w_n)^T$  de la relación de preferencia colectiva  $P_C$ , donde  $w_i = [\bar{w}_i - \Lambda w_i, \bar{w}_i + \Lambda w_i]$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ .

- Para ordenar estos pesos  $w_i (i = 1, \dots, n)$  representados mediante intervalos, cada peso  $w_i$  es comparado con el resto mediante una función de grado de posibilidad. De esta forma se construye una matriz de grado de posibilidad  $PD = (pd_{ij})_{n \times n}$ .

$$pd_{ij} = p(\bar{w}_i \geq \bar{w}_j) = \frac{\min(2(\Lambda w_i + \Lambda w_j), \max(\bar{w}_i + \Lambda w_i - (\bar{w}_j - \Lambda w_j), 0))}{2(\Lambda w_i + \Lambda w_j)} \quad (4.7)$$

Para obtener el conjunto solución de alternativas se utiliza un *grado de selección de dominancia* a partir del grado de posibilidad que indica el grado de dominancia de cada alternativa  $x_i$  sobre el resto. Para ello, se suman los grados de posibilidad de las alternativas por filas.

$$pd_i = \sum_{j=1}^n pd_{ij} \quad i = \{1, \dots, n\} \quad (4.8)$$

Finalmente, las alternativas son ordenadas en orden descendente según los valores de  $pd_i$  y se selecciona aquella con mayor valor.

Una vez explicado el modelo de toma de decisiones en grupo basado en la Combinación Convexa, presentamos un algoritmo para resolver problemas de toma de decisiones en grupo definidas en contextos cualitativos en el que los expertos que participan en el problema pueden proporcionar sus preferencias mediante expresiones lingüísticas comparativas o términos lingüísticos simples.

Supongamos un conjunto de alternativas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , y un conjunto de expertos  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ , que expresan sus relaciones de preferencias mediante términos lingüísticos simples, o expresiones lingüísticas comparativas generadas con la gramática libre de contexto  $G_H$ , y su función de transformación  $E_{G_H}$ .

El algoritmo es el siguiente:

1. Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .
3. Recoger las preferencias aportadas por los expertos  $e_k$ ,  $k = \{1, \dots, m\}$ .
4. PARA cada matriz  $P^k$   $k = \{1, \dots, m\}$ 
  - 4.1 Para cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^k$  HACER
    - 4.1.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^k$  HACER

$$E_{G_H}(S_{ij}) = H_S(p_{ij}^k)$$


---

$$env(H_S) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

5. Seleccionar un operador de agregación de información lingüística  $\varphi$ .

6. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de las  $m$  matrices  $P^k$  HACER

6.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de las  $m$  matrices  $P^k$  HACER

$$P_{C_{ij}} = [\varphi(p_{ij}^{k-}), \varphi(p_{ij}^{k+})] \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

FIN PARA

FIN PARA

7. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_C$  HACER

7.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_C$  HACER

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(ind(p_{ij}^-) + ind(p_{ij}^+))$$

$$\delta p_{ij} = \frac{1}{2}(ind(p_{ij}^+) - ind(p_{ij}^-))$$

FIN PARA

FIN PARA

8. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $\bar{P}_C$  HACER

$$\bar{w}_i = \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{p}_{ij} + \frac{n}{2} - 1)}{n(n-1)}$$

FIN PARA

9. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $\delta$  HACER

$$\Lambda w_i = \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2}$$

FIN PARA

10. PARA cada peso  $w_i$   $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

10.1 PARA cada peso  $w_j$   $j = \{1, \dots, n\}$   $i \neq j$  HACER

$$pd_{ij} = p(\bar{w}_i \geq \bar{w}_j) = \frac{\min(2(\Lambda w_i + \Lambda w_j), \max(\bar{w}_i + \Lambda w_i - (\bar{w}_j - \Lambda w_j), 0))}{2(\Lambda w_i + \Lambda w_j)}$$

FIN PARA

FIN PARA

11. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $PD$  HACER

$$pd_i = \sum_{j=1}^n pd_{ij}$$

FIN PARA

12. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X^D = \{x_i/x_i \in X, pd_i = \max_{x_j \in X} \{pd_j\}\}$$

### **4.3. Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla**

En esta sección proponemos un nuevo modelo de toma de decisiones en grupo que utiliza el modelo de representación lingüístico 2-tupla [67] para realizar los procesos computacionales. Se ha utilizado el modelo de representación lingüístico 2-Tupla porque como se comentó en el capítulo 2 sigue la base del Enfoque Lingüístico Difuso y tiene mejores características respecto a precisión que el modelo basado en la Combinación Convexa.

El modelo de toma de decisiones en grupo propuesto consta de 6 fases como muestra la Figura 4.2, siendo varias de ellas comunes a las definidas en el modelo anterior, por lo que explicaremos más detenidamente la fase de *selección de la mejor alternativa/s*, que es la que marca la mayor diferencia.

---

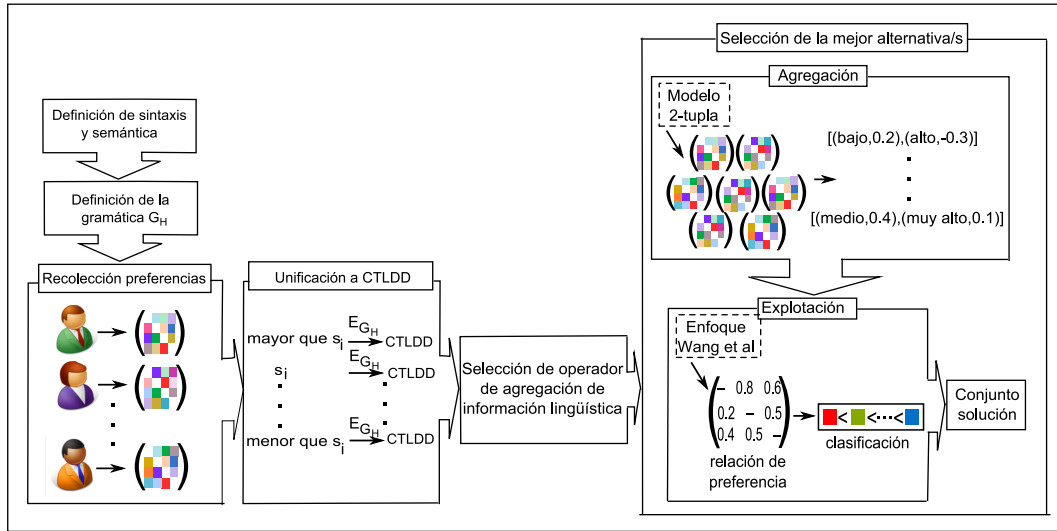


Figura 4.2: Modelo de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla

1. *Definición de semántica y sintaxis*

Al igual que en el modelo de toma de decisiones en grupo presentado previamente, en esta fase se establece la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos  $S$ , que se va a utilizar para expresar la información, se eligen los descriptores lingüísticos y se define su semántica.

2. *Definición de la gramática libre de contexto*

Se define la gramática libre de contexto  $G_H$ , para generar las expresiones lingüísticas comparativas que los expertos utilizarán para expresar sus preferencias cuando duden entre varios términos lingüísticos.

3. *Recolección de las preferencias*

Los expertos expresan sus preferencias mediante una relación de preferencia  $P^k$  utilizando el conjunto de términos lingüísticos  $S$ , y en caso de dudar entre varios de ellos, pueden utilizar las expresiones lingüísticas comparativas generadas con la gramática libre de contexto  $G_H$  definida en la fase anterior.

4. *Unificación de expresiones lingüísticas en CTLDD*

Para realizar los procesos computacionales en la fase de selección, es necesario unificar las expresiones lingüísticas comparativas y términos lingüísticos simples en un único dominio. Para ello, en esta fase se define la función de transformación  $E_{GH}$ , que transforma ambos tipos de expresiones en CTLDD. Seguidamente, se obtiene la envoltura de cada CTLDD  $env(H_S(p_{ij}^k)) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$ , cuyo resultado es un intervalo lingüístico que será utilizado para agregar las preferencias proporcionadas por los expertos.

#### 5. Selección de un operador de agregación de información lingüística

Teniendo en cuenta que este modelo utiliza el modelo lingüístico 2-tupla para mejorar la precisión de los resultados obtenidos en los procesos de computación con palabras, en esta fase se elige un operador de agregación  $\varphi$  de información lingüística basado en 2-tupla. En la literatura se pueden encontrar distintos operadores de agregación basados en 2-tupla [67], su selección dependerá del problema de decisión a resolver.

#### 6. Selección de la mejor alternativa/s

En el proceso de selección se obtiene el conjunto solución de alternativas para el problema de toma de decisiones. Este proceso se divide en dos pasos como a continuación se describe.

##### i) Agregación de la información lingüística

En este paso las preferencias de los expertos son agregadas para obtener una preferencia colectiva para cada alternativa. Dado que las preferencias obtenidas en la fase de *unificación* están representadas mediante intervalos lingüísticos (sección 3.3.1), este modelo interpreta tales preferencias desde dos puntos de vista, pesimista y optimista. En este caso, el límite inferior del intervalo representa la percepción pesimista y el límite superior la percepción optimista. Para realizar la agregación de las preferencias se realiza un doble proceso de agregación manteniendo separadas ambas percepciones (ver Fig. 4.3).

- En el primer proceso de agregación, las relaciones de preferencia representadas mediante intervalos lingüísticos son agregadas para obtener dos relaciones de preferencia colectivas  $P_C^-, P_C^+$ . Para ello,
-

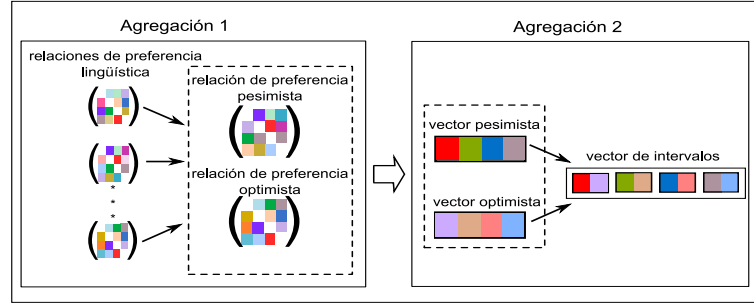


Figura 4.3: Esquema del doble proceso de agregación

los intervalos lingüísticos se transforman en valores 2-tupla añadiendo un valor 0 como traslación simbólica.

$$p_{ij}^k = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}] \Rightarrow [(s_r, 0)_{ij}^{k-}, (s_r, 0)_{ij}^{k+}]$$

donde  $s_r \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$

Una vez obtenidos los valores 2-tupla, se utiliza el operador de agregación seleccionado  $\varphi$ , para agregar de forma separada los límites izquierdos y derechos de los intervalos lingüísticos de cada preferencia.

$$P_{C_{ij}^-} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^{k-})) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (4.9)$$

$$P_{C_{ij}^+} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^{k+})) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (4.10)$$

donde  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  siendo  $n$  el número de alternativas y  $m$  el número de expertos.

Las relaciones de preferencia colectivas  $P_C^-$  y  $P_C^+$  representan las percepciones colectivas pesimista y optimista de las preferencias agregadas. Los valores obtenidos en este proceso de agregación son 2-tupla lingüística.

$$P_C^- = \begin{pmatrix} (s_r, \alpha)_{11}^- & \dots & (s_r, \alpha)_{1n}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_r, \alpha)_{n1}^- & \dots & (s_r, \alpha)_{nn}^- \end{pmatrix} \quad P_C^+ = \begin{pmatrix} (s_r, \alpha)_{11}^+ & \dots & (s_r, \alpha)_{1n}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_r, \alpha)_{n1}^+ & \dots & (s_r, \alpha)_{nn}^+ \end{pmatrix}$$

- En el segundo proceso de agregación, las percepciones colectivas pesimista y optimista son agregadas utilizando un operador de agregación  $\phi$ , que puede ser el mismo que el anterior  $\varphi$ , u otro diferente. Los resultados obtenidos serán las preferencias colectivas pesimistas  $p_i^-$  y optimistas  $p_i^+$  para cada alternativa  $x_i$ .

$$p_i^- = \Delta(\phi(\Delta^{-1}((s_r, \alpha)_{ij}^-))) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.11)$$

$$p_i^+ = \Delta(\phi(\Delta^{-1}((s_r, \alpha)_{ij}^+))) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4.12)$$

siendo  $(s_r, \alpha)_{ij}$  una 2-tupla lingüística e  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Una vez que se ha obtenido una preferencia colectiva pesimista y optimista para cada alternativa  $x_i$ , se construye un intervalo lingüístico colectivo para cada alternativa. El resultado es por tanto, un vector de intervalos de preferencias colectivas de alternativas  $V^R$ .

$$V^R = (p_1^R, \dots, p_n^R) \quad (4.13)$$

donde  $p_i^R = [p_i^-, p_i^+]$  y  $p_i^-, p_i^+ \in S \times (-0.5, 0.5]$ .

#### ii) *Explotación*

Una vez la información lingüística ha sido agregada, se realiza el proceso de explotación, donde se aplica una función de selección para obtener un ranking de alternativas y seleccionar la mejor alternativa como solución al problema. Para ello se sigue el esquema mostrado en la Figura 4.4:

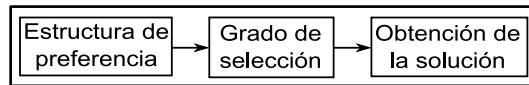


Figura 4.4: Esquema de explotación

- *Estructura de preferencia*

Para aplicar la función de selección se construye una estructura de preferencia que muestra el grado de preferencia de una alternativa sobre otra. Nuestra propuesta adapta el método de Wang et al. [155] para manejar intervalos lingüísticos, por tanto,  $Ind(s_i) = i$  (indica el índice asociado a cada término lingüístico),  $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

**Definición 48** [155] Sea  $A = [a_1, a_2]$  y  $B = [b_1, b_2]$  dos intervalos, el grado de preferencia de  $A$  sobre  $B$  o ( $A > B$ ) se define

$$P(A > B) = \frac{\max(0, a_2 - b_1) - \max(0, a_1 - b_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}$$

y el grado de preferencia de  $B$  sobre  $A$  o ( $B > A$ ) como

$$P(B > A) = \frac{\max(0, b_2 - a_1) - \max(0, b_1 - a_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}$$

donde  $P(A < B) + P(B > A) = 1$  y  $P(A > B) = P(B > A) = 0.5$  cuando  $A = B$  es decir,  $a_1 = b_1$  y  $a_2 = b_2$ .

Por tanto, la estructura de preferencia para el conjunto de alternativas se obtiene de la siguiente forma:

**Definición 49** [155] Sea  $P_D$  una relación de preferencia,

$$P_D = \begin{pmatrix} - & pd_{12} & \dots & pd_{1n} \\ pd_{21} & - & \dots & pd_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pd_{n1} & pd_{n2} & \dots & - \end{pmatrix}$$

donde  $pd_{ij} = P(x_i > x_j) = \frac{\max(0, x_{iR} - x_{jL}) - \max(0, x_{iL} - x_{jR})}{(x_{iR} - x_{iL}) - (x_{jR} - x_{jL})}$  es el grado de preferencia de la alternativa  $x_i$  sobre  $x_j$ ;  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $i \neq j$ , y  $x_i = [x_{iL}, x_{iR}]$ ,  $x_j = [x_{jL}, x_{jR}]$ .

■ *Grado de selección*

Una vez construida la estructura de preferencia entre las alternativas, se aplica una función de selección que obtiene un grado de selección para cada alternativa  $x_i$ . Para ello existen diferentes métodos [63], en este modelo se propone el uso del *grado de selección de no dominancia NDD*, que indica el grado para el cual una alternativa  $x_i$  no es dominada por el resto.

Su definición es la siguiente,

**Definición 50** Sea  $P = (p_{ij})_{n \times n}$  una relación de preferencia definida sobre el conjunto de alternativas  $X$ . Para cada alternativa  $x_i$ , su grado de no dominancia  $NDD_i$  se obtiene,

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j = 1, \dots, n, j \neq i\}$$

donde  $p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$  representa el grado para el cual  $x_i$  es estrictamente dominada por  $x_j$ .

■ *Obtención de la solución*

Finalmente, se obtiene el conjunto solución de alternativas aplicando la siguiente función,

$$X^{ND} = \{x_i/x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\}$$

A continuación se muestra un algoritmo para resolver problemas de toma de decisiones en grupo definidos en contextos dudosos utilizando el modelo de toma de decisiones basado en 2-tupla.

Supongamos un conjunto de alternativas  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , y un conjunto de expertos  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ , que expresa sus relaciones de preferencias mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas generadas con la gramática libre de contexto  $G_H$ , y su función de transformación  $E_{G_H}$ .

El algoritmo es el siguiente:

1. Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .
3. Recoger las preferencias aportadas por los expertos  $e_k$ ,  $k = \{1, \dots, m\}$ .
4. PARA cada matriz  $P^k$   $k = \{1, \dots, m\}$  HACER

4.1 Para cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^k$  HACER

4.1.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^k$  HACER

$$E_{G_H}(S_{ij}) = H_S(p_{ij}^k)$$

$$env(H_S) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

5. Seleccionar dos operadores de agregación de información lingüística  $\varphi$  y  $\phi^*$ .

---

\*Estos dos operadores podrían ser los mismos.

---

6. PARA cada matriz  $P^k$   $k = \{1, \dots, m\}$  HACER

6.1 PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^k$  HACER

6.1.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  de la matriz  $P^k$  HACER

$$[p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}] \Rightarrow [(s_r, 0)_{ij}^{k-}, (s_r, 0)_{ij}^{k+}]$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

7. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de las  $m$  matrices  $P^k$  HACER

7.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de las  $m$  matrices  $P^k$  HACER

$$P_{C_{ij}^-} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^{k-})) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$P_{C_{ij}^+} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^{k+})) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

FIN PARA

FIN PARA

8. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_C^-$  HACER

$$p_i^- = \Delta(\phi(\Delta^{-1}((s_r, \alpha)_{ij}^-))) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

FIN PARA

9. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_C^+$  HACER

$$p_i^+ = \Delta(\phi(\Delta^{-1}((s_r, \alpha)_{ij}^+))) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

FIN PARA

10. Construir un vector  $V^R$  de alternativas.

$$V^R = ([p_i^-, p_i^+]) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

11. PARA cada alternativa  $i = \{1, \dots, n\}$  de  $V^R$  HACER

11.1 PARA cada alternativa  $j = \{1, \dots, n\}$  de  $V^R$   $i \neq j$  HACER

$$pd_{ij} = P([p_i^-, p_i^+] > [p_j^-, p_j^+])$$

FIN PARA

FIN PARA

12. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_D$  HACER

12.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^D$  HACER

$$p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$$

FIN PARA

FIN PARA

13. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^S$  HACER

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j \neq i\}$$

14. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X^{ND} = \{x_i / x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\}$$

## 4.4. Ejemplo Ilustrativo de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico en Grupo

En esta sección se define un problema de toma de decisiones lingüístico en grupo en el que los expertos pueden utilizar expresiones lingüísticas comparativas para expresar sus valoraciones de preferencia, y lo resolveremos con los dos modelos propuestos. Finalmente analizaremos los resultados obtenidos con ambos modelos.

### Definición de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico en Grupo

Supongamos que un grupo de tres profesores  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$  imparten la misma asignatura en el departamento de informática de su universidad, y tienen que decidir qué libro de los que han propuesto  $X = \{x_1 : Libro1, x_2 : Libro2, x_3 :$

---

$\{Libro3, x_4 : Libro4\}$  van a utilizar para impartir la asignatura. Aunque el contenido de los 4 libros es muy similar, algunos temas son diferentes, lo que hace que los profesores duden sobre qué libro puede ser mejor. Los profesores proporcionan sus preferencias mediante términos lingüísticos simples o en caso de dudar entre varios de ellos, mediante expresiones lingüísticas comparativas.

#### 4.4.1. Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en la Combinación Convexa

Para resolver el problema de toma de decisiones lingüístico definido previamente con el modelo de toma de decisiones propuesto en la sección 4.2, seguiremos los pasos del algoritmo definido para el modelo.

1. *Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .*

En problemas de toma de decisión en grupo los expertos proporcionan sus valoraciones mediante relaciones de preferencia  $P^k$ , donde una valoración representa el grado de preferencia de una alternativa sobre otra. Un conjunto de términos lingüísticos adecuado para resolver este tipo de problemas es  $S = \{Ninguno(N), Bajo(B), Muy Bajo(MB), Medio(M), Alto(A), Muy Alto(MA), Absoluto(AB)\}$ .

2. *Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .*

La gramática libre de contexto  $G_H$ , definida en el capítulo 3 es adecuada para este problema de toma de decisiones, ya que permite generar expresiones lingüísticas comparativas similares al lenguaje natural utilizado por los expertos para expresar sus preferencias cuando no pueden proporcionar un único término lingüístico porque dudan entre varios de ellos.

3. *Recoger las preferencias aportadas por los expertos.*

Las relaciones de preferencia proporcionadas por los profesores mediante términos lingüísticos simples y expresiones lingüísticas comparativas se recogen en esta fase del proceso de decisión.

---

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \text{menor que } B & MA & \text{al menos } A \\ \text{mayor que } A & - & \text{entre } A \text{ y } MA & A \\ B & \text{como mucho } MB & - & AB \\ \text{menor que } B & B & MB & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & \text{menor que } M & A & \text{entre } MB \text{ y } B \\ \text{entre } A \text{ y } MA & - & A & MB \\ MB & B & - & A \\ \text{al menos } A & MA & MB & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & A & \text{entre } MB \text{ y } B & A \\ MB & - & \text{mayor que } M & \text{al menos } MA \\ \text{al menos } A & \text{menor que } B & - & MA \\ B & \text{como mucho } B & MB & - \end{pmatrix}$$

4. Las relaciones de preferencia proporcionadas por los profesores son unificadas en CTLDD mediante la función de transformación  $E_{GH}$ .

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \{N, MB\} & \{MA\} & \{A, MA, AB\} \\ \{MA, AB\} & - & \{A, MA\} & \{A\} \\ \{B\} & \{N, MB\} & - & \{AB\} \\ \{N, MB\} & \{B\} & \{MB\} & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & \{N, MB, B\} & \{A\} & \{MB, B\} \\ \{A, MA\} & - & \{A\} & \{MB\} \\ \{MB\} & \{B\} & - & \{A\} \\ \{A, MA, AB\} & \{MA\} & \{MB\} & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & \{A\} & \{MB, B\} & \{A\} \\ \{MB\} & - & \{A, MA, AB\} & \{MA, AB\} \\ \{A, MA, AB\} & \{N, MB\} & - & \{MA\} \\ \{B\} & \{N, MB, B\} & \{MB\} & - \end{pmatrix}$$

5. Obtener para cada CTLDD su envoltura.

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & [N, MB] & [MA, MA] & [A, AB] \\ [MA, AB] & - & [A, MA] & [A, A] \\ [B, B] & [N, MB] & - & [A, A] \\ [N, MB] & [B, B] & [MB, MB] & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & [N, B] & [A, A] & [MB, B] \\ [A, MA] & - & [A, A] & [MB, MB] \\ [MB, MB] & [B, B] & - & [A, A] \\ [A, AB] & [MA, MA] & [MB, MB] & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & [A, A] & [MB, B] & [A, A] \\ [MB, MB] & - & [A, AB] & [MA, AB] \\ [A, AB] & [N, MB] & - & [MA, MA] \\ [B, B] & [N, B] & [MB, MB] & - \end{pmatrix}$$

6. *Seleccionar un operador de agregación de información lingüística.*

Sin pérdida de generalidad, para agregar las preferencias de los profesores que participan en el problema de toma de decisiones, se utiliza el operador LOWA (Linguistic Ordered Weighted Averaging) [157].

7. Las preferencias de los profesores representadas mediante intervalos lingüísticos se agregan utilizando el operador de agregación LOWA. Para ello, se agregan de forma separada los límites izquierdos y derechos de los intervalos lingüísticos, y se obtiene una relación de preferencia colectiva de intervalos lingüísticos  $P_C$ .

$$P_C = \begin{pmatrix} - & [MB, B] & [A, A] & [M, A] \\ [A, A] & - & [A, MA] & [A, A] \\ [M, M] & [MB, B] & - & [A, A] \\ [B, M] & [B, M] & [MB, MB] & - \end{pmatrix}$$

8. *Obtener la relación de preferencia media  $\bar{P}_C$  y la matriz de error  $\delta$ .*

$$\bar{P}_C = \begin{pmatrix} - & 1.5 & 4 & 3.5 \\ 4 & - & 4.5 & 4 \\ 3 & 1.5 & - & 4 \\ 2.5 & 2.5 & 1 & - \end{pmatrix} \delta = \begin{pmatrix} - & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & - & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & - & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & - \end{pmatrix}$$

9. *Obtener el vector de pesos  $\bar{w}$  y el vector de error de pesos  $\Lambda w$ .*

$$\bar{w} = (0.833, 1.125, 0.792, 0.583)$$

donde  $\bar{w}_1$  se calcula como sigue,

$$\bar{w}_1 = \frac{(1.5 + 4 + 3.5) + \frac{4}{2} - 1}{4 * (4 - 1)} = 0.833$$

$$\Lambda w = (0.059, 0.042, 0.042, 0.059)$$

$$\text{donde } \Lambda w_1 = \frac{1}{4*(4-1)} \sqrt{(0.5^2 + (0)^2 + 0.5^2)} = 0.059$$

10. Construir la relación de preferencia de grado de posibilidad  $P_D$ .

$$PD = \begin{pmatrix} - & 0 & 0.707 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0.293 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

11. Aplicar un grado de selección de dominancia sobre el grado de posibilidad de las alternativas.

$$pd_1 = 1.707 \quad pd_2 = 3 \quad pd_3 = 1.293 \quad pd_4 = 0$$

donde  $pd_1$  es calculado como sigue,

$$pd_1 = 0 + 0.707 + 1 = 1.707$$

12. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X^D = \max\{pd_1 = 1.707, pd_2 = 3, pd_3 = 1.293, pd_4 = 0\} = pd_2$$

Por tanto, el libro seleccionado es, **Libro2**.

#### 4.4.2. Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones en Grupo con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla

A continuación se resuelve el mismo problema de toma de decisiones en grupo utilizando el algoritmo del modelo de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla. Dado que varias fases del modelo

---

son similares al modelo basado en la Combinación Convexa, nos centraremos en las fases de *selección de un operador de agregación de información lingüística* y *selección de la mejor alternativa* siguiendo los pasos correspondientes del algoritmo definido.

5. *Seleccionar dos operadores de agregación de información lingüística.*

Teniendo en cuenta que este modelo intenta mejorar la precisión de los resultados en los procesos de computación con palabras utilizando el modelo lingüístico 2-tupla, el operador de agregación debe estar basado en 2-tupla. Sin pérdida de generalidad, para agregar las preferencias de los profesores se utilizará el operador de agregación de la media aritmética basada en 2-tupla [67].

6. Los intervalos lingüísticos se transforman en valores 2-tupla añadiendo un valor 0 como traslación simbólica.

7. Para agregar las relaciones de preferencia representadas mediante intervalos lingüísticos se agregan separadamente los límites izquierdos y derechos de los intervalos para obtener una preferencia colectiva pesimista  $P_C^-$  y otra optimista  $P_C^+$ .

$$P_C^- = \begin{pmatrix} - & (MB, .33) & (M, .33) & (M, 0) \\ (M, .33) & - & (A, 0) & (M, .33) \\ (B, .33) & (MB, -.33) & - & (A, .33) \\ (B, 0) & (B, .33) & (MB, 0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{C_{12}}^- = \frac{1}{3}(\Delta^{-1}(N, 0) + \Delta^{-1}(N, 0) + \Delta^{-1}(A, 0)) = (MB, .33)$$

$$P_C^+ = \begin{pmatrix} - & (B, .33) & (A, -.33) & (A, 0) \\ (MA, .14) & - & (MA, 0) & (A, -.33) \\ (M, .33) & (MB, .33) & - & (A, .33) \\ (M, 0) & (M, 0) & (MB, 0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{C_{12}}^+ = \frac{1}{3}(\Delta^{-1}(MB, 0) + \Delta^{-1}(B, 0) + \Delta^{-1}(A, 0)) = (B, .33)$$

8 y 9. Utilizar de nuevo el operador de agregación de la media aritmética basada en 2-tupla, para obtener una preferencia colectiva pesimista y otra optimista para cada alternativa (ver Tabla 4.1).

Tabla 4.1: Preferencia colectiva pesimista y optimista para cada alternativa

	<i>Libro1</i>	<i>Libro2</i>	<i>Libro3</i>	<i>Libro4</i>
pessimistic	(M,-.44)	(A,-.44)	(B,.44)	(B,.22)
optimistic	(M,.33)	(MA,-.40)	(M,-.11)	(B,.33)

$$p_1^- = \frac{1}{3}(\Delta^{-1}(MB, .33), \Delta^{-1}(M, .33), \Delta^{-1}(M, 0)) = (M, -.44)$$

10. Utilizar la preferencia colectiva pesimista y optimista de cada alternativa para construir un vector de intervalos  $V^R = (p_1^R, p_2^R, p_3^R, p_4^R)$  para las alternativas (ver Tabla 4.2).

Tabla 4.2: Intervalos lingüísticos para las alternativas

<i>Libro1</i>	<i>Libro2</i>	<i>Libro3</i>	<i>Libro4</i>
$p_1^R$	$p_2^R$	$p_3^R$	$p_4^R$
[(M,-.44),(M,.33)]	[(A,-.44),(MA,-.40)]	[(B,.44),(M,-.11)]	[(B,.22),(B,.33)]

11. Construir una estructura de preferencia utilizando el vector de intervalos obtenido en el paso anterior.

$$P_D = \begin{pmatrix} - & 0 & 0.73 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0.27 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

$$P_D(p_1^I > p_3^I) = \frac{\max(0, 3.33 - 2.44) - \max(0, 2.56 - 2.89)}{(3.33 - 2.56) + (2.89 - 2.44)} = 0.73$$

12. Construir la matriz de dominancia.

$$P_D^S = \begin{pmatrix} - & 0 & 0.45 & 1 \\ 1 & - & 1 & 1 \\ 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & - \end{pmatrix}$$

13. Aplicar un grado de selección de no dominancia para cada alternativa.

$$NDD_1 = 0, NDD_2 = 1, NDD_3 = 0, NDD_4 = 0$$

donde  $NDD_1$  se obtiene mediante el siguiente cálculo,

$$NDD_1 = \min\{(1 - 1), (1 - 0), (1 - 0)\} = 0$$

14. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X^{ND} = \max\{NDD_1 = 0, NDD_2 = 1, NDD_3 = 0, NDD_4 = 0\} = NDD_2$$

Por tanto, el libro seleccionado es  $Libro2 = [(A, -.44), (MA, -.40)]$ .

A pesar de que el resultado obtenido con ambos modelos es el mismo, *Libro2*, podemos destacar que el modelo de toma de decisión en grupo basado en 2-tupla proporciona una herramienta de computación más simple que la Combinación Convexa. Además, asocia un vector de valores 2-tupla a la alternativa seleccionada.

---



## Capítulo 5

# Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas

Al igual que varios expertos forman parte en la toma de decisiones, en el capítulo 2 también se comentó la importancia de problemas donde las distintas alternativas se evalúan atendiendo a múltiples criterios, hablándose de toma de decisiones multicriterio. Esto implica una optimización múltiple de dichos criterios. En el caso de que participen múltiples expertos y debido a las diferentes estructuras de modelo de preferencias se habla de toma de decisiones multicriterio multiexperto.

Dada la importancia de este tipo de problemas en el mundo real, en este capítulo se proponen 2 modelos de resolución de problemas de toma de decisiones multicriterio con información lingüística, en los que las preferencias pueden expresarse mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas.

De la misma forma que en el capítulo 4, aquí se presenta un modelo basado en el modelo lingüístico computacional simbólico basado en escalas ordinales, y posteriormente otro modelo basado en el modelo de representación lingüística 2-Tupla. Y para cubrir las necesidades de resolución de problemas de toma de decisiones multicriterio multiexperto se propone un modelo basado en la representación lingüística 2-Tupla ya que realiza los procesos computacionales de forma eficiente y precisa.

## 5.1. Toma de Decisiones Multicriterio

Los problemas de toma de decisiones multicriterio pueden ser de diverso tipo, desde problemas de nuestra vida diaria como por ejemplo, “comprar un coche”, a aquellos que afectan a naciones enteras, “el uso juicioso del dinero para preservar la seguridad nacional”. A pesar de esta diversidad, todos los problemas de toma de decisiones multicriterio comparten las siguientes características comunes [76, 125]:

- *Multicriterio*: problema que tiene en cuenta más de un criterio para la evaluación de cada alternativa.
- *Conflictos entre criterios*
- *Unidad incommensurable*: los criterios pueden tener diferente unidad de medida.
- *Selección*: la solución de un problema de toma de decisiones multicriterio consiste en seleccionar la mejor alternativa entre un conjunto finito de alternativas previamente definidas.

Matemáticamente, un problema de toma de decisiones multicriterio puede ser modelado como sigue:

$$(\text{Toma de decisiones multicriterio}) = \begin{cases} \text{Seleccionar : } x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{sujeto a : } c_1, c_2, \dots, c_m \end{cases} \quad (5.1)$$

donde  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  es un conjunto de  $n$  alternativas, y  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  representa un conjunto de  $m$  criterios que caracteriza una situación de decisión. Una representación del problema puede expresarse mediante la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Esquema general de un problema de toma de decisiones multicriterio

Alternativas	<i>Criterios</i>			
	$c_1$	$c_2$	$\dots$	$c_m$
$x_1$	$y_{11}$	$y_{12}$	$\dots$	$y_{1m}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$y_{n1}$	$y_{n2}$	$\dots$	$y_{nm}$

Cada entrada  $y_{ij}$  indica la preferencia de la alternativa  $x_i$  respecto del criterio  $c_j$ .

---

Como ya se ha comentado, en algunas ocasiones es difícil para un experto valorar un criterio mediante un único término lingüístico, y necesita expresiones lingüísticas más elaboradas y cercanas al lenguaje natural. En este capítulo se presentan dos modelos de toma de decisiones multicriterio, que utilizan expresiones lingüísticas comparativas basadas en gramáticas libres de contexto y CTLDD. Para realizar los procesos computacionales, los modelos propuestos utilizan el modelo lingüístico computacional simbólico basado en operadores máximo y mínimo, y el modelo lingüístico 2-Tupla.

## **5.2. Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en Max-Min**

En esta sección se propone un modelo de toma de decisiones lingüístico multicriterio, donde los criterios de las alternativas son valorados mediante expresiones lingüísticas comparativas o términos lingüísticos simples. Para ello, extenderemos el esquema básico de un problema de toma de decisiones lingüístico mostrado en la Figura 2.6, añadiendo las fases necesarias para manejar las expresiones lingüísticas comparativas y realizar los procesos computacionales de una forma simple. Además, definiremos operadores de agregación basados en operadores max-min para agregar CTLDD en estos problemas. Este modelo se divide en 6 fases como se puede observar en la Figura 5.1, y que a continuación pasamos a explicar detalladamente.

### *1. Definición de semántica y sintaxis*

En esta fase se elige un conjunto de términos lingüísticos adecuado  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , que será utilizado por los expertos para valorar el conjunto de criterios del problema de toma de decisiones. Para ello, hay que analizar la granularidad de la incertidumbre, establecer la sintaxis de los términos lingüísticos y definir su semántica.

### *2. Definición de la gramática libre de contexto*

Una vez definida la sintaxis y la semántica del conjunto de términos lingüísticos  $S$ , se define una gramática libre de contexto  $G_H$ , que genere expresio-

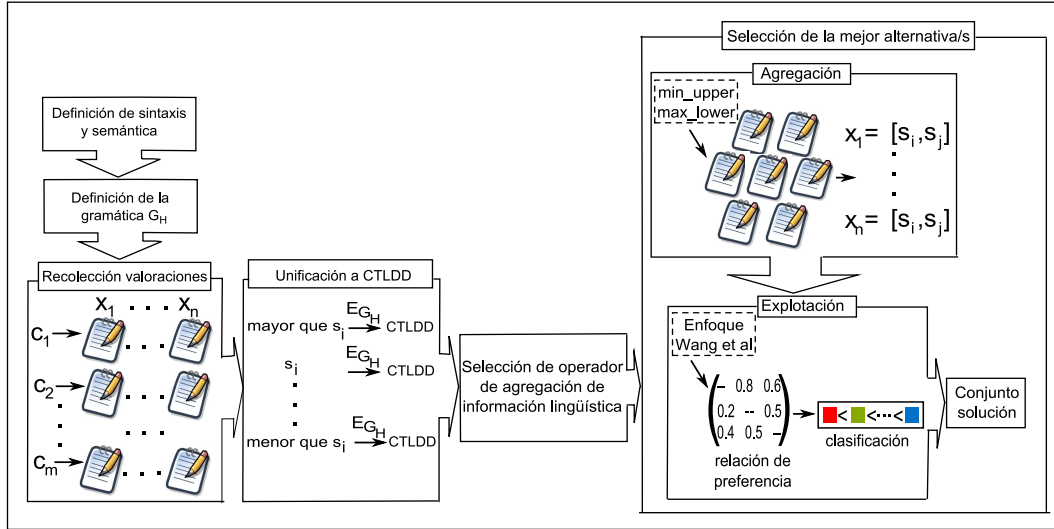


Figura 5.1: Modelo de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas basado en max-min

nes lingüísticas comparativas. La definición de la gramática libre de contexto dependerá del problema concreto que se pretenda resolver, por tanto, es muy importante definir adecuadamente los elementos de la gramática  $G_H = (V_N, V_T, P, I)$ . Una gramática libre de contexto  $G_H$  que se puede utilizar es la presentada en el capítulo 3, Def. 46.

### 3. *Recolección de valoraciones*

El experto proporciona sus valoraciones sobre el conjunto de criterios  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  para cada alternativa  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  utilizando para ello términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas  $\mu_V : X \times C \rightarrow S_U$  (ver Tabla 5.2).

Tabla 5.2: Valoraciones proporcionadas para el problema de decisiones

		<i>critérios</i>		
		$S_U$	$c_1$	$\dots$
<i>alternativas</i>	$x_1$	$v_{11}$	$\dots$	$v_{1m}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$x_n$	$v_{n1}$	$\dots$	$v_{nm}$

donde cada valoración  $v_{ij} \in S_U$  representa la valoración para la alternativa  $x_i$  sobre el criterio  $c_j$  expresada en el dominio de expresión  $S_U$ .

4. *Unificación de expresiones lingüísticas en CTLDD*

Dado que las valoraciones pueden ser términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas, para realizar los procesos computacionales es necesario unificar ambos tipos de términos en un único dominio. Para ello, las valoraciones de los criterios son transformadas en CTLDD mediante la función de transformación  $E_{G_H}$ . La función de transformación base definida en el capítulo 3 (Def. 47) puede ser utilizada para transformar las expresiones lingüísticas generadas por la gramática  $G_H$  anterior, en CTLDD en problemas de toma de decisiones multicriterio.

$$E_{G_H}(v_{ij}) = H_S(v_{ij})$$

donde  $H_S$  es el CTLDD generado según la función de transformación  $E_{G_H}$ .

5. *Selección de un operador de agregación de información lingüística*

Atendiendo al esquema de resolución de problemas de toma de decisiones multicriterio mostrado en la Figura 5.1, una vez las valoraciones son unificadas en CTLDD, la siguiente fase es elegir un operador de agregación de información lingüística para agregar el conjunto de criterios de cada alternativa. Dado que nuestra investigación está centrada en el uso de modelos computacionales simbólicos, en este caso proponemos la definición de dos operadores de agregación simbólicos basados en  $max_ymin$ , tales como,

$min\_upper$  y  $max\_lower$ , que reflejan dos puntos de vista diferentes *pesimista* y *optimista*. Para no intensificar el resultado de la agregación hacia un único punto de vista, ambos operadores pueden ser combinados.

### Operadores de Agregación basados en $max, min$ para CTLDD

El operador  $min\_upper$  selecciona el peor de los valores superiores, mientras que el operador  $max\_lower$  selecciona el mejor de los valores inferiores en un CTLDD.

Antes de introducir la definición de ambos operadores, formalizamos la notación que utilizaremos para agregar los CTLDD.

Sea  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  un conjunto de criterios definido para cada alternativa  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  un conjunto de términos lingüísticos, y  $\{H_S(v_{ij})/i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  un conjunto de CTLDD.

#### ▪ Operador $min\_upper$

**Definición 51** [129] *Este operador es un operador de agregación simbólico introducido para combinar valoraciones representadas mediante CTLDD y obtener como resultado el menor de los términos lingüísticos máximos. El operador  $min\_upper$  consiste en los siguientes pasos:*

- *Obtener el límite superior  $H_{S^+}$  de cada valoración representada mediante CTLDD utilizando el operador upper bound definido para CTLDD.*

$$H_{S^+}(v_i) = \{H_{S^+}(v_{i1}), \dots, H_{S^+}(v_{im})\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

- *Seleccionar el menor término lingüístico del conjunto de criterios definidos para cada alternativa.*

$$H_{S_{min}^+}(v_i) = \min\{H_{S^+}(v_{ij})/j \in \{1, \dots, m\}\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

#### ▪ Operador $max\_lower$

**Definición 52** [129] *Este operador simbólico también es propuesto para agregar CTLDD, sin embargo su funcionamiento es opuesto al operador anterior, ya que obtiene el mayor de los términos lingüísticos mínimos. El operador  $max\_lower$  consiste en los siguientes pasos:*

---

- Obtener el límite inferior  $H_{S^-}$  de cada valoración representada mediante CTLDD utilizando el operador lower bound definido para CTLDD.

$$H_{S^-}(v_i) = \{H_{S^-}(v_{i1}), \dots, H_{S^-}(v_{im})\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

- Seleccionar el máximo término lingüístico del conjunto de criterios definidos para cada alternativa.

$$H_{S_{max}^-}(v_i) = \max\{H_{S^-}(v_{ij})/j \in \{1, \dots, m\}\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

6. Selección de la mejor alternativa/s.

El proceso de selección busca la alternativa o conjunto de alternativas solución al problema de toma de decisiones multicriterio. Para ello se realizan las dos fases del esquema de resolución básico: (i) *Agregación* y (ii) *Explotación*.

i) *Agregación de la información lingüística*

En esta fase las valoraciones representadas mediante CTLDD son agregadas mediante los operadores de agregación definidos *min\_upper* y *max\_lower*, para obtener una valoración colectiva pesimista y otra optimista para cada alternativa.

$$H_{S_{min}^+}(v_i) = \min\_upper(H_S(v_{i1}), \dots, H_S(v_{im})) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$H_{S_{max}^-}(v_i) = \max\_lower(H_S(v_{i1}), \dots, H_S(v_{im})) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

donde  $n$  es el número de alternativas y  $m$  el número de criterios.

Una vez obtenida una valoración colectiva pesimista y otra optimista para cada alternativa  $x_i$ , se construye un intervalo lingüístico. De esta forma, el término lingüístico mínimo será el límite izquierdo del intervalo y el término lingüístico máximo representará el límite derecho (ver Figura 5.2).

$$H'_{max}(v_i) = \max\{H_{S_{min}^+}(v_i), H_{S_{max}^-}(v_i)\}$$

$$H'_{min}(v_i) = \min\{H_{S_{min}^+}(v_i), H_{S_{max}^-}(v_i)\}$$

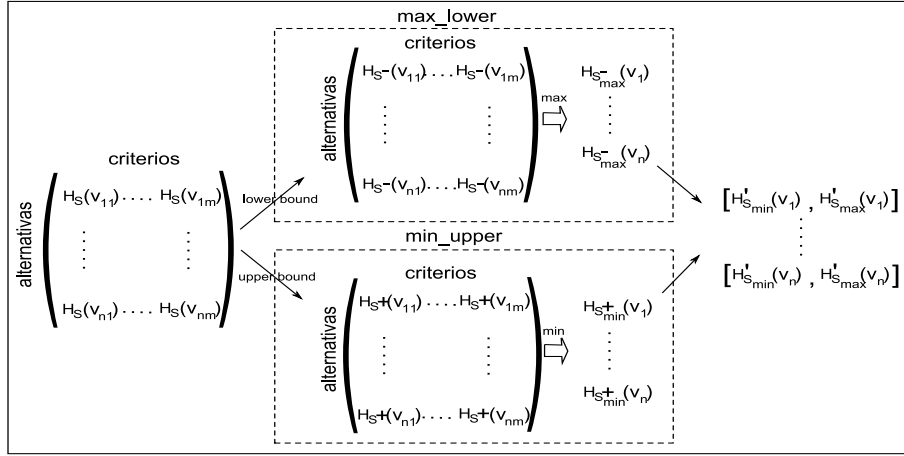


Figura 5.2: Operadores de agregación *max\_lower* y *min\_upper*

El resultado es por tanto, un vector de intervalos de valores colectivos de alternativas  $V^R$ .

$$V^R = (H'(v_1), \dots, H'(v_n))$$

donde  $H'(v_i) = [H'_{min}(v_i), H'_{max}(v_i)]$ .

### ii) *Explotación*

Una vez la información lingüística ha sido agregada, se realiza el proceso de explotación, donde el conjunto de alternativas es ordenado para seleccionar la mejor de ellas. Para ello se aplican los pasos del esquema de la Figura 4.4:

- *Estructura de preferencia*

Dado que la información agregada para cada alternativa es expresada mediante intervalos lingüísticos, para ordenar el conjunto de alternativas se construye una estructura de preferencia que muestra el grado de preferencia de una alternativa sobre otra. Existen diferentes enfoques para ordenar las alternativas [80, 120, 155]. Nosotros utilizaremos el enfoque propuesto por Wang et al. en [155] ya que permite ordenar el conjunto de alternativas utilizando intervalos. Dado que este enfoque ya fue revisado en el capítulo 4, aquí solo indicamos que se utilizan las Definiciones 48 y 49.

▪ *Grado de selección*

Una vez construida la estructura de preferencias, se aplica una función de selección que obtiene un grado de selección para cada alternativa. En la literatura se han propuesto diferentes funciones de selección [63]. Nosotros utilizaremos el grado de selección de no dominancia  $NDD$ , que indica el grado para el cual una alternativa no es dominada por el resto (ver Def. 50).

▪ *Obtención de la solución*

Finalmente, para obtener el conjunto solución de alternativas se aplica la siguiente función,

$$X^{ND} = \{x_i/x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\}$$

A continuación se describe un algoritmo para resolver problemas de toma de decisiones multicriterio utilizando el modelo propuesto.

Supongamos un conjunto de criterios  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  definido para cada alternativa  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  que pueden ser valorados mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas. El algoritmo es el siguiente:

1. Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .
3. Recoger las valoraciones proporcionadas  $v_{ij}$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$  y  $j = \{1, \dots, m\}$ .
4. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER
  - 4.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$E_{G_H}(v_{ij}) = H_S(v_{ij})$$

FIN PARA

FIN PARA

5. Seleccionar dos operadores de agregación de información lingüística  $min\_upper$  y  $max\_lower$ .

6. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

$$H_{S_{min}^+}(v_i) = \min\_upper(H_S(v_{i1}), \dots, H_S(v_{im}))$$

$$H_{S_{max}^-}(v_i) = \max\_lower(H_S(v_{i1}), \dots, H_S(v_{im}))$$

FIN PARA

7. PARA cada alternativa  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

$$H'_{max}(v_i) = \max\{H_{S_{min}^+}(v_i), H_{S_{max}^-}(v_i)\}$$

$$H'_{min}(v_i) = \min\{H_{S_{min}^+}(v_i), H_{S_{max}^-}(v_i)\}$$

$$V^R = ([H'_{min}(v_i), H'_{max}(v_i)])$$

FIN PARA

8. PARA cada alternativa  $i = \{1, \dots, n\}$  de  $V^R$  HACER

8.1 PARA cada alternativa  $j = \{1, \dots, n\}$  de  $V^R$   $i \neq j$  HACER

$$pd_{ij} = P([p_i^-, p_i^+] > [p_j^-, p_j^+])$$

FIN PARA

FIN PARA

9. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P_D$  HACER

9.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^D$  HACER

$$p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$$

FIN PARA

FIN PARA

10. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  de la matriz  $P^S$  HACER

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j \neq i\}$$

11. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X^{ND} = \{x_i/x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X}\{NDD_j\}\}$$


---

### 5.3. Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla

En esta sección se presenta un nuevo modelo de toma de decisiones multicriterio que utiliza el modelo computacional 2-tupla para realizar los procesos computacionales, ya que como vimos en el capítulo 2 tiene mejores características respecto a precisión e interpretabilidad que el modelo computacional simbólico basado en los operadores max-min. Este modelo consta de 6 fases, tal y como muestra la Figura 5.3, siendo varias de ellas comunes a las del modelo explicado en la sección anterior. Por tanto, nos centraremos en la fase *selección de la mejor alternativa/s*, que es la que marca la diferencia.

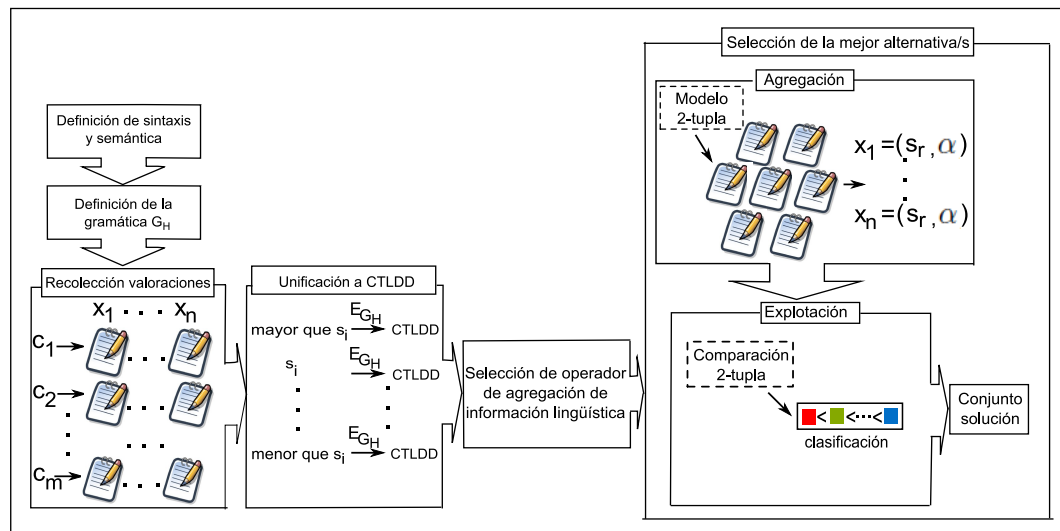


Figura 5.3: Modelo de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla

#### 1. Definición de semántica y sintaxis

Al igual que en el modelo de toma de decisiones multicriterio presentado previamente, en esta fase se establece la granularidad del conjunto de términos lingüísticos  $g$ , se eligen los descriptores del conjunto de términos  $S$ , y se

define su semántica.

2. *Definición de la gramática libre de contexto*

Se define la gramática libre de contexto  $G_H$ , para generar las expresiones lingüísticas comparativas que el experto utilizará para expresar sus valoraciones cuando duda entre varios términos lingüísticos.

3. *Recolección de valoraciones*

Se recogen las valoraciones proporcionadas por el experto sobre el conjunto de criterios de cada alternativa, utilizando para ello términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas generadas mediante la gramática libre de contexto  $G_H$  definida.

4. *Unificación de expresiones lingüísticas en CTLDD*

Para llevar a cabo los procesos computacionales en la fase de *selección de la mejor alternativa*, es necesario unificar los términos lingüísticos simples y expresiones lingüísticas comparativas en un único dominio. Este proceso se realiza mediante la función de transformación  $E_{G_H}$ , que transforma ambos tipos de expresiones en CTLDD.

5. *Selección de un operador de agregación de información lingüística*

Teniendo en cuenta que este modelo utiliza el modelo lingüístico 2-tupla, para realizar los procesos de computación con palabras, en esta fase se elige un operador de agregación  $\varphi$  basado en 2-tupla. En la literatura se pueden encontrar distintos operadores de agregación basados en 2-tupla [67]. La selección del operador dependerá del problema de toma de decisiones multicriterio a resolver.

6. *Selección de la mejor alternativa/s*

Para seleccionar la mejor alternativa o conjunto de alternativas como solución del problema de toma de decisiones multicriterio, el proceso de selección se divide en dos pasos: (i) *Agregación* y (ii) *Explotación*.

i) *Agregación de la información lingüística*

En este paso se agregan los valores del conjunto de criterios de cada alternativa para obtener un valor colectivo para cada alternativa. Dado

---

que las valoraciones proporcionadas han sido transformadas en CTLDD, se realiza un doble proceso de agregación.

- En el primer proceso de agregación se agregan los términos lingüísticos de cada CTLDD para obtener la preferencia de las expresiones mediante valores 2-tupla. Para ello, cada término lingüístico se transforma en una 2-tupla añadiendo un valor 0 como traslación simbólica.

$$H_S(v_{ij}) = \{s_r, s_{r+1}, \dots, s_t\}, \quad s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0),$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

Una vez obtenidos los valores 2-tupla, se agregan mediante el operador de agregación 2-tupla seleccionado en la fase anterior  $\varphi$ .

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij})) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\} \quad (5.2)$$

- En el segundo proceso de agregación, los valores colectivos de los criterios se agregan para obtener un valor colectivo para cada alternativa  $v_{C_i}$ , utilizando un operador de agregación  $\phi$ , que puede ser igual que el anterior  $\varphi$ , o diferente.

$$v_{C_i} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (5.3)$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

ii) *Explotación*

Una vez obtenido un valor colectivo para cada alternativa representado mediante un valor 2-tupla, se utiliza la operación de comparación 2-tupla para ordenar el conjunto de alternativas y seleccionar la mejor de ellas.

A continuación presentamos un algoritmo que describe el modelo de toma de decisiones multicriterio basado en 2-tupla.

Supongamos un problema de toma de decisiones multicriterio donde cada alternativa  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  está definida por un conjunto de criterios  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  que pueden ser valorados mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas complejas.

1. Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .
3. Recoger las valoraciones proporcionadas  $v_{ij}$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$  y  $j = \{1, \dots, m\}$ .
4. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

4.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$E_{G_H}(v_{ij}) = H_S(v_{ij})$$

FIN PARA

FIN PARA

5. Seleccionar dos operadores de agregación de información lingüística  $\varphi$  y  $\phi^*$ .
6. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

6.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

6.1.1 Para cada término lingüístico del CTLDD ( $s_r$ ), HACER

$$s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0)$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

7. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

7.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij})) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\}$$

FIN PARA

FIN PARA

---

\*Estos dos operadores podrían ser los mismos.

---

8. PARA cada alternativa  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

$$v_{C_i} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})) \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

FIN PARA

9. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X = \max_{x_i \in X} \{(s_r, \alpha)\}$$

## 5.4. Ejemplo Ilustrativo de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico Multicriterio

En esta sección se define un problema de toma de decisiones lingüístico multicriterio que será resuelto con los dos modelos propuestos. Finalmente analizaremos los resultados obtenidos con ambos modelos.

### Definición de un Problema de Toma de Decisiones Lingüístico Multicriterio

Consideremos el director de una compañía que quiere seleccionar un distribuidor de materiales para comprar componentes de un nuevo producto. Después de realizar un análisis de los distintos distribuidores ha considerado 4 como candidatos  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  siendo los criterios a considerar,  $C = \{c_1 = \text{calidad}, c_2 = \text{precio}, c_3 = \text{prestigio}, c_4 = \text{velocidad de reparto}\}$ . Para el director de la empresa no es fácil proporcionar todas las valoraciones mediante términos lingüísticos simples debido a la falta de información y conocimiento sobre algunos criterios. Por tanto, en caso de dudar entre varios términos lingüísticos puede utilizar expresiones lingüísticas comparativas.

### 5.4.1. Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en Max-Min

Para resolver el problema de toma de decisiones definido previamente con el modelo de toma de decisiones basado en Max-Min seguiremos los pasos del algoritmo definido para el modelo.

1. *Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .*

En problemas de toma de decisiones multicriterio cada valoración  $v_{ij}$ , representa la preferencia de la alternativa  $x_i$  respecto del criterio  $c_j$ . Un conjunto de términos lingüísticos apropiado para resolver este problema puede ser  $S = \{Nada(N), Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), A(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$ .

2. *Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .*

La gramática libre de contexto  $G_H$ , definida en el capítulo 3 genera expresiones lingüísticas comparativas cercanas al lenguaje natural utilizado por los expertos para expresar sus valoraciones en problemas de toma de decisiones multicriterio.

3. *Recoger las valoraciones proporcionadas.*

Las valoraciones aportadas por el director de la empresa sobre el conjunto de criterios definido para cada alternativa son mostradas en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3: Valores de preferencia

	<i>Criterios</i>			
<i>Alt.</i>	<i>Calidad</i>	<i>Precio</i>	<i>Prestigio</i>	<i>Velocidad de reparto</i>
$x_1$	$A$	entre A y MA	$A$	menor que M
$x_2$	entre A y MA	$A$	mayor que A	B
$x_3$	$M$	entre B y M	M	como mucho B
$x_4$	$B$	$A$	entre A y MA	$A$

4. Las valoraciones aportadas por el director de la empresa son transformadas en CTLDD mediante la función de transformación  $E_{G_H}$ . La Tabla 5.4 muestra las expresiones lingüísticas comparativas y términos lingüísticos simples transformados en CTLDD.

5. *Seleccionar dos operadores de agregación de información lingüística.*

En este problema de toma de decisiones multicriterio se utilizarán los operadores *min\_upper* y *max\_lower* definidos para agregar CTLDD.

Tabla 5.4: Transformación de las valoraciones

	<i>Criterios</i>			
<i>Alt.</i>	<i>Calidad</i>	<i>Precio</i>	<i>Prestigio</i>	<i>Velocidad de reparto</i>
$x_1$	{A}	{A, MA}	{A}	{N, MB, B}
$x_2$	{A, MA}	{A}	{MA, P}	{B}
$x_3$	{M}	{B, M}	{M}	{N, MB, B}
$x_4$	{B}	{A}	{A, MA}	{A}

6. Para agregar el conjunto de criterios definidos para cada alternativa se utilizan los operadores seleccionados en la fase anterior. El resultado será un valor colectivo pesimista y otro optimista para cada alternativa.

Operador *min\_upper*

Este operador simbólico obtiene el menor de los términos lingüísticos máximos.

- En primer lugar aplicamos el operador upper bound a cada criterio representado mediante CTLDD (ver Tabla 5.5).

Tabla 5.5: Resultados obtenidos con upper bound para cada valoración

	<i>Criterios</i>			
<i>Alt.</i>	<i>Calidad</i>	<i>Precio</i>	<i>Prestigio</i>	<i>Velocidad de reparto</i>
$x_1$	{A}	{MA}	{A}	{B}
$x_2$	{MA}	{A}	{P}	{B}
$x_3$	{M}	{M}	{M}	{B}
$x_4$	{B}	{A}	{MA}	{A}

- A continuación para cada alternativa se selecciona el menor término lingüístico. La Tabla 5.6 muestra los resultados obtenidos para cada alternativa.

Tabla 5.6: Mínimo término lingüístico para cada alternativa

<i>Alternativas/<math>H_{S_{min}^+}(x_i)</math></i>			
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\{B\}$	$\{B\}$	$\{B\}$	$\{B\}$

Operador *max\_lower*

Este operador simbólico funciona a la inversa que el anterior, es decir, devuelve el mayor de los términos lingüísticos mínimos.

- Se aplica el operador lower bound a cada valoración representada mediante CTLDD. Los resultados se muestran en la Tabla 5.7.

Tabla 5.7: Resultados obtenidos con lower bound para cada valoración

	<i>Criterios</i>			
<i>Alt.</i>	<i>Calidad</i>	<i>Precio</i>	<i>Prestigio</i>	<i>Velocidad de reparto</i>
$x_1$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{N\}$
$x_2$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{MA\}$	$\{B\}$
$x_3$	$\{M\}$	$\{B\}$	$\{M\}$	$\{N\}$
$x_4$	$\{B\}$	$\{A\}$	$\{A\}$	$\{A\}$

- Se selecciona el máximo término lingüístico para cada alternativa (ver Tabla 5.8).

Tabla 5.8: Máximo término lingüístico para cada alternativa

<i>Alternativas/<math>H_{S_{max}^-}(x_i)</math></i>			
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\{A\}$	$\{MA\}$	$\{M\}$	$\{A\}$

7. Construir un intervalo lingüístico para cada alternativa utilizando los términos lingüísticos colectivos obtenidos en la fase anterior, donde el límite izquierdo del intervalo será el mínimo término lingüístico y el límite derecho
-

el máximo. La Tabla 5.9 muestra los intervalos que representan cada alternativa.

Tabla 5.9: Intervalos lingüísticos de las alternativas

<i>Alternativas/v<sup>R</sup></i>			
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
[B, A]	[B, MA]	[B, M]	[B, A]

8. Construir una la relación de preferencia entre alternativas  $P_D$ .

$$P_D = \begin{pmatrix} - & 0.4 & 0.67 & 0.5 \\ 0.6 & - & 0.75 & 0.6 \\ 0.33 & 0.25 & - & 0.33 \\ 0.5 & 0.4 & 0.67 & - \end{pmatrix}$$

$$P(x_1 > x_2) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_5))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_5) - \text{Ind}(s_2))} = 0.4$$

$$P(x_2 > x_1) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_5) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_5) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.6$$

$$P(x_1 > x_3) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_3))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2))} = 0.67$$

$$P(x_3 > x_1) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.33$$

9. Calcular la matriz de dominancia.

$$P_D^S = \begin{pmatrix} - & 0 & 0.33 & 0 \\ 0.2 & - & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & 0.33 & - \end{pmatrix}$$

10. Aplicar un grado de selección de no dominancia para cada alternativa.

$$NDD_1 = 0.8, NDD_2 = 1, NDD_3 = 0.5, NDD_4 = 0.8$$

donde  $NDD_1$  se obtiene mediante el siguiente cálculo,

$$NDD_1 = \min\{(1 - 0.2), (1 - 0), (1 - 0)\} = 0.8$$

11. *Seleccionar la mejor alternativa,*

$$X^{ND} = \max\{NDD_1, NDD_2, NDD_3, NDD_4\} = NDD_2,$$

Por tanto, el distribuidor de materiales seleccionado es  $\mathbf{x}_2$

#### **5.4.2. Resolución utilizando el Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla**

A continuación se resuelve el mismo problema de toma de decisiones multicriterio utilizando el modelo de toma de decisiones multicriterio basado en 2-tupla. Dado que las 4 primeras fases de este modelo son iguales a las del modelo basado en Max-Min, nos centraremos en las dos últimas fases del modelo *Selección de un operador de agregación de información lingüística* y *Selección de la mejor alternativa*.

5. *Selección de dos operadores de agregación de información lingüística.*

La agregación de las valoraciones se realiza mediante un doble proceso de agregación en el que los operadores de agregación pueden ser los mismos o diferentes. En este problema de toma de decisiones, para agregar los términos lingüísticos de cada CTLDD se utiliza el operador de agregación OWA [164], en el que el vector de pesos se calcula siguiendo el enfoque explicado en [50].

En el segundo proceso de agregación se utiliza el mismo operador de agregación asignando pesos a los criterios. Supongamos en este caso que todos los criterios tienen el mismo peso, por tanto el vector de pesos es  $W = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)$ .

6. Los términos lingüísticos de los CTLDD son convertidos en valores 2-tupla añadiendo el valor 0 como traslación simbólica. Los resultados obtenidos son mostrados en la Tabla 5.10.

---

Tabla 5.10: Conversión de términos lingüísticos a 2-tupla

Alt.	Criterios			
	Calidad	Precio	Prestigio	Velocidad de reparto
$x_1$	$\{(A, 0)\}$	$\{(A, 0), (MA, 0)\}$	$\{(A, 0)\}$	$\{(N, 0), (MB, 0), (B, 0)\}$
$x_2$	$\{(A, 0), (MA, 0)\}$	$\{(A, 0)\}$	$\{(MA, 0), (P, 0)\}$	$\{(B, 0)\}$
$x_3$	$\{(M, 0)\}$	$\{(B, 0), (M, 0)\}$	$\{(M, 0)\}$	$\{(N, 0), (MB, 0), (B, 0)\}$
$x_4$	$\{(B, 0)\}$	$\{(A, 0)\}$	$\{(A, 0), (MA, 0)\}$	$\{(A, 0)\}$

7. Se agregan los valores 2-tupla de cada criterio mediante el operador OWA para obtener un valor colectivo para cada criterio (ver Tabla 5.11). El vector de pesos  $W$  dependerá de los términos lingüísticos a agregar.

Tabla 5.11: Agregación de los valores 2-tupla de cada criterio

Alt.	Criterios			
	Calidad	Precio	Prestigio	Velocidad de reparto
$x_1$	$(A, 0)$	$(MA, -.5)$	$(A, 0)$	$(MB, -.22)$
$x_2$	$(MA, -.5)$	$(A, 0)$	$(P, -.33)$	$(B, 0)$
$x_3$	$(M, 0)$	$(M, -.5)$	$(M, 0)$	$(MB, -.22)$
$x_4$	$(B, 0)$	$(A, 0)$	$(MA, -.5)$	$(A, 0)$

Para agregar el valor de la alternativa 1 respecto del criterio 4  $v_{C_{14}}$ , se realiza el siguiente cálculo.

- Se calcula el valor de  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{i - 1}{g} = \frac{2}{6}$$

- Se obtienen los pesos de los términos lingüísticos que se van a agregar.

$$w_1 = 0.33, \quad w_2 = 0.22, \quad w_3 = 0.45$$

- Se aplica el operador de agregación OWA.

$$v_{C_{14}} = \Delta(\Delta^{-1}(B, 0) * 0.33 + \Delta^{-1}(MB, 0) * 0.22 + \Delta^{-1}(N, 0) * 0.45) = (MB, -.22)$$

8. Se agrega el conjunto de criterios definido para cada alternativa mediante el operador OWA cuyo vector de pesos es  $W = (.25, .25, .25, .25)$ . La Tabla 5.12 muestra los valores colectivos obtenidos para cada alternativa.

Tabla 5.12: Valores colectivos para cada alternativa

<i>Alt./v<sub>C<sub>i</sub></sub></i>			
<i>x<sub>1</sub></i>	<i>x<sub>2</sub></i>	<i>x<sub>3</sub></i>	<i>x<sub>4</sub></i>
( <i>M</i> , .35)	( <i>A</i> , .05)	( <i>B</i> , .35)	( <i>A</i> , -.37)

donde el valor  $v_{C_1}$  se obtiene como sigue,

$$v_{C_1} = \Delta(\Delta^{-1}(A, 0)*0.25 + \Delta^{-1}(MA, -.5)*0.25 + \Delta^{-1}(A, 0)*0.25 + \Delta^{-1}(MB, -.22)*0.25) = (M, .35)$$

9. Para seleccionar la mejor alternativa se utiliza la operación máximo definido para la 2-tupla.

$$x = \max\{(M, .35), (A, .05), (B, .35), (A, -.37)\} = (A, .05)$$

Por tanto, la mejor alternativa (distribuidor) es  $\mathbf{x_2 = (A, .05)}$

En este ejemplo podemos observar que aunque la alternativa seleccionada utilizando ambos modelos ha sido la misma  $x_2$ , en el modelo basado en max-min, las alternativas  $x_1$  y  $x_4$  tienen el mismo valor, mientras que con el modelo basado en 2-tupla, la alternativa  $x_4$  tiene un valor mayor que la alternativa  $x_1$ . Además, los procesos computacionales realizados con el modelo basado en 2-tupla son más simples, y el resultado final que se obtiene con dicho modelo es un valor lingüístico asociado a la mejor alternativa.

En los modelos de toma de decisiones multicriterio presentados, sólo puede participar un experto, sin embargo en problemas más complejos se necesita la participación de varios expertos que aporten sus valoraciones sobre los criterios de cada alternativa. A continuación, se introduce un modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto donde los expertos utilizan vectores de preferencia para expresar sus valoraciones.

### 5.5. Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio Multiexperto con Expresiones Lingüísticas Comparativas basado en 2-Tupla

En esta sección se presenta un modelo de toma de decisiones multicriterio en el que participan multiples expertos que pueden aportar sus valoraciones mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas. Para realizar los procesos computacionales se utiliza el modelo de representación lingüístico 2-tupla, ya que computacionalmente es simple, eficiente y obtiene resultados precisos y fáciles de entender.

El modelo consta de 6 fases como muestra la Figura 5.4, de las cuales 5 son iguales a las del modelo multicriterio basado en 2-tupla introducido en la sección 5.3, por tanto nos centraremos en la última fase del modelo, *Selección de la mejor alternativa*.

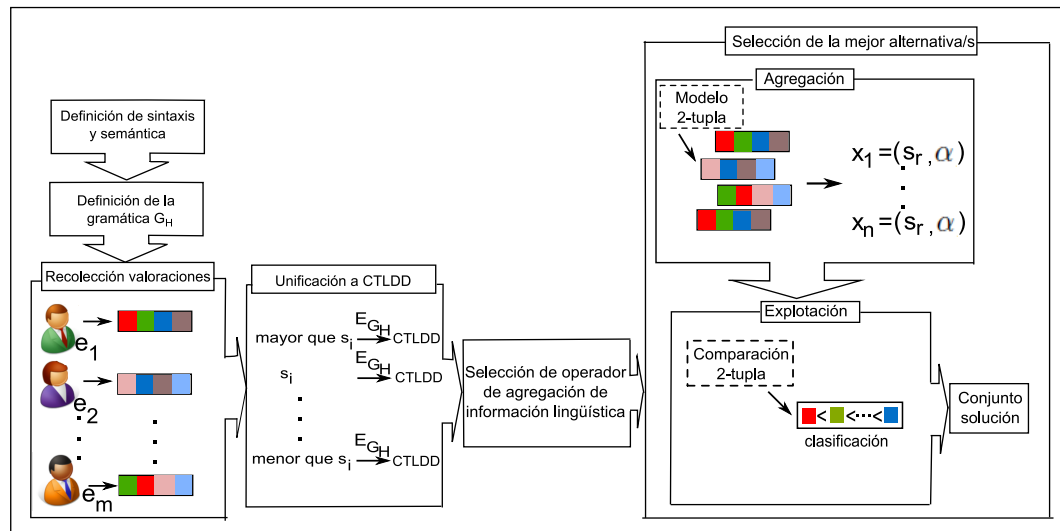


Figura 5.4: Modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla

Supongamos un conjunto de criterios  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , definido para cada alternativa  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , que pueden ser valorados por un conjunto de expertos  $E = \{e_1, \dots, e_l\}$ , mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas

comparativas.

6. *Selección de la mejor alternativa.*

Esta fase selecciona el conjunto solución de alternativas al problema de toma de decisiones y se divide en dos pasos: (i) *Agregación* y (ii) *Explotación*.

i) *Agregación de la información lingüística*

Los vectores de preferencia proporcionados por los expertos se agregan para obtener un valor colectivo para cada alternativa. Dado que las valoraciones han sido unificadas en CTLDD se realiza un triple proceso de agregación tal y como muestra la Figura 5.5.

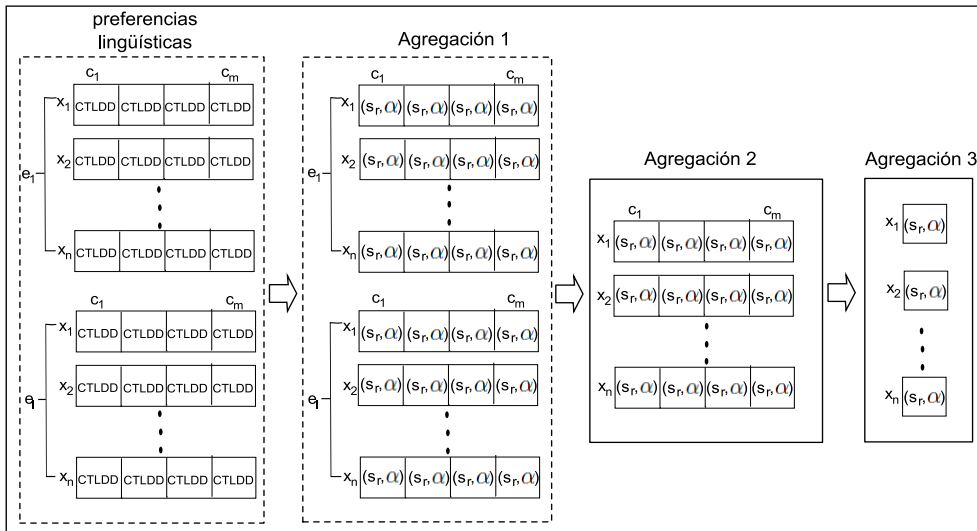


Figura 5.5: Esquema de triple proceso de agregación

- En el primer proceso de agregación se agregan los términos lingüísticos de cada CTLDD para obtener la preferencia de las expresiones mediante valores 2-tuplas. Para ello, cada término lingüístico se convierte en un valor 2-tupla añadiendo un valor 0 como traslación simbólica.

$$H_S(v_{ij}^k) = \{s_r, s_{r+1}, \dots, s_t\}, \quad s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0),$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  y  $k \in \{1, \dots, l\}$ .

Una vez obtenidos los valores 2-tupla, se agregan utilizando el operador de agregación 2-tupla  $\varphi$ , seleccionado anteriormente

$$v_{C_{ij}}^k = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^k)) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\}$$

- En el segundo proceso de agregación se agregan los valores de los criterios de cada experto para obtener un valor colectivo para cada criterio. El operador de agregación  $\phi$  puede ser igual que el anterior  $\varphi$ , o diferente.

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^k)) \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$  y  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

- El último proceso de agregación consiste en agregar los criterios colectivos de cada alternativa  $v_{C_{ij}}$ , mediante un operador de agregación  $\theta$ , para obtener un valor colectivo para cada alternativa  $v_{C_i}$ .

$$v_{C_i} = \Delta(\theta(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

donde  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

ii) *Explotación*

Una vez que se ha obtenido un valor colectivo para cada alternativa  $v_{C_i}$ , representado mediante un valor 2-tupla, se utiliza la operación de comparación definida para la 2-tupla [67], para ordenar el conjunto de alternativas y seleccionar la mejor de ellas.

El algoritmo que describe el modelo de toma de decisiones multicriterio multi-experto es el siguiente.

1. Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .
2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .
3. Recoger las valoraciones proporcionadas  $v_{ij}^k$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ ,  $j = \{1, \dots, m\}$  y  $k = \{1, \dots, l\}$ .
4. PARA cada experto  $k = \{1, \dots, l\}$  HACER

4.1 PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

4.1.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$E_{GH}(v_{ij}^k) = H_S^k(v_{ij})$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

5. Selección de tres operadores de agregación de información lingüística  $\varphi$ ,  $\phi$  y  $\theta^*$ .

6. PARA cada experto  $k = \{1, \dots, l\}$  HACER

6.1 PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

6.1.1 Para cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

6.1.1.1 Para cada término lingüístico del CTLDD ( $s_r$ ), HACER

$$s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0)$$

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

FIN PARA

7. PARA cada experto  $k = \{1, \dots, l\}$  HACER

7.1 PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

7.1.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$v_{C_{ij}}^k = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^k)) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\}$$

FIN PARA

FIN PARA

---

\*Estos tres operadores podrían ser los mismos.

---

FIN PARA

8. PARA cada fila  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

8.1 PARA cada columna  $j = \{1, \dots, m\}$  HACER

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^k)) \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}$$

FIN PARA

FIN PARA

9. PARA cada alternativa  $i = \{1, \dots, n\}$  HACER

$$v_{C_i} = \Delta(\theta(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

FIN PARA

10. Seleccionar la mejor alternativa.

$$X = \max_{x_i \in X} \{(s_r, \alpha)\}$$



## Capítulo 6

# Aplicación del Modelo de Toma de Decisiones Multicriterio Multiexperto: Evaluación de Riesgo Nuclear

Tal y como se indicó en la motivación de esta memoria de investigación, una de las razones de mejorar la flexibilidad de la elicitación de información lingüística era porque en la evaluación de riesgo nuclear aparecían valores perdidos cuando los inspectores de la IAEA dudaban entre varios términos lingüísticos para valorar determinados indicadores, y necesitaban expresiones lingüísticas más elaboradas que términos lingüísticos simples. Para solventar este problema, en este capítulo resolvemos el problema de evaluación de riesgo nuclear mediante el modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto (TDMC-ME) con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla definido en el capítulo 5.

En primer lugar se introduce brevemente el problema de evaluación de riesgo nuclear, y posteriormente se resuelve dicho problema siguiendo el algoritmo definido para el modelo TDMC-ME con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla.

## 6.1. Descripción del Problema de Evaluación de Riesgo Nuclear

Antes de introducir el problema, queremos indicar que los datos utilizados para la definición del problema son datos reales que fueron proporcionados por el profesor Da Ruan, quien trabajaba en SCK•CEN, (centro de investigación nuclear) en Mol, Bélgica.

Consideremos un proceso específico de evaluación que evalúa la posibilidad de que se esté llevando a cabo un “proceso de enriquecimiento por difusión gaseoso” dentro de la evaluación de la producción de uranio altamente enriquecido.

La Tabla 6.1 muestra el conjunto de indicadores (criterios) agrupados por su tipo (fuerte, medio y débil), que se utilizan en este proceso de evaluación. El vector de pesos proporcionado para los indicadores es  $W_{ind} = (9, 3, 1)$ .

En nuestro ejemplo, en este proceso de evaluación participan 4 inspectores  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  cuya importancia viene dada por el siguiente vector de pesos  $W_{exp} = (3, 5, 4, 2)$ . Los inspectores pueden expresar sus valoraciones mediante términos lingüísticos simples, o en caso de dudar entre varios de ellos, mediante expresiones lingüísticas comparativas.

Para resolver el problema de toma de decisiones multicriterio multiexperto planteado se siguen los pasos del algoritmo definido para tal modelo.

## 6.2. Algoritmo de Resolución

1. *Definir la semántica y sintaxis del conjunto de términos lingüísticos  $S$ .*

En este problema de toma de decisiones multicriterio multiexperto, cada valoración  $v_i^k$ , representa la preferencia del inspector  $k$  sobre el indicador  $i$ .

Un conjunto de términos lingüístico apropiado para resolver este problema podría ser el siguiente,

$$S = \{Nada(N), Muy\ Bajo(MB), Bajo(B), Medio(M), A(A), Muy\ Alto(MA), Perfecto(P)\}$$


---

Tabla 6.1: Descripción de los indicadores

Indicador	Descripción	Tipo
1	Compresor for pure UF6	Fuerte
2	Gaseous diffusion barrier	
3	Heat exchanger for cooling pure UF6	
4	Diffuser housing/vessel	Medio
5	Gas blower for UF6	
6	Rotary shaft seal	
7	Special control value (large aperture)	
8	Special shut-off value (large aperture)	
9	Chlorine trifluoride	
10	Nickel powder, high purity	
11	Gasket, large	Débil
12	Feed system/product and tails withdrawal	
13	Expansion bellows	
14	Header piping system	
15	Vacuum system and pump	
16	Aluminum oxide powder	
17	Nickel powder	
18	PTFE (teflon)	
19	Large electrical switching yard	
20	Large heat increase in air or water	
21	Larger specific power consumption	
22	Larger cooling requirements (towers)	

2. Definir la gramática libre de contexto  $G_H$ .

Las expresiones lingüísticas comparativas generadas por la gramática libre de contexto  $G_H$ , definida en el capítulo 3 son adecuadas para expresar valoraciones sobre el conjunto de indicadores. Por tanto, la gramática libre de contexto  $G_H$  será:

$$V_N = \{ \langle \text{término primario} \rangle, \langle \text{término compuesto} \rangle, \langle \text{relación unaria} \rangle, \langle \text{relación binaria} \rangle, \langle \text{conjunción} \rangle \}$$

$$V_T = \{\text{menor que, mayor que, al menos, como mucho, entre, y, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$$

$$I \in V_N$$

$$P = \{I ::= \langle \text{término primario} \rangle | \langle \text{término compuesto} \rangle\}$$

$$\langle \text{término compuesto} \rangle ::= \langle \text{relación unaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle |$$

$$\langle \text{relación binaria} \rangle \langle \text{término primario} \rangle \langle \text{conjunción} \rangle \langle \text{término primario} \rangle$$

$$\langle \text{término primario} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g$$

$$\langle \text{relación unaria} \rangle ::= \text{menor que} | \text{mayor que} | \text{al menos} | \text{como mucho}$$

$$\langle \text{relación binaria} \rangle ::= \text{entre}$$

$$\langle \text{conjunción} \rangle ::= \text{y}$$

3. *Recoger las valoraciones proporcionadas.*

Las valoraciones aportadas por los inspectores sobre el conjunto de indicadores son mostradas en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: Valoraciones proporcionadas sobre los indicadores

Indicador	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	A	B	A	P
2	al menos MA	MA	entre A y MA	al menos MA
3	MA	M	P	P
4	M	M	MA	A
5	M	entre MB y B	M	mayor que A
6	A	M	MA	M
7	como mucho B	B	MA	MA
8	P	menor que B	mayor que A	MA
9	M	B	MA	A
10	B	B	M	A
11	menor que B	M	MA	entre M y A
12	MB	entre B y M	B	A
13	P	P	P	al menos A
14	MA	M	P	A
15	entre B y M	como mucho B	menor que B	como mucho B
16	B	B	B	M
17	A	M	mayor que A	entre A y MA
18	M	M	M	B
19	entre B y M	al menos MA	MA	MA
20	P	M	P	A
21	A	M	MA	P
22	entre B y M	MB	B	como mucho B

#### 4. Unificación a CTLDD

Las valoraciones proporcionadas por los inspectores mediante términos lingüísticos simples y expresiones lingüísticas comparativas son unificadas en CTLDD mediante la función de transformación  $E_{GH}$  definida en el capítulo 3, (ver Tabla 6.3).

Tabla 6.3: Valoraciones unificadas en CTLDD

Indicador	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	{A}	{B}	{A}	{P}
2	{MA,P}	{MA}	{A,MA}	{MA,P}
3	{MA}	{M}	{P}	{P}
4	{M}	{M}	{MA}	{A}
5	{M}	{MB,B}	{M}	{MA,P}
6	{A}	{M}	{MA}	{M}
7	{N,MB,B}	{B}	{MA}	{MA}
8	{P}	{N,MB}	{MA,P}	{MA}
9	{M}	{B}	{MA}	{A}
10	{B}	{B}	{M}	{A}
11	{N,MB}	{M}	{MA}	{M,A}
12	{MB}	{B,M}	{B}	{A}
13	{P}	{P}	{P}	{A,MA,P}
14	{MA}	{M}	{P}	{A}
15	{B,M}	{N,MB,B}	{N,MB}	{N,MB,B}
16	{B}	{B}	{B}	{M}
17	{A}	{M}	{MA,P}	{A,MA}
18	{M}	{M}	{M}	{B}
19	{B,M}	{MA,P}	{MA}	{MA}
20	{P}	{M}	{P}	{A}
21	{A}	{M}	{MA}	{P}
22	{B,M}	{MB}	{B}	{N,MB,B}

5. *Selección de tres operadores de agregación de información lingüística.*

Sin pérdida de generalidad, los operadores de agregación utilizados en la fase de agregación serán, el operador OWA para agregar los términos lingüísticos de los CTLDD. El vector de pesos es calculado según el enfoque de Filev y Yager [50]. Para agregar los indicadores e inspectores se utiliza la media ponderada según los pesos proporcionadas en la definición del problema. Estos pesos serán normalizados entre [0,1].

6. *Transformación a 2-tupla*

Las valoraciones son transformadas a 2-tupla para realizar los procesos computacionales en la agregación.

7. *Agregación, paso 1.*

La Tabla 6.4 muestra el resultado de la agregación de los términos lingüísticos de los CTLDD mediante el operador OWA. Los resultados están representados mediante valores 2-tupla.

Para obtener el valor  $v_2^1 = (P, -.17)$  en primer lugar se calcula el peso de cada término lingüístico del CTLDD. Para ello se utiliza el enfoque propuesto por Filev y Yager.

$$\alpha = \frac{i}{g} = \frac{5}{6}$$
$$w_1 = \alpha = \frac{5}{6} \quad w_2 = (1 - \alpha) = \frac{1}{6}$$

Una vez obtenidos los pesos, se aplica el operador OWA al CTLDD.

$$v_{C_2}^1 = \Delta(\frac{5}{6} * \Delta^{-1}(P, 0) + \frac{1}{6} * \Delta^{-1}(A, 0)) = (P, -.17)$$

Tabla 6.4: Resultado de agregar los términos de los CTLDD

Indicador	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	(A,0)	(B,0)	(A,0)	(P,0)
2	(P,-.17)	(MA,0)	(MA,-.5)	(P,-.17)
3	(MA,0)	(M,0)	(P,0)	(P,0)
4	(M,0)	(M,0)	(MA,0)	(A,0)
5	(M,0)	(B,-.5)	(M,0)	(P,-.17)
6	(A,0)	(M,0)	(MA,0)	(M,0)
7	(MB,-.11)	(B,0)	(MA,0)	(MA,0)
8	(P,0)	(N,.17)	(P,-.17)	(MA,0)
9	(M,0)	(B,0)	(MA,0)	(A,0)
10	(B,0)	(B,0)	(M,0)	(A,0)
11	(N,.17)	(M,0)	(MA,0)	(A,-.5)
12	(MB,0)	(M,-.5)	(B,0)	(A,0)
13	(P,0)	(P,0)	(P,0)	(MA,.11)
14	(MA,0)	(M,0)	(P,0)	(A,0)
15	(M,-.5)	(MB,-.11)	(N,.17)	(MB,-.11)
16	(B,0)	(B,0)	(B,0)	(M,0)
17	(A,0)	(M,0)	(P,-.17)	(MA,-.5)
18	(M,0)	(M,0)	(M,0)	(B,0)
19	(M,-.5)	(P,-.17)	(MA,0)	(MA,0)
20	(P,0)	(M,0)	(P,0)	(A,0)
21	(A,0)	(M,0)	(MA,0)	(P,0)
22	(M,-.5)	(MB,0)	(B,0)	(MB,-.11)}

## 8. Agregación, paso 2.

En el segundo proceso de agregación se agregan los valores de los indicadores de cada inspector obteniendo un valor colectivo para cada indicador  $v_{C_i}$ . El operador utilizado es la media ponderada y el vector de pesos de los inspectores es  $W_{exp} = (3, 5, 4, 2)$ . La Tabla 6.5 muestra los valores colectivos de los indicadores.

Tabla 6.5: Valores colectivos de los indicadores

Indicador	$v_{C_i}$
1	(A,-.43)
2	(MA,.15)
3	(MA,-.29)
4	(A,-.29)
5	(M,-.13)
6	(A,-.21)
7	(M,.05)
8	(A,-.27)
9	(M,.36)
10	(M,-.43)
11	(M,.04)
12	(B,.25)
13	(P,-.13)
14	(A,.43)
15	(MB,.03)
16	(B,.14)
17	(A,.24)
18	(M,-.14)
19	(MA,-.24)
20	(MA,-.36)
21	(A,.21)
22	(B,-.41)

El valor  $v_{C_1}$  es obtenido como sigue,

$$v_{C_1} = \Delta\left(\frac{3*\Delta^{-1}(A,0)+5*\Delta^{-1}(B,0)+4*\Delta^{-1}(A,0)+2*\Delta^{-1}(P,0)}{3+5+4+2}\right) = (A, -.43)$$

9. *Agregación, paso 3.*

En el último proceso de agregación se agregan los valores colectivos de los indicadores para obtener un valor global de evaluación del proceso “enriquecimiento por difusión gaseoso”. El operador utilizado es también la media

ponderada con el vector de pesos proporcionado  $W_{ind} = (9, 3, 1)$ .

Finalmente, el valor global obtenido es,  $V_{global} = (A, -.15)$ .

El valor global obtenido indica que la posibilidad de que se esté llevando a cabo un *proceso de enriquecimiento por difusión gaseoso* es casi alto.

---

## Capítulo 7

# Aplicación Software de Apoyo a la Toma de Decisiones

En este capítulo se presenta la integración de un módulo denominado *Hesitant*, para manejar expresiones lingüísticas comparativas y CTLDD, en una aplicación de apoyo a la toma de decisiones llamada *Multicriteria Decision Analysis with Computing with Words* (MCDACW), desarrollada por el grupo de investigación *Sistemas Inteligentes Basados en Análisis de Decisión Difusos (SINBAD<sup>2</sup>)*.

Para ello, en primer lugar se describe la arquitectura de MCDACW, y a continuación se describe la funcionalidad del módulo *Hesitant*, utilizando para ello un módulo específico desarrollado para el problema de evaluación de riesgo nuclear definido en el capítulo 6.

### 7.1. Arquitectura de la Aplicación MCDACW

La arquitectura que se ha utilizado para desarrollar la aplicación MCDACW, ha sido la plataforma Rich Client Platform (RCP) [111]. RCP es una tecnología que permite seleccionar el conjunto de componentes y módulos más adecuados y los acopla a una funcionalidad particular para construir una aplicación de escritorio completa.

Existen distintas alternativas para desarrollar una aplicación RCP tales como: Eclipse RCP, Netbeans platform y Spring framework. Para desarrollar MCDACW se ha optado por Eclipse RCP [111]. Eclipse RCP utiliza OSGi [1] como mecanismo

de modularidad y extensión. Además, dispone de una gran cantidad de información y de una comunidad muy amplia que le da soporte.

La aplicación está basada en 4 tipos de módulos básicos:

- *Bibliotecas*: Son los módulos que proporcionan el soporte para la toma de decisiones.
- *GUI*: Son los módulos que forman la interfaz de la aplicación.
- *Métodos*: Son plugins Eclipse que permiten resolver distintos problemas de toma de decisiones.
- *Operadores*: Son plugins Eclipse que implementan distintos operadores de agregación.

La interfaz de la aplicación se divide principalmente en 3 perspectivas que a continuación se revisan brevemente:

- *Framework*: Es la ventana principal que se muestra al ejecutar la aplicación y donde se define el problema de toma de decisiones. Aquí es donde se crean los expertos que participan en el problema, el conjunto de alternativas y el conjunto de criterios. También se define el dominio de información que se va a utilizar y se asigna dicho dominio a cada experto, alternativa o criterio.
- *Gathering*: En esta ventana se introducen la valoraciones de los expertos.
- *Rating*: Esta ventana permite seleccionar el modelo de toma de decisiones que se va a utilizar para la resolución del problema. Tiene distintas pestañas dependiendo de las fases que tenga el modelo de toma de decisiones.

## 7.2. Funcionalidad del Módulo Hesitant

MCDACW es una aplicación de escritorio desarrollada para dar soporte en la resolución de problemas de toma de decisiones. De los distintos módulos que integra, nosotros nos centraremos en el funcionamiento del módulo Hesitant, que permite manejar expresiones lingüísticas comparativas y CTLDD. Actualmente el módulo implementa el modelo de toma de decisiones multicriterio basado en

---

max-min y el modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto basado en 2-tupla, ambos presentados en el capítulo 5.

A continuación, se muestra la funcionalidad del módulo Hesitant, utilizando para ello el problema de toma de decisiones multicriterio multiexperto de evaluación de riesgo nuclear definido en el capítulo 6.

Como se ha comentado en la sección anterior, la interfaz se divide en tres perspectivas.

- *Framework*

En primer lugar se define el marco de trabajo del problema en el que se introduce el conjunto de expertos, el conjunto de alternativas (en este caso sólo una) y el conjunto de criterios, agrupados según su tipo: Fuerte, Medio y Débil (ver Fig.7.1).

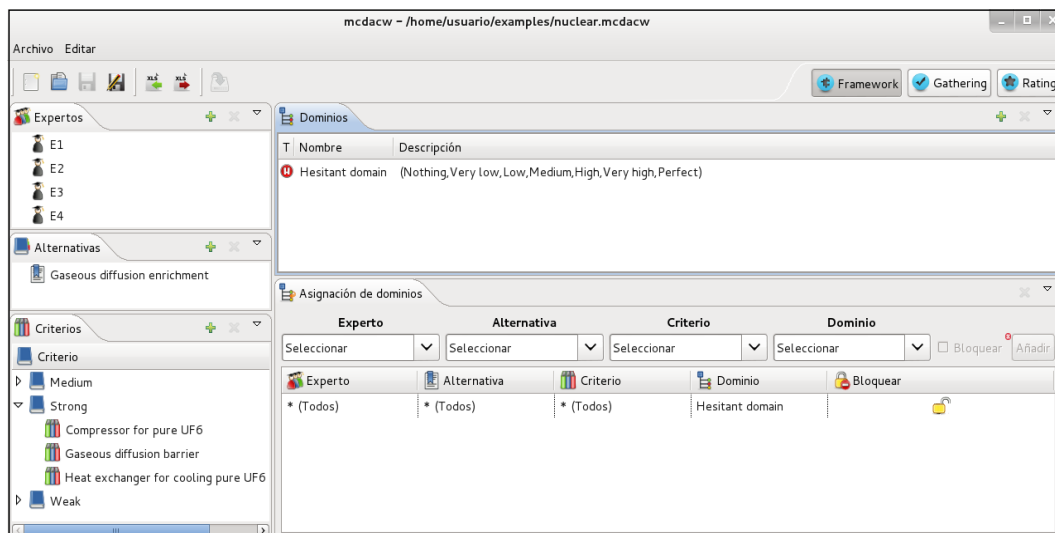


Figura 7.1: Definición del marco de trabajo

A continuación se define el dominio de información que se va a utilizar para proporcionar las valoraciones (ver Fig. 7.2) y se asigna dicho dominio a cada experto.

Tipo de dominio  
Nuevo dominio. Selecciona tipo de dominio

Nombre del dominio  
Hesitant

Selecciona tipo de dominio

Dominio numérico

Dominio intervalar numérico

Dominio lingüístico

Dominio hesitant

Dominio no balanceado

Seleccionar el modo de generar el dominio hesitant

Dominio hesitant autogenerado

Generar dominio hesitant manualmente

< Back   Next >   Cancel   Finish

Figura 7.2: Selección del dominio de información

■ *Gathering*

En esta ventana se introducen las valoraciones de los expertos para cada criterio. Como se puede observar en la Figura 7.3, en la parte inferior de la ventana se muestra la sintaxis y semántica del conjunto de términos lingüísticos  $S$ , y el tipo de valoraciones que se pueden introducir:

- *Primaria*: son los términos lingüísticos simples.
- *Compuesta*: son las expresiones lingüísticas comparativas generadas por la gramática libre de contexto  $G_H$ , que a su vez se dividen en *Unaria*, aquellas expresiones que utilizan un único término lingüístico y *Binaria*, las que utilizan dos términos lingüísticos.

Dependiendo del tipo de valoración seleccionado, los elementos de la lista desplegable son distintos.

---

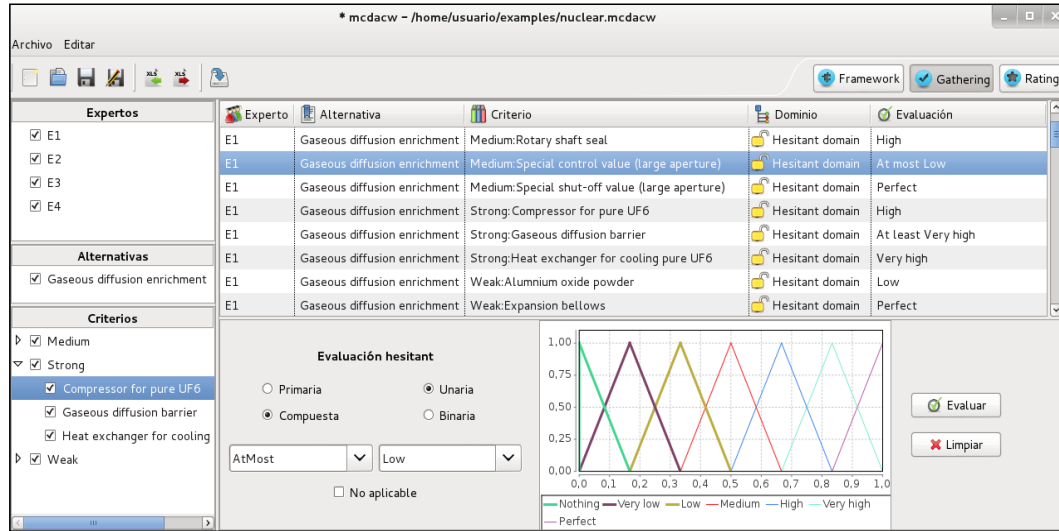


Figura 7.3: Recolección de las valoraciones

### ■ Ratings

Una vez introducidas las valoraciones de los expertos, se pasa a la perspectiva *Rating*, que se divide en tres pestañas.

- i) *Selección del Método*: se selecciona el método de toma de decisiones que se va a utilizar para resolver el problema, en este caso “Nuclear safeguards Evaluation”. En ese momento se muestra la descripción del método y los pasos que se van a realizar (ver Fig. 7.4).
- ii) *Unificación*: En esta fase hay que seleccionar el operador de agregación que se va a utilizar para agregar los términos del CTLDD. Actualmente solo se ha definido el operador OWA con el cuantificador propuesto por Filev y Yager [50], que es el que utilizaremos en este problema (ver Fig. 7.5).

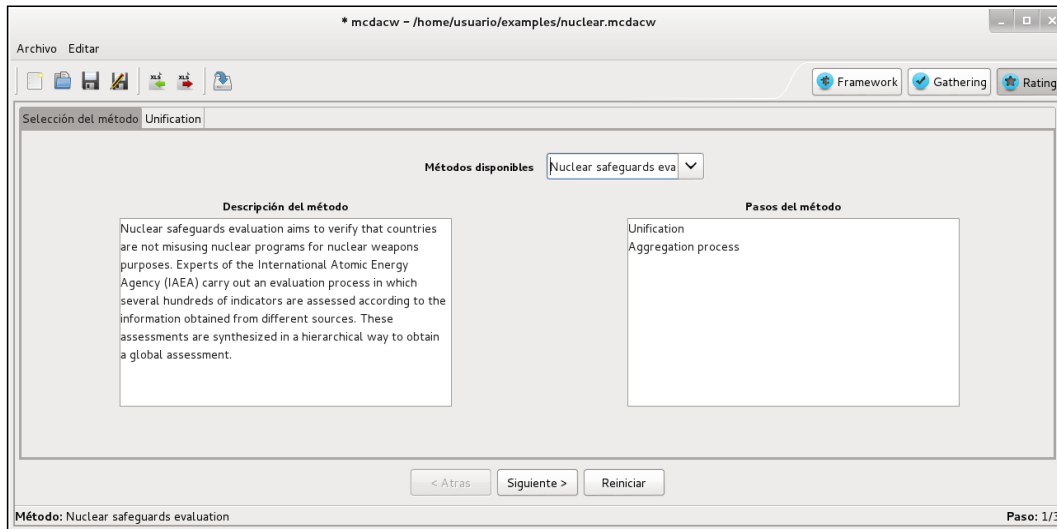


Figura 7.4: Selección del método a utilizar

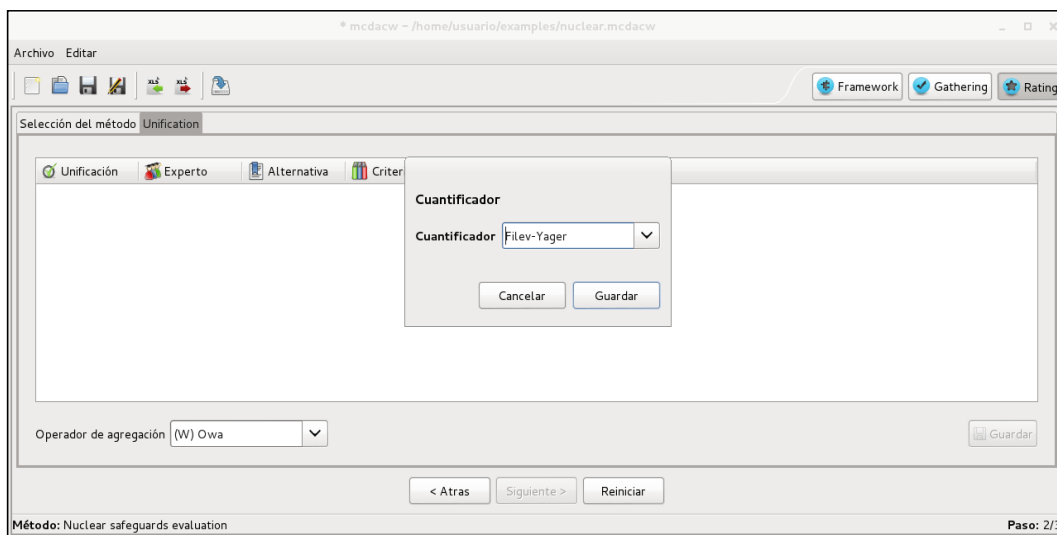


Figura 7.5: Unificación: selección del operador de agregación

La Figura 7.6 muestra los resultados representados en valores 2-tupla obtenidos en la fase de unificación.

The screenshot shows a software window titled '\* mcdacw - /home/usuario/examples/nuclear.mcdacw'. The interface includes a menu bar (Archivo, Editar), a toolbar with icons for file operations and a 'Rating' button, and a main area with tabs for 'Selección del método', 'Unification', and 'Aggregation process'. The 'Unification' tab is active, displaying a table with the following data:

Unificación	Experto	Alternativa	Criterio	Dominio de origen	Evaluación
(Medium, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Chlorine trifluoride	Hesitant domain	Medium
(Medium, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Diffuser housing/vessel	Hesitant domain	Medium
(Medium, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Gas blower for UF6	Hesitant domain	Medium
(Low, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Nickel powder, high purity	Hesitant domain	Low
(High, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Rotary shaft seal	Hesitant domain	High
(Very low, -0.11)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Special control valve (large aperture)	Hesitant domain	At most Low
(Perfect, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Medium:Special shut-off valve (large aperture)	Hesitant domain	Perfect
(High, 0)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Strong:Compressor for pure UF6	Hesitant domain	High
(Perfect, -0.16)	E1	Gaseous diffusion enrichment	Strong:Gaseous diffusion barrier	Hesitant domain	At least Very high

Below the table, there is a dropdown menu for 'Operador de agregación' set to '(W) Owa' and a 'Guardar' button. At the bottom, there are navigation buttons: '< Atras', 'Siguiete >', and 'Reiniciar'. The status bar at the bottom left reads 'Método: Nuclear safeguards evaluation' and the bottom right shows 'Paso: 2/3'.

Figura 7.6: Unificación: resultados representados en valores 2-tupla

- iii) *Proceso de Agregación*: Para agregar las valoraciones de los expertos, en primer lugar se selecciona el operador de agregación *weighted mean* y posteriormente se introducen los pesos de los expertos, tal como muestra la Figura 7.7.

Una vez seleccionado el operador de agregación para agregar el conjunto de criterios e introducidos los pesos según su tipo, se muestra el resultado final del proceso de “enriquecimiento por difusión gaseoso” (ver Fig. 7.8).

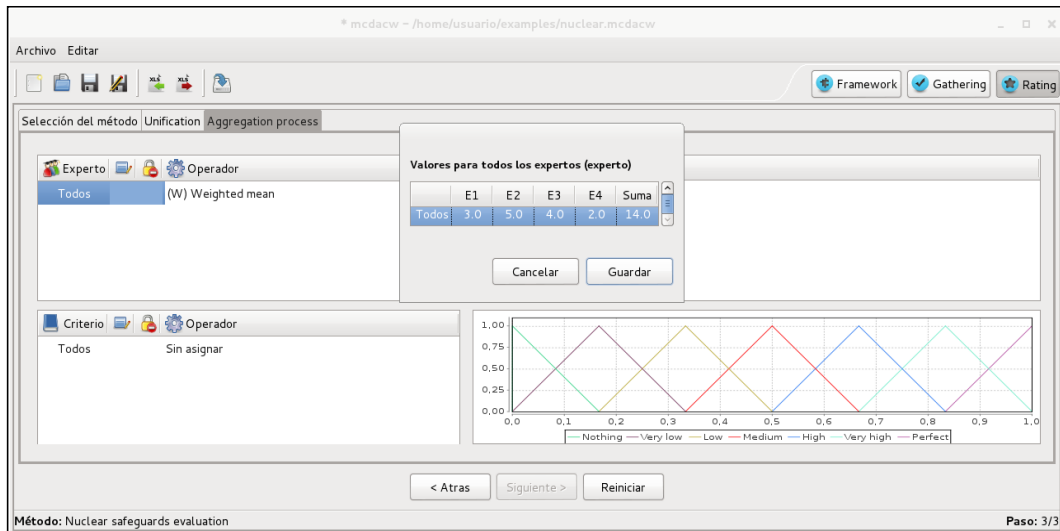


Figura 7.7: Agregación: selección del operador de agregación

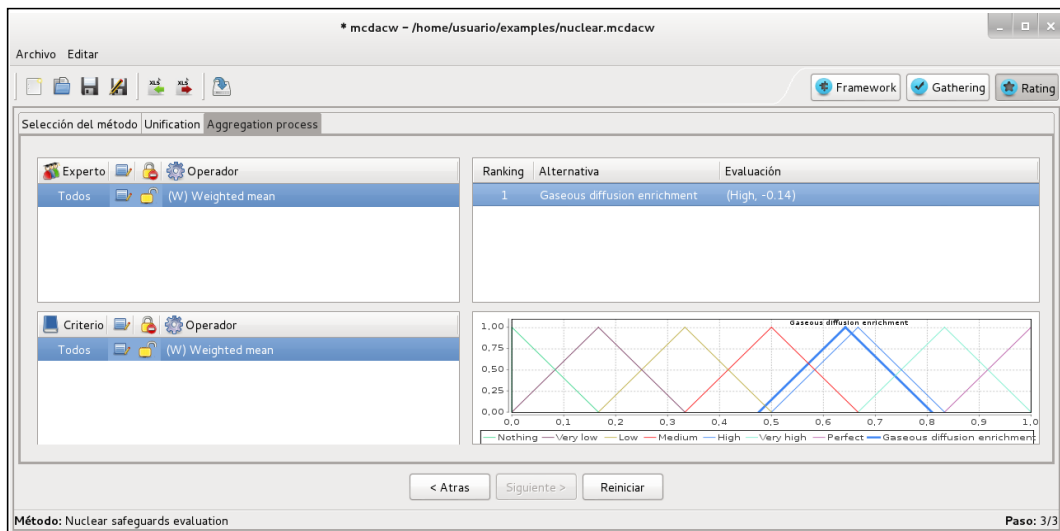


Figura 7.8: Agregación: resultado final de la agregación

## Capítulo 8

# Conclusiones y Trabajos Futuros

A continuación revisamos las principales propuestas y resultados obtenidos a lo largo de esta memoria, y proponemos cuáles serán las líneas de investigación y trabajos futuros que nos planteamos desarrollar a partir de estos resultados. Finalmente, presentamos una lista de las publicaciones derivadas de los resultados de nuestra investigación en este campo.

### **Conclusiones**

La toma de decisiones es un proceso habitual para los seres humanos en muchas actividades del mundo real como la ingeniería, planificación, finanzas, medicina, etc. Los problemas de decisión en el mundo real se definen normalmente en contextos donde la información es vaga e imprecisa. Existen distintos enfoques que manejan este tipo de información. En esta memoria nos hemos centrado en el Enfoque Lingüístico Difuso, que proporciona buenos resultados en problemas de toma de decisiones. El uso de información lingüística implica operar con palabras. Para realizar los procesos de computación con palabras y modelar la información lingüística existen diferentes modelos lingüísticos. En esta investigación hemos revisado los modelos lingüísticos más utilizados en toma de decisiones analizando su representación lingüística y su modelo computacional. De los modelos revisados nos hemos centrado en los modelos lingüísticos computacionales simbólicos, ya que obtienen resultados precisos y fáciles de entender. A pesar de las bondades de

estos modelos, se detectó la necesidad de mejorar la flexibilidad de expresión en los mismos, ya que la mayoría de ellos tratan con términos lingüísticos definidos a priori, y restringen a los expertos a expresar sus valoraciones o preferencias mediante términos lingüísticos simples que a veces no son suficientes para reflejar su conocimiento, porque necesitan expresiones lingüísticas más elaboradas.

Para superar estas limitaciones se han propuesto en la literatura enfoques que inicialmente proporcionan expresiones lingüísticas más flexibles y ricas que términos lingüísticos simples. Sin embargo, tales expresiones no son similares a las expresiones utilizadas por los expertos en problemas de toma de decisiones y/o no tienen definida una formalización para generar las expresiones.

Por tanto, en nuestra investigación hemos propuesto un modelo de representación lingüística llamado Conjuntos de Términos Lingüísticos Difusos Dudosos, que permite modelar múltiples términos lingüísticos, y hemos propuesto el uso de gramáticas libres de contexto para generar formalmente expresiones lingüísticas comparativas cercanas al modelo cognitivo de los seres humanos, que son modelados mediante CTLDD.

Posteriormente, hemos propuesto dos modelos de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas capaces de ofrecer a los expertos una mayor flexibilidad a la hora de expresar sus preferencias en situaciones de decisión donde hay un alto grado de incertidumbre. Para realizar los procesos computacionales, uno de los modelos propuestos utiliza un modelo lingüístico computacional simbólico y el otro utiliza el modelo de representación lingüística 2-tupla.

Dado que en muchos problemas de toma de decisiones las alternativas se evalúan atendiendo a múltiples criterios, también nos planteamos abordar este tipo de problemas, desarrollando dos modelos de toma de decisiones multicriterio en los cuales las valoraciones pueden ser expresadas mediante términos lingüísticos simples, y en caso de dudar entre varios de ellos, mediante expresiones lingüísticas comparativas. Al igual que los modelos de toma de decisiones en grupo, estos modelos también utilizan un modelo lingüístico computacional simbólico y el modelo de representación lingüístico 2-tupla para realizar los procesos de computación con palabras.

En el ámbito de modelos de decisión hemos considerado también que la complejidad de los problemas de toma de decisiones multicriterio en el mundo real lleva a considerar múltiples puntos de vista. Por tanto, proponemos un modelo de to-

---

ma de decisiones multicriterio multiexperto en el que los expertos pueden aportar sus valoraciones mediante términos lingüísticos simples o expresiones lingüísticas comparativas. Además, hemos presentado una aplicación del modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto para la evaluación de riesgo nuclear, que mejora la flexibilidad de la elicitación de información lingüística mediante el uso de gramáticas libre de contexto y CTLDD.

Finalmente, hemos presentado una aplicación software de apoyo a la toma de decisiones, que implementa un nuevo módulo para manejar expresiones lingüísticas comparativas y CTLDD en problemas de toma de decisiones.

Como podemos observar, todos los objetivos que perseguíamos al inicio de esta investigación han sido alcanzados a través de las propuestas presentadas en esta memoria.

### **Trabajos Futuros**

Dado que la toma de decisiones con información lingüística es un área importante y de gran utilidad en muchas actividades del mundo real como la ingeniería, la psicología, las finanzas, etc., nuestros trabajos futuros se encaminan hacia las siguientes líneas de investigación:

- Mejorar la representación de las expresiones lingüísticas comparativas para facilitar los procesos de computación con palabras con este tipo de información, definiendo una envoltura difusa, intuicionista, tipo-2, etc.
  - Desarrollar nuevos operadores de agregación que permitan agregar CTLDD.
  - Aplicar los modelos propuestos en esta investigación a distintos problemas reales, para comparar los resultados con otros modelos de toma de decisiones existentes en la literatura.
  - Completar la implementación del módulo Hesitant desarrollando los modelos de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas.
  - Definir nuevas gramáticas libres de contexto que generen expresiones lingüísticas diferentes adaptadas a los problemas de toma de decisiones.
-

### Publicaciones

Para finalizar, en relación a la difusión y publicación de los resultados presentados, destacamos las publicaciones más íntimamente relacionadas con esta memoria:

- En Revistas Internacionales

- R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 20, issue 1, pp. 109-119, 2012.
- R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, A Group Decision Making Model Dealing with Comparative Linguistic Expressions based on Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. *Information Sciences*. Sometido en 2º ronda con minor revision.
- R.M. Rodríguez, L. Martínez, An Analysis of Symbolic Linguistic Computing Models in Decision Making. *International Journal of General Systems*, vol. 42, issue 1, pp. 121-136, 2013.
- R.M. Rodríguez, L. Martínez, D. Ruan, J. Liu, Using Collaborative Filtering for Dealing with Missing Values in Nuclear Safeguards Evaluation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and knowledge-based Systems*, vol. 18, issue 4, pp. 431-450, 2010.

- En Congresos Internacionales

- R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. ISKE 2011, Foundations of Intelligent Systems, Advances in Intelligent and Soft Computing, vol. 122, pp. 287-295, Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
  - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, A Multicriteria Linguistic Decision Making Model Dealing with Comparative Terms. Eurofuse 2011, Advances in Intelligent and Soft Computing, vol. 107, pp. 229-241, Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
  - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Group Decision Making with Comparative Linguistic Terms. IPMU 2012, Advances on Computational Intelligence Communications in Computer and Information Science, vol. 297, pp. 181-190, Springer Berlin / Heidelberg, 2012.
-

- R.M. Rodríguez, M. Espinilla, L. Martínez, A Comparative Analysis of Symbolic Linguistic Computational Models. International Fuzzy Systems Association. European Society for Fuzzy Logic and Technology, Lisboa (Portugal), July 20-24th, 2009.
  - R.M. Rodríguez, L. Martínez, A Comparison among Symbolic Computational Models in Linguistic Decision Making. The 9th International FLINS Conference on Foundations and Applications of Computational Intelligence, Emei, Chengdu (China), August 2-4th, 2010.
  - En Congresos Nacionales
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Modelo Lingüístico de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas. XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2012), Valladolid (Spain), February 1st-3rd, 2012.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Toma de Decisión Lingüística. Modelos Computacionales Simbólicos y su Aplicación en el Tratamiento de Percepciones. XV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF2010), Punta Umbría (Huelva), February 3-5th, 2010.
-



## Apéndice A

# Comparación de Intervalos

Como hemos observado en el capítulo 3, la comparación de CTLDD está basada en la envoltura, cuya definición es un intervalo. En este apéndice revisamos algunos métodos para comparar intervalos que podrían ser utilizados en la comparación de CTLDD, pero antes introduciremos el concepto de intervalo numérico.

**Definición 53** [79] *Un intervalo es definido mediante un par ordenado entre corchetes,*

$$A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R\}$$

donde  $a_L$  es el límite izquierdo, y  $a_R$  es el límite derecho de  $A$ .

**Definición 54** [79] *Un intervalo también puede ser definido mediante su centro y amplitud,*

$$A = \langle a_C, a_W \rangle = \{a : a_C - a_W \leq a \leq a_C + a_W\}$$

donde  $a_C$  es el centro, y  $a_W$  es la amplitud de  $A$ .

De las definiciones 53 y 54, el centro y amplitud de un intervalo se puede obtener de la siguiente forma:

$$a_C = \frac{1}{2}(a_R + a_L) \tag{A.1}$$

$$a_W = \frac{1}{2}(a_R - a_L) \tag{A.2}$$

En la literatura se han presentado diferentes enfoques para comparar intervalos. En [79] Ishibuchi y Tanaka presentaron dos relaciones de orden. Una de ellas se define mediante los límites izquierdo y derecho de un intervalo como se indica a continuación.

**Definición 55** [79] Sea  $A = [a_L, a_R]$  y  $B = [b_L, b_R]$  dos intervalos, la relación de orden  $\leq_{LR}$  entre  $A$  y  $B$  es definida como sigue,  $A \leq_{LR} B$  si solo si  $a_L \leq b_L$  y  $a_R \leq b_R$ ,  $A <_{LR} B$  si solo si  $A \leq_{LR} B$  y  $A \neq B$

Esta relación de orden es parcial y por tanto, hay muchos pares de intervalos que no pueden ser comparados con tal relación. Para evitar esta limitación, los autores definieron una segunda relación de orden  $\leq_{CW}$ , en la que utilizaban el centro y amplitud del intervalo.

**Definición 56** [79] Sea  $A = [a_L, a_R]$  y  $B = [b_L, b_R]$  dos intervalos, la relación de orden  $\leq_{CW}$  entre  $A$  y  $B$  es definida como sigue,  $A \leq_{CW} B$  si solo si  $a_C \leq b_C$  y  $a_W \leq b_W$ ,  $A <_{CW} B$  si solo si  $A \leq_{CW} B$  y  $A \neq B$

Esta relación de orden también define una relación de orden parcial entre intervalos.

Más tarde Kundu [87] definió una relación de preferencia difusa entre dos intervalos en la línea real mediante la siguiente función que utiliza relaciones de probabilidad.

$$Left(A, B) = \max\{0, P_{AB}(x < y) - P_{AB}(x > y)\}, \quad (A.3)$$

donde  $P_{AB}(x < y)$  es la probabilidad que  $x < y$ ,  $x \in A$ ,  $y \in B$ . Siendo  $x, y$  uniforme e independientemente distribuidos en los intervalos  $A$  y  $B$ .

Similarmente puede ser definido  $Right(A, B)$ ,

$$Right(A, B) = \max\{0, P_{AB}(x > y) - P_{AB}(x < y)\}, \quad (A.4)$$

El inconveniente de este enfoque es que no tiene en cuenta la amplitud de los intervalos, por lo que podría darse el caso que dos intervalos sean igual de preferibles, a pesar de que uno tenga mayor amplitud (mayor incertidumbre) que otro.

---

Posteriormente Sengupta et al. [137] presentaron dos enfoques para comparar cualquier par de intervalos y mejoraron los métodos de Ishibuchi y Tanaka, y Kundu. Nosotros explicaremos uno de los dos enfoques, ya que lo hemos considerado adecuado para comparar CTLDD utilizando sus envolturas. Este método introduce una función de aceptación que indica el grado de aceptación en el que el primer intervalo es inferior al segundo intervalo.

**Definición 57** [137] *Sea  $I$  el conjunto de todos los intervalos cerrados en la línea real  $\mathbb{R}$ , y  $A$  y  $B$  dos intervalos,  $A, B \in I$ . La función de aceptación  $A_{<} : I \times I \rightarrow [0, \infty]$  es definida como,*

$$A_{<} = \frac{b_C - a_C}{b_W + a_W}$$

donde  $b_W + a_W \neq 0$ ,  $a_C \leq b_C$ , siendo  $a_C$ ,  $b_C$ ,  $a_W$  y  $b_W$  el centro y amplitud de los intervalos  $A$  y  $B$ .

Este grado de aceptación es un número real que representa el grado de aceptación que el intervalo  $A$  es inferior al intervalo  $B$  y es interpretado como se indica a continuación:

- Si  $A_{<} = 0$  entonces no se acepta que el intervalo  $A$  es inferior a  $B$ .
- Si  $0 < A_{<} < 1$ , entonces  $A_{<}$  es aceptado con diferente grado de satisfacción en el intervalo  $[0,1]$ .
- Si  $A_{<} \geq 1$ , es absolutamente cierto que el intervalo  $A$  es inferior a  $B$ .



## Apéndice B

# English Summary

This appendix contains an English summary of the thesis entitled, *Using Comparative Linguistic Preferences in Decision Making under Uncertainty*, as partial fulfilment for the International Ph.D. This summary presents a new representation model of linguistic information that increases the richness of linguistic elicitation in decision making problems, and proposes the use of context-free grammars to generate linguistic expressions close to human beings cognitive model that will be modelled by the previous model.

First of all, the motivation and aims of this report are exposed. Afterwards, four papers that include the main proposals of this research are attached. Next, a multicriteria multiexpert decision making model is presented and used to solve a problem of nuclear safeguards evaluation. After that, a decision support system that implements the new representation model of linguistic information for solving decision making problems is shown. Finally, some conclusions, future works and publications related to this research are pointed out.

### B.1. Motivation

I began my research collaborating with professor Da Ruan on the problem of *Nuclear Safeguards Evaluation*, studying linguistic decision models for dealing with the uncertainty of such a problem.

Nuclear safeguards are a set of activities accomplished by the International Atomic Energy Agency (IAEA) in order to verify that a State is living up to

its international undertakings not to use nuclear programs for nuclear weapons purposes. The safeguards system is based on assessments of the correctness and completeness of the State's declarations to the IAEA concerning nuclear material and related nuclear activities [77] by using different sources of information.

To develop an effective nuclear safeguards evaluation, the IAEA has developed a Physical Model [77] based on a hierarchical and multi-layer structure that includes all the main activities that might be involved in production of nuclear weapon-usable materials ranging from indicators to factors (see Fig. B.1). The latter are synthesized from the former such that the existence of nuclear activities is determined by indicators and/or factors that suggest or indicate the existence of nuclear programs for nuclear weapons.

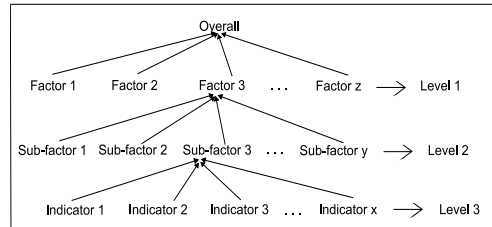


Figure B.1: Structure of the overall evaluation

The IAEA experts evaluate indicators on the basis of their analysis and knowledge according to the available information in different sources of vague and uncertain information. In the beginning, the main problem of nuclear safeguards evaluation was the management of the uncertainty inherent to this problem, that was satisfactorily solved in [94, 95] by means of evaluation models based on the Fuzzy Linguistic Approach [175, 176, 177].

Afterwards, the focus of interest was moved to improve the results of the evaluation process when missing values appeared in the evaluation. This is a common situation for the complexity, the huge number of indicators to assess, and vagueness of the information that surround the problem. Therefore, initially my research led to the treatment of missing values by using collaborative filtering models [19, 61]. The treatment of such missing values provided some results, but they were not satisfactory because we cannot justify the obtained values in a plausible way.

The following approach to manage the missing values in hesitant situations was

to study how improve the elicitation of linguistic information of the experts, when they hesitate among several linguistic terms to provide their assessments. The professor Da Ruan had proposed a linguistic model [100] that generated linguistic expressions more flexible than single linguistic terms, but such a model was far from the human beings cognitive model. Therefore, the main aim of my research focused on trying to enrich the vocabulary of expression for experts provide their assessments in a more flexible way, not only on the problem of nuclear safeguards evaluation, but also on any decision problem where experts hesitate among several linguistic terms to express their preferences.

## B.2. Objectives

The aim of this research is to improve the flexibility of the elicitation of linguistic information in decision making problems under uncertainty. To do so, we will achieve the following objectives:

- To study the linguistic models most used in decision making analyzing their representation and computing processes.
  - To carry out a comparative study among the symbolic linguistic computing models that are of interest for our research. We analyze their use in decision making situations with high degree of uncertainty.
  - To define a new representation model of linguistic information entitled *Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set*, that allows experts to provide their preferences with comparative linguistic expressions in decision situations with high degree of uncertainty, when they hesitate among several linguistic terms.
  - To define a computational linguistic model that computes with Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and obtains linguistic results easy to understand.
  - To propose models of group decision making, multicriteria decision making, and multicriteria multiexpert decision making, in which experts might express their preferences by means of comparative linguistic expressions. To do so, some necessary operators and tools to manage this type of information are defined.
-

- To solve a real decision making problem by using Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets.
- To introduce the use of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets in the decision support system with linguistic information MCDACW (Multicriteria Decision Analysis with Computing with Words), together the proposed models in this research.

### B.3. Structure

To achieve the objectives aforementioned, this report is divided into eight chapters, but the English summary just includes the main research findings related to them, therefore, it is structured as follows:

- Chapter 2: It presents a review of the Fuzzy Linguistic Approach and linguistic decision making. Afterwards, different linguistic models used in linguistic decision making are revised, studying both their linguistic representation and their computational model. Finally, a comparative analysis is carried out among such linguistic models, focusing on the symbolic computing models which are of interest for our research. In the English summary, the review of the Fuzzy Linguistic Approach, linguistic decision making and linguistic models is omitted, because they are not novel information in this research. The comparison among symbolic computing models is presented in Section B.4 by attaching the paper *An Analysis of Symbolic Linguistic Computing Models in Decision Making*, published in *International Journal of General Systems*.
  - Chapter 3: This chapter focuses on the necessity to model decision situations with high degree of uncertainty where experts hesitate among several values to provide their preferences. Firstly, different quantitative models that have managed such situations are revised. Afterwards, it is defined a new representation model of linguistic information entitled *Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets*, that deals with multiple linguistic terms in the expression of preferences by using comparative linguistic expressions generated by context-free grammars. In addition, some properties of Hesitant Fuzzy Linguistic Term
-

---

Sets and operators to carry out the computing with words processes with this type of information are presented. This proposal was presented in the paper *Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making*, published in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, which is attached in Section B.5.

- Chapter 4: Two new group decision making models with comparative linguistic expressions are presented. These models define the necessary operators and tools to manage such linguistic expressions. In the English summary each group decision making model is explained by attaching a paper in the Section B.6.
  - Chapter 5: It presents two novel multicriteria decision making models with comparative linguistic expressions. To do so, the operators and necessary processes to solve this type of problems are defined. Finally, it is introduced a multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions. Taking into account that the multicriteria multiexpert decision making model extends of the second multicriteria decision making model, for the sake of simplicity in the English summary, we present the first multicriteria decision making model which is attached in Section B.5. The multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions is proposed in Section B.7.
  - Chapter 6: It presents a problem of nuclear safeguards evaluation which is solved by applying the multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions proposed. It is introduced in Section B.8.
  - Chapter 7: It shows the use of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets and the decision making models presented in this report, in a decision support system with linguistic information, MCDACW. It has been also introduced in Section B.9.
  - Eventually, in Section B.10 some concluding remarks and future works are pointed out according to the findings obtained in this research. Finally, we present the publications related to the topic of this report.
-

---

#### B.4. Linguistic Decision Making under Uncertainty. Computational Linguistic Models

This section does not include a review of the Fuzzy Linguistic Approach and linguistic decision making because they are briefly introduced in the paper attached. In [109] can be found an overview of the most significant and extended linguistic computing models, due to their key role in linguistic decision making, therefore, it is neither revised in this section.

Afterwards, it is included the paper *An Analysis of Symbolic Linguistic Computing Models in Decision Making*, published in *International Journal of General Systems*, that presents a comparative study of different symbolic linguistic computational models widely used in linguistic decision making that are of interest for our research and provide results easy to understand.

---



## An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making

Rosa M. Rodríguez\* and Luis Martínez

*Department of Computer Sciences, University of Jaén, Campus las lagunillas s/n, 23071 Jaén, Spain*

*(Received 10 November 2011; final version received 22 June 2012)*

It is common that experts involved in complex real-world decision problems use natural language for expressing their knowledge in uncertain frameworks. The language is inherent vague, hence probabilistic decision models are not very suitable in such cases. Therefore, other tools such as fuzzy logic and fuzzy linguistic approaches have been successfully used to model and manage such vagueness. The use of linguistic information implies to operate with such a type of information, i.e. processes of computing with words (CWW). Different schemes have been proposed to deal with those processes, and diverse symbolic linguistic computing models have been introduced to accomplish the linguistic computations. In this paper, we overview the relationship between decision making and CWW, and focus on symbolic linguistic computing models that have been widely used in linguistic decision making to analyse if all of them can be considered inside of the CWW paradigm.

**Keywords:** decision making; fuzzy linguistic approach; computing with words; symbolic linguistic computing models

### 1. Introduction

Real-world decision problems usually request that human beings provide either their knowledge or preferences about a set of different alternatives in a given activity to make a decision by means of reasoning processes (Evangelos 2000; Lu et al. 2007). Often these decision situations are defined under uncertain frameworks that could be managed by probabilistic models when assuming that any uncertainty can be represented by a probabilistic distribution (Martínez et al. 2009). However, it is common that uncertainty has a non-probabilistic nature. In these situations, experts feel more comfortable providing their knowledge by using terms close to human beings' cognitive model. Fuzzy logic and fuzzy linguistic approaches provide tools to model and manage such an uncertainty by means of linguistic variables (Zadeh 1975a), enhancing the flexibility, reliability of the decision models, and having provided good results in different fields (Ishibuchi et al. 2004; Martínez 2007; Pedrycz and Mingli 2011).

The use of linguistic information implies the necessity of operating with linguistic variables. Computing with words (CWW) (Zadeh 1996; Zadeh and Kacprzyk 1999a,b; Mendel et al. 2010) is defined as the methodology for reasoning, computing, and decision making whose information is described in natural language, i.e. the objects of computation are words or sentences in natural language. Therefore, it emulates human cognitive processes to improve solving processes of problems dealing with uncertainty.

---

\*Corresponding author. Email: [rmrodrig@ujaen.es](mailto:rmrodrig@ujaen.es)



Figure 1. CWW scheme.

CWW has been and still is a key methodology in linguistic decision making (Martínez et al. 2010) not only since Zadeh (1996) coined it, but also since the early 1980s, when different researchers such as Tong and Bonissone (1980), Schmucker (1984), and Yager (1981) started to propose different computing schemes to operate with linguistic information. Such schemes are quite similar and keep a structure in which the input linguistic information should be mapped into fuzzy set models and the results should be expressed into linguistic information, which are easy to understand by human beings (see Figure 1). Yager points out the importance of the processes of translation and retranslation in CWW (Yager 1999, 2004). The former translates the linguistic inputs into a machine manipulative format based on fuzzy tools in which the computations are carried out, and the latter consists of converting the computing results into linguistic information again to facilitate the comprehension of the human beings (i.e. one of the main objectives of CWW).

Consequently, different symbolic linguistic computing models have been developed and applied as computational basis to CWW in linguistic decision making (Degani and Bortolan 1988; Herrera and Herrera-Viedma 2000; Herrera and Martínez 2000; Xu 2004; Wang and Hao 2006).

In this paper, we present a comparative study of different symbolic linguistic computing models (Herrera and Herrera-Viedma 2000; Herrera and Martínez 2000; Xu 2004; Wang and Hao 2006) widely used in linguistic decision making (Martínez et al. 2006; Chang et al. 2007; Önüt and Soner 2008; Fan et al. 2009; de Andrés et al. 2010). In this paper, we analyse their features regarding the CWW scheme as shown in Figure 1 in order to check if such computing models may be considered in the CWW paradigm.

The paper is structured as follows: Section 2 overviews CWW and its use in decision making. Section 3 reviews both linguistic and computational modellings of symbolic linguistic computing models that are most widely used in linguistic decision making. Section 4 carries out a comparative analysis among the different linguistic computational models by using a linguistic decision making problem, and finally some concluding remarks are pointed out.

## 2. Decision making and CWW

This section overviews the relationship between the fuzzy linguistic approach and CWW and its computational basis together with its application to linguistic decision making.

### 2.1 Fuzzy linguistic approach

In many real decision situations, the use of linguistic information is straightforward due to the nature of different aspects of the decision problem. In such situations one common approach to model the linguistic information is the fuzzy linguistic approach (Zadeh 1975a,b,c) that uses the fuzzy set theory (Zadeh 1965) to manage the uncertainty and model the information.

Zadeh (1975a) introduced the concept of linguistic variable as ‘a variable whose values are not numbers but words or sentences in a natural or artificial language’. A linguistic value is less precise than a number but it is closer to human cognitive

processes used to solve successful problems dealing with uncertainty. Formally, a linguistic variable is defined as follows.

DEFINITION 1 (ZADEH 1975A). A linguistic variable is characterized by a quintuple  $(H, T(H), U, G, M)$ , where  $H$  is the name of the variable;  $T(H)$  (or simply  $T$ ) denotes the term set of  $H$ , i.e. the set of names of linguistic values of  $H$ , with each value being a fuzzy variable denoted generically by  $X$  and ranging across a universe of discourse  $U$  which is associated with the base variable  $u$ ;  $G$  is a syntactic rule (which usually takes the form of a grammar) for generating the names of values of  $H$ ; and  $M$  is a semantic rule for associating its meaning with each  $H, M(X)$ , which is a fuzzy subset of  $U$ .

A linguistic variable is defined by a linguistic descriptor and its semantics. There are different approaches to choose the linguistic descriptors and different ways to define their semantics (Herrera and Herrera-Viedma 2000).

One approach for selecting descriptors consists of supplying directly the term set by considering all the terms distributed on a scale which has an order defined (Herrera et al. 1995; Yager 1995). For example, a set of seven linguistic terms  $S$  could be

$$S = \{s_0 : \text{nothing } (n), s_1 : \text{very low } (vl), s_2 : \text{low } (l), s_3 : \text{medium } (m), \\ s_4 : \text{high } (h), s_5 : \text{very high } (vh), s_6 : \text{perfect } (p)\}.$$

Usually in these cases, it is required the existence of the following operators:

- (1) A negation operator:  $Neg(s_i) = s_j$  such that  $j = g - i$  ( $g + 1$  is the cardinality).
- (2) A maximization operator:  $\max(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \geq s_j$ .
- (3) A minimization operator:  $\min(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \leq s_j$ .

The semantics of the terms is represented by fuzzy numbers defined in the interval  $[0,1]$ , described by membership functions. A way to characterize a fuzzy number is to use a representation based on parameters of its membership function (Bonissone and Decker 1986). The linguistic assessments given by users are just approximate ones. Some authors consider that linear trapezoidal membership functions are good enough to capture the vagueness of these linguistic assessments (Delgado et al. 1999). The parametric representation is achieved by the 4-tuple  $(a, b, d, c)$ , where  $b$  and  $d$  indicate the interval in which the membership value is 1, being  $a$  and  $c$  the left and right limits of the definition domain of the trapezoidal membership function (Bonissone and Decker 1986). A particular case of this type of representation are the linguistic assessments whose membership functions are triangular, i.e.  $b = d$ , so we represent this type of membership function by a 3-tuple  $(a, b, c)$ . An example could be

$$\text{perfect} = (0.83, 1, 1), \quad \text{very high} = (0.67, 0.83, 1), \quad \text{high} = (0.5, 0.67, 0.83), \\ \text{medium} = (0.33, 0.5, 0.67), \quad \text{low} = (0.17, 0.33, 0.5), \quad \text{very low} = (0, 0.17, 0.33), \\ \text{nothing} = (0, 0, 0.17),$$

which is graphically shown in Figure 2.

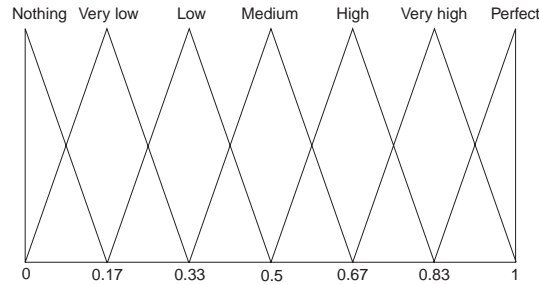


Figure 2. A set of seven terms with its semantics.

**2.2 Linguistic decision making resolution scheme**

It is necessary to analyse the phases of a linguistic decision scheme when the linguistic information is formally modelled. A common decision resolution scheme consists of two main phases (Roubens 1997):

- (1) An *aggregation phase* that aggregates the values provided by the experts to obtain a collective assessment for the alternatives.
- (2) An *exploitation phase* of the collective assessments to rank, sort, or choose the best ones among the alternatives.

The use of linguistic information in decision making modifies the previous scheme by introducing two new steps (Herrera and Herrera-Viedma 2000) (see Figure 3):

- (1) *The choice of the linguistic term set with its semantics.* It establishes the linguistic expression domain in which experts provide their linguistic assessments about the alternatives according to their knowledge.
- (2) *The choice of the aggregation operator of linguistic information.* A proper linguistic aggregation operator is chosen for aggregating the linguistic assessments. The appropriateness of the operator depends on each single decision problem.
- (3) *Resolution scheme.* The best alternative/s will be chosen starting from the linguistic assessments provided by the experts, the collective assessments are then

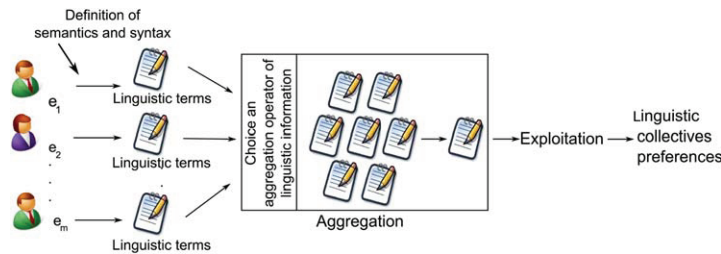


Figure 3. Scheme of a linguistic decision making problem.

computed by using the appropriate linguistic aggregation operator, and finally a ranking is obtained to choose the best alternative/s.

The previous linguistic resolution scheme shows the necessity of linguistic computing models to operate with linguistic information and obtain accurate and understandable results according to the CWW scheme. We will focus on this paper on symbolic linguistic computing models, but first we introduce some basic concepts about linguistic computing models.

2.3 Classical linguistic computing models

Initially, two computational models were developed to perform linguistic computations based on the fuzzy linguistic approach (Zadeh 1975a,b,c):

- *Linguistic computing model based on membership functions (semantic model).* This model carries out the computations with linguistic terms by operating with their membership functions using the Extension Principle (Dubois and Prade 1980). The Extension Principle is a basic concept in the fuzzy sets theory (Dubois and Prade 1980) which is used to generalize crisp mathematical concepts to fuzzy sets. The use of extended arithmetic based on the Extension Principle increases the vagueness of the results. Therefore, the results obtained by the fuzzy linguistic operators based on the Extension Principle are fuzzy numbers that usually do not match with any linguistic term in the initial term set. From these results we have two ways of action:
  - (i) In those problems that the accuracy outweighs interpretability (ranking purposes), the results are expressed by the fuzzy numbers themselves (Anagnostopoulos et al. 2008; Fu 2008).
  - (ii) If an interpretable and linguistic result is demanded, then an approximation function  $app_1(\cdot)$  is applied to associate the fuzzy result  $F(\mathcal{R})$  with a label in  $S$  (Degani and Bortolan 1988; Yager 2004; Martínez et al. 2006):

$$S^n \xrightarrow{\tilde{F}} F(\mathcal{R}) \xrightarrow{app_1} (\cdot)S,$$

where  $S^n$  symbolizes the  $n$  Cartesian product of  $S$ ,  $\tilde{F}$  is an aggregation operator based on the Extension Principle, and  $F(\mathcal{R})$  is the set of fuzzy sets over the set of real numbers  $\mathcal{R}$ .

We note that the approximation process implies a loss of information and lack of accuracy of the results.

- *Symbolic linguistic computing model.* Symbolic models have been widely used in CWW because of their simplicity and high interpretability. These models use the ordered structure of the linguistic terms set,  $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$  where  $s_i < s_j$  if  $i < j$ , to operate (Delgado et al. 1993). The intermediate results of these operations are numeric values,  $\gamma \in [0, g]$ , which must be approximated in each step of the process by means of an approximation function  $app_2 : [0, g] \rightarrow \{0, \dots, g\}$  that obtains a numeric value, such that, it indicates the index of the associated linguistic term,  $s_{app_2(\gamma)} \in S$ . Formally, it can be expressed as

$$S^n \xrightarrow{C} [0, g] \xrightarrow{app_2(\cdot)} \{0, \dots, g\} \rightarrow S,$$

where  $C$  is a symbolic linguistic aggregation operator,  $app_2(\cdot)$  is an approximation function used to obtain an index  $\{0, \dots, g\}$  associated with a term in  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  from a value in  $[0, g]$ .

Both linguistic computing models produce loss of information due to the approximation processes and hence a lack of precision in the results. This loss of information is produced because the information representation model of the fuzzy linguistic approach is discrete in a continuous domain. Different approaches have been proposed to overcome those limitations. In the following section, we review in further detail several symbolic linguistic computing approaches that will be analysed and compared later on.

### 3. Symbolic linguistic computing models

Due to the relevance of linguistic decision making in real problems and the necessity of linguistic computational methods in CWW, many researchers have tried to improve the processes of CWW developing different models. This section reviews several symbolic linguistic computing models widely used in linguistic decision making, which were proposed to improve the accuracy and understandability of the processes of CWW, such as the 2-tuple linguistic model (Herrera and Martínez 2000), the virtual linguistic model (Xu 2004), and the proportional 2-tuple linguistic model (Wang and Hao 2006). This revision pays attention to the computational and representation models utilized for modelling the input information, and the results obtained for each approach in the CWW scheme are presented in Figure 1.

#### 3.1 2-Tuple linguistic model

This model was presented by Herrera and Martínez (2000) to avoid the loss of information and to improve the precision in processes of CWW.

##### 3.1.1 Representation model

This model represents the information by means of a pair of values  $(s, \alpha)$ , where  $s$  is a linguistic term with syntax and semantics and  $\alpha$  is a numerical value that represents the value of the symbolic translation. Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a linguistic term set and  $\beta \in [0, g]$  is a numerical value in its interval of granularity.

DEFINITION 3.1 (HERRERA AND MARTÍNEZ 2000). The symbolic translation is a numerical value assessed in  $[-0.5, 0.5]$  that supports the ‘difference of information’ between a counting of information  $\beta$  assessed in the interval of granularity  $[0, g]$  of the term set  $S$  and the closest value in  $\{0, \dots, g\}$  which indicates the index of the closest linguistic term in  $S$ .

This model defines a set of functions to facilitate the computational processes with 2-tuple (Herrera and Martínez 2000).

DEFINITION 3.2 (HERRERA AND MARTÍNEZ 2000). Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a set of linguistic terms. The 2-tuple set associated with  $S$  is defined as  $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5]$ . The function  $\Delta : [0, g] \rightarrow \langle S \rangle$  is given by

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \quad \text{with} \quad \begin{cases} i = \text{round}(\beta), \\ \alpha = \beta - i, \end{cases} \quad (1)$$

where *round* assigns to  $\beta$ , the integer number  $i \in \{0, 1, \dots, g\}$  closest to  $\beta$ .

PROPOSITION 3.3. Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a linguistic term set and  $(s_i, \alpha)$  be a linguistic 2-tuple. There is always a function  $\Delta^{-1}$  such that, from a linguistic 2-tuple, it returns its equivalent numerical value  $\beta \in [0, g] \subset \mathcal{R}$ .

*Remark 1.* From Definitions 3.1 and 3.2 and Proposition 3.3, it is clear that the conversion of a linguistic term into a linguistic 2-tuple consists in adding a value zero as the symbolic translation,  $s_i \in S \Rightarrow (s_i, 0)$ .

*Example 3.4.* Let us suppose a symbolic aggregation operation over labels assessed in  $S = \{\text{nothing, very low, low, medium, high, very high, perfect}\}$  that obtains as its result  $\beta = 3.25$ , then the representation of this counting of information by means of a 2-tuple is (see Figure 4),

$$\Delta(3.25) = (s_3, 0.25).$$

As we can see in Figure 4, the 2-tuple linguistic model keeps the fuzzy representation and syntax according to fuzzy linguistic approach.

3.1.2 Computational model

A linguistic computational approach based on the functions  $\Delta$  and  $\Delta^{-1}$  was also defined in Herrera and Martínez (2000) with the following operations:

(1) Comparison of 2-tuple

The comparison of linguistic information represented by 2-tuple is carried out according to an ordinary lexicographic order.

Let  $(s_k, \alpha_1)$  and  $(s_l, \alpha_2)$  be two 2-tuple with each one representing a counting of information:

- if  $k < l$  then  $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
- if  $k = l$  then
  - (a) if  $\alpha_1 = \alpha_2$  then  $(s_k, \alpha_1), (s_l, \alpha_2)$  represents the same information
  - (b) if  $\alpha_1 < \alpha_2$  then  $(s_k, \alpha_1) < (s_l, \alpha_2)$
  - (c) if  $\alpha_1 > \alpha_2$  then  $(s_k, \alpha_1) > (s_l, \alpha_2)$ .

(2) Negation operator of a 2-tuple

The negation operator over 2-tuple was defined as

$$Neg(s_i, \alpha) = \Delta(g - (\Delta^{-1}(s_i, \alpha))) \tag{2}$$

being  $g + 1$  the cardinality of  $S$ ,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

(3) 2-Tuple aggregation operators

The aggregation of information consists of obtaining a value that summarizes a set of values; therefore, the result of the aggregation of a set of 2-tuple must be a

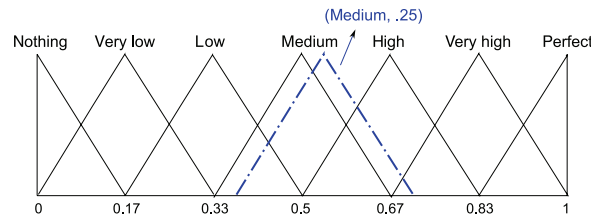


Figure 4. A 2-tuple linguistic representation.

2-tuple. There are several 2-tuple aggregation operators, such as the 2-tuple arithmetic mean, OWA, and so on (Herrera and Martínez 2000).

The 2-tuple arithmetic mean is defined as follows:

DEFINITION 3.5 (HERRERA AND MARTÍNEZ 2000). Let  $x = \{(s_1, \alpha_1), \dots, (s_n, \alpha_n)\}$  be a set of 2-tuple, the 2-tuple arithmetic mean  $\bar{x}$  is computed as,

$$\bar{x} = \Delta \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i) \right) = \Delta \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i \right). \quad (3)$$

The arithmetic mean for 2-tuple allows to compute the mean of a set of linguistic values in a precise way without any approximation process.

Example 3.6. Let us suppose an example where the expert provides his/her assessments in the linguistic term set,  $S = \{s_0 : n, s_1 : vl, s_2 : l, s_3 : m, s_4 : h, s_5 : vh, s_6 : p\}$ , shown in the Figure 2, providing the following linguistic preference vector:

l	h	m	vl
---	---	---	----

The aggregation of these values by using the 2-tuple arithmetic mean as aggregation operator is as follows:

- The preference vector is transformed into 2-tuple

(l, 0)	(h, 0)	(m, 0)	(vl, 0)
--------	--------	--------	---------

- The result of the aggregation is

$$\bar{x} = \Delta \left( \frac{1}{4} (\Delta^{-1}(l, 0) + \Delta^{-1}(h, 0) + \Delta^{-1}(m, 0) + \Delta^{-1}(vl, 0)) \right) = \Delta(2.5) = (m, -0.5).$$

The computational model is accurate because it represents the result of the computing processes by means of a linguistic term and a numerical value that represents the value of the symbolic translation. However, it has a limitation, the labels have to be symmetrically distributed around a medium label.

### 3.2 Virtual linguistic model

This model was proposed by Xu (2004) to avoid the loss of information in processes of CWW and increase the operations in such processes.

#### 3.2.1 Representation model

In this symbolic linguistic computing model, Xu extended the discrete linguistic term set  $S$  to a continuous linguistic term set  $\bar{S} = \{s_\alpha | s_l < s_\alpha \leq s_r, \alpha \in [1, t]\}$ , where, if  $s_\alpha \in S$ ,  $s_\alpha$  is called the original linguistic term, otherwise,  $s_\alpha$  is called virtual linguistic term which does not have assigned any semantics either proper linguistic syntax.

Generally, experts use the original linguistic terms to express their assessments or preferences, and the virtual linguistic terms appear in the operations.

3.2.2 Computational model

Xu introduced different operational laws to accomplish the processes of CWW.

- (1) Let  $s_\alpha, s_\beta \in \bar{S}$  be any two linguistic terms and  $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$ .
- (2)  $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$
- (3)  $(s_\alpha)^{\mu_1} \otimes (s_\alpha)^{\mu_2} = (s_\alpha)^{\mu_1 + \mu_2}$
- (4)  $(s_\alpha \otimes s_\beta)^\mu = (s_\alpha)^\mu \otimes (s_\beta)^\mu$
- (5)  $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$
- (6)  $s_\alpha \oplus s_\beta = s_{\alpha + \beta}$
- (7)  $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha$
- (8)  $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$
- (9)  $(\mu_1 + \mu_2)s_\alpha = \mu_1 s_\alpha \oplus \mu_2 s_\alpha$
- (10)  $\mu(s_\alpha \oplus s_\beta) = \mu s_\alpha \oplus \mu s_\beta$

Example 3.7. Let us suppose the example presented previously to compute the arithmetic mean with this model, it is necessary to apply the above operational laws to the linguistic terms:

The arithmetic mean according to Xu is defined as

$$\bar{x}^e = \frac{\sum_{i=1}^n s_i}{n} = \frac{1}{n} s_{\sum_{i=1}^n i}. \tag{4}$$

The preference vector is aggregated and the result obtained is the following:

$$\bar{x} = \frac{1}{4} s_{(2+4+3+1)} = \frac{1}{4} s_{10} = s_{2.5}.$$

We can see that the result obtained is a virtual linguistic term that does not have assigned any semantics either proper linguistic syntax. Therefore, this computational model does not follow the CWW scheme shown in Figure 1, because the output is not linguistic.

3.3 Proportional 2-tuple linguistic model

Wang and Hao (2006) presented the proportional 2-tuple linguistic model that tries to generalize and extend the 2-tuple linguistic model (Herrera and Martínez 2000). This model deals with the linguistic terms in a precise way when the support of the linguistic terms has the same width. But it does not require that the labels are symmetrically distributed around a medium label.

3.3.1 Representation model

This model represents the linguistic information by means of a proportional 2-tuple, such as (0.3A, 0.7B) that means a value of 30%A and 70%B. The authors remark that if B were used as the approximative grade, then some performance information would be lost. This approach is based on the concept of symbolic proportion (Wang and Hao 2006).



Figure 1. CWW scheme.

CWW has been and still is a key methodology in linguistic decision making (Martínez et al. 2010) not only since Zadeh (1996) coined it, but also since the early 1980s, when different researchers such as Tong and Bonissone (1980), Schmucker (1984), and Yager (1981) started to propose different computing schemes to operate with linguistic information. Such schemes are quite similar and keep a structure in which the input linguistic information should be mapped into fuzzy set models and the results should be expressed into linguistic information, which are easy to understand by human beings (see Figure 1). Yager points out the importance of the processes of translation and retranslation in CWW (Yager 1999, 2004). The former translates the linguistic inputs into a machine manipulative format based on fuzzy tools in which the computations are carried out, and the latter consists of converting the computing results into linguistic information again to facilitate the comprehension of the human beings (i.e. one of the main objectives of CWW).

Consequently, different symbolic linguistic computing models have been developed and applied as computational basis to CWW in linguistic decision making (Degani and Bortolan 1988; Herrera and Herrera-Viedma 2000; Herrera and Martínez 2000; Xu 2004; Wang and Hao 2006).

In this paper, we present a comparative study of different symbolic linguistic computing models (Herrera and Herrera-Viedma 2000; Herrera and Martínez 2000; Xu 2004; Wang and Hao 2006) widely used in linguistic decision making (Martínez et al. 2006; Chang et al. 2007; Önüt and Soner 2008; Fan et al. 2009; de Andrés et al. 2010). In this paper, we analyse their features regarding the CWW scheme as shown in Figure 1 in order to check if such computing models may be considered in the CWW paradigm.

The paper is structured as follows: Section 2 overviews CWW and its use in decision making. Section 3 reviews both linguistic and computational modellings of symbolic linguistic computing models that are most widely used in linguistic decision making. Section 4 carries out a comparative analysis among the different linguistic computational models by using a linguistic decision making problem, and finally some concluding remarks are pointed out.

## 2. Decision making and CWW

This section overviews the relationship between the fuzzy linguistic approach and CWW and its computational basis together with its application to linguistic decision making.

### 2.1 Fuzzy linguistic approach

In many real decision situations, the use of linguistic information is straightforward due to the nature of different aspects of the decision problem. In such situations one common approach to model the linguistic information is the fuzzy linguistic approach (Zadeh 1975a,b,c) that uses the fuzzy set theory (Zadeh 1965) to manage the uncertainty and model the information.

Zadeh (1975a) introduced the concept of linguistic variable as ‘a variable whose values are not numbers but words or sentences in a natural or artificial language’. A linguistic value is less precise than a number but it is closer to human cognitive

130

R.M. Rodríguez and L. Martínez

DEFINITION 3.8 (WANG AND HAO 2006). Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be an ordinal term set,  $I = [0, 1]$  and

$$IS \equiv I \times S = \{(\alpha, s_i) : \alpha \in [0, 1] \text{ and } i = 0, \dots, g\}, \quad (5)$$

where  $S$  is the ordered set of  $g + 1$  ordinal terms  $\{s_0, \dots, s_g\}$ . Given a pair  $(s_i, s_{i+1})$  of two successive ordinal terms of  $S$ , any two elements  $(\alpha, s_i), (\beta, s_{i+1})$  of  $IS$  is called a symbolic proportion pair and  $\alpha$  and  $\beta$  are called a pair of symbolic proportions of the pair  $(s_i, s_{i+1})$  if  $\alpha + \beta = 1$ . A symbolic proportion pair  $(\alpha, s_i), (1 - \alpha, s_{i+1})$  is denoted by  $(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1})$  and the set of all the symbolic proportion pairs is denoted by  $\bar{S}$ , i.e.

$$\bar{S} = \{(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1}) : \alpha \in [0, 1] \text{ and } i = 0, 1, \dots, g - 1\}.$$

*Remark 2.* Since for  $i = \{2, \dots, g - 1\}$ , ordinal term  $s_i$  can use either  $(0s_{i-1}, 1s_i)$  or  $(1s_i, 0s_{i+1})$  as its representative in  $\bar{S}$ , by abuse of notation.  $\bar{S}$  is called the ordinal proportional 2-tuple set generated by  $S$  and the members of  $\bar{S}$ , ordinal proportional 2-tuple, which is used to represent the ordinal information for CWW.

The representation of proportional 2-tuple allows experts to express their assessments or preferences by using two adjacent ordinals.

Similarly to the 2-tuple linguistic model (Herrera and Martínez 2000), Wang and Hao defined several functions to facilitate operations with this type of representation.

DEFINITION 3.9 (WANG AND HAO 2006). Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be an ordinal term set and  $\bar{S}$  be the ordinal proportional 2-tuple set generated by  $S$ . The function  $\pi : \bar{S} \rightarrow [0, g]$  is defined by

$$\pi(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1}) = i + (1 - \alpha), \quad (6)$$

where  $i = \{0, \dots, g - 1\}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , and  $\pi$  is called the position index function of ordinal 2-tuple.

The position index function  $\pi$  becomes a bijection from  $\bar{S}$  to  $[0, g]$  and its inverse  $\pi^{-1} : [0, g] \rightarrow \bar{S}$  is defined by

$$\pi^{-1}(x) = ((1 - \beta) s_i, \beta s_{i+1}), \quad (7)$$

where  $i = E(x)$ ,  $E$  is the integer part function, and  $\beta = x - i$ .

This model does not have either assigned any semantics, because it uses the proportion of two consecutive linguistic terms to represent the linguistic information.

### 3.3.2 Computational model

Wang and Hao (2006) defined different operations to compute with linguistic information.

#### (1) Comparison of proportional 2-tuple

The comparison of linguistic information represented by proportional 2-tuple is carried out as follows:

Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be an ordinal term set and  $\bar{S}$  be the ordinal proportional 2-tuple set generated by  $S$ . For any  $(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta) s_{j+1}) \in \bar{S}$ , defines

$$(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta) s_{j+1}) \Leftrightarrow \alpha i + (1 - \alpha)(i + 1)$$

$$< \beta j + (1 - \beta)(j + 1) \Leftrightarrow i + (1 - \alpha) < j + (1 - \beta).$$

Thus, for any two proportional 2-tuple  $(\alpha s_i, (1 - \alpha) s_{i+1})$  and  $(\beta s_j, (1 - \beta) s_{j+1})$ :

- If  $i < j$ , then
  - (a)  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  represents the same information when  $i = j - 1$  and  $\alpha = 0, \beta = 1$ ,
  - (b)  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  otherwise.
- If  $i = j$ , then
  - (a) if  $\alpha = \beta$  then  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}), (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$  represents the same information,
  - (b) if  $\alpha < \beta$  then  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) < (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$ ,
  - (c) if  $\alpha > \beta$  then  $(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) > (\beta s_j, (1 - \beta)s_{j+1})$ .

(2) Negation operator of a proportional 2-tuple

The negation for proportional 2-tuple is defined as

$$Neg(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) = ((1 - \alpha)s_{g-i-1}, \alpha s_{g-i}), \quad (8)$$

where  $g + 1$  is the cardinality of  $S, S = \{s_0, \dots, s_g\}$

(3) Proportional 2-tuple aggregation operators

Different aggregation operators were defined by Wang and Hao to carry out processes of CWW. The definitions of these aggregation operators are based on canonical characteristic values of linguistic labels. To do so, they used the similar corresponding aggregation operators developed in Herrera and Martínez (2000) in order to aggregate ordinal 2-tuple through their position indexes (Wang and Hao 2006).

*Example 3.10.* Following the previous example applied to proportional 2-tuple linguistic model.

- The arithmetic mean according to Wang and Hao is defined as follows:

$$\bar{x} = \pi^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \pi(\alpha s_i, (1 - \alpha)s_{i+1}) \right) = \pi^{-1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (i + (1 - \alpha)) \right). \quad (9)$$

- The preference vector is transformed into proportional 2-tuple as follows:

$$(1l, 0m) \quad (1h, 0vh) \quad (1m, 0h) \quad (1vl, 0l)$$

- The result obtained under ordinal proportional 2-tuple contexts is

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \pi^{-1} \left( \frac{1}{4} (\pi(1l, 0m) + \pi(1h, 0vh) + \pi(1m, 0h) + \pi(1vl, 0l)) \right) \\ &= \pi^{-1} \left( \frac{1}{4} (2 + 4 + 3 + 1) \right) \\ &= \pi^{-1}(2.5) \\ &= ((1 - 0.5)l, 0.5m) \\ &= (0.5l, 0.5m). \end{aligned}$$

**4. Comparative analysis**

In this section, we carry out a comparative analysis among the different symbolic linguistic computing models introduced in Section 3 by applying them to the solving

process of a linguistic decision problem. The aim of such a comparative analysis is to analyse if all revised symbolic linguistic computing models can be considered in the paradigm of CWW according to the scheme shown in Figure 1.

**4.1 Solving a linguistic decision-making problem by different symbolic linguistic computing models**

Let us suppose that a conference committee  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  compound by four scientists wants to grant a best paper award. To do so, scientists provide their opinions on the set of alternatives  $X = \{x_1 = \text{author 1's paper}, x_2 = \text{author 2's paper}, x_3 = \text{author 3's paper}, x_4 = \text{author 4's paper}\}$ , which are assessed by using the linguistic term set  $S = \{s_0 : \text{nothing } (n), s_1 : \text{very low } (vl), s_2 : \text{low } (l), s_3 : \text{medium } (m), s_4 : \text{high } (h), s_5 : \text{very high } (vh), s_6 : \text{perfect } (p)\}$ , (see Figure 2). Each scientist provides a preference vector (see Table 1), where  $\mu_{i,j}$  is the degree of preference that the scientist,  $e_i$ , provides regarding the alternative,  $x_j$ .

Using the solving process of the linguistic decision problem presented in Section 2.2 in which the aggregation process is carried out without loss of generality by an arithmetic mean operator. Each one of the different symbolic linguistic computing models revised in Section 3 obtains the results shown in Table 2.

The fuzzy representation of the results obtained by the 2-tuple linguistic model is shown in Figure 5, whereas that the virtual linguistic model and the proportional 2-tuple linguistic model do not have any fuzzy representation. Therefore, it is not possible to represent their semantics graphically.

Even though the final solution is the same one,  $x_1$ , as can be observed in Table 2. Our aim was to analyse other features about the symbolic linguistic computing models that are further detailed in the following section.

**4.2 Comparative study**

This comparative analysis studies if the symbolic linguistic computing models revised in Section 3 and applied to the previous decision problem are based on the fuzzy linguistic

Table 1. Scientists preferences.

	Alternatives (papers)				
	$\mu_{ij}$	Author 1	Author 2	Author 3	Author 4
Scientists	$e_1$	<i>l</i>	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>l</i>
	$e_2$	<i>m</i>	<i>h</i>	<i>l</i>	<i>n</i>
	$e_3$	<i>h</i>	<i>vh</i>	<i>h</i>	<i>vl</i>
	$e_4$	<i>h</i>	<i>h</i>	<i>vh</i>	<i>l</i>

Table 2. Solution of the LDM problem with different symbolic linguistic computing models.

	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$
2-Tuple	$(m, 0.25)$	$(m, -0.5)$	$(l, 0.25)$	$(m, -0.25)$
Virt. ling.	$(s_{3.25})$	$(s_{2.5})$	$(s_{2.25})$	$(s_{2.75})$
Prop. 2-tuple	$(0.75m, 0.25h)$	$(0.5l, 0.5m)$	$(0.75l, 0.25m)$	$(0.25l, 0.75m)$

Table 3. Comparative analysis of the symbolic linguistic computing models.

	2-Tuple model	Virtual model	Prop. 2-tuple model
Representation	Fuzzy	No fuzzy	No fuzzy
Com. model	Linguistic	No linguistic	Linguistic
Accuracy	Symmetrically distributed	Always, no semantic	Same width
Comprehension	Easy to understand	Useful for ordering	Understandable

approach and can be considered in the CWW paradigm, such as their authors claim. To do so, different features of the symbolic linguistic computing models regarding their representation, accuracy, and comprehension of the results are studied. Table 3 summarizes such features of the different models based on the results obtained in the decision problem solved in Section 4.1.

Therefore, we conclude regarding each analyzed feature in Table 3, the below results:

- (i) Fuzzy representation
  - *Virtual linguistic model*: As we can observe in Table 2, the results obtained in the linguistic decision problem by the virtual linguistic model (Xu 2004) cannot be represented in a fuzzy way, because Xu does not provide a syntax either any fuzzy semantics representation for the virtual linguistic terms. Therefore, this model is not based on the fuzzy linguistic approach (Zadeh 1975a,b,c) and cannot be considered in the CWW paradigm.
  - *Proportional 2-tuple linguistic model*: The results obtained with this model (Wang and Hao 2006) have assigned a linguistic syntax, but they do not have any fuzzy representation, because they are represented by using the proportions of two consecutive linguistic terms. So, the proportional 2-tuple linguistic model cannot be either considered inside of the CWW paradigm.
  - *2-Tuple linguistic model*: In Figure 5, we can see that the results obtained by 2-tuple linguistic model have assigned fuzzy semantics and syntax. Therefore, they keep a fuzzy representation of the linguistic information. Consequently, we can say that the 2-tuple linguistic model is the only one out of the three revised models that is based on the fuzzy linguistic approach and can be considered in the CWW paradigm from the fuzzy representation point of view.
- (ii) Accuracy
  - *Virtual linguistic model*. The computational model of the virtual linguistic model is accurate in any term set, because it does not use semantics in the term set. Besides, the results obtained in the computing processes can be values that are out of the universe of discourse of the linguistic variable.

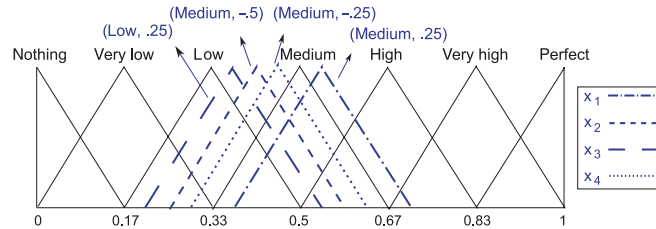


Figure 5. Results of the 2-tuple linguistic model for the linguistic decision making problem.

- *Proportional 2-tuple linguistic model.* The results obtained in the computing processes are accurate when the terms have the same width in their support. Such results just can be values that are in the universe of discourse of the linguistic variable.
  - *2-Tuple linguistic model.* Its computational model is accurate when the labels are symmetrically distributed around a medium label as is shown in Figure 2. The results obtained in the computing processes just can be values that are in the universe of discourse of the linguistic variable.
- (iii) Comprehension
- *Virtual linguistic model.* Analysing the results obtained in Table 2, we observe that the virtual model obtains values difficult to understand, because they are not linguistic.
  - *Proportional 2-tuple linguistic model.* This model obtains qualitative results easy to understand, because they because they have assigned syntax. However, if we compare the results obtained with this model and the 2-tuple linguistic model, the results obtained with this model are a little bit more complex, because it uses four values to express just one valuation.
  - *2-Tuple linguistic model.* As we can see in Table 2, the results obtained with this model are easy to understand, because they are represented by means of a linguistic term and a numerical value.

As we aforementioned, the 2-tuple linguistic model is the only model, of the revised ones, based on the fuzzy linguistic approach, since it keeps a syntax and fuzzy semantics in its representation. It is also the only one that can be considered in the CWW paradigm. Its computational model provides accurate and understandable results for human beings. For these reasons, it seems the most adequate symbolic linguistic computing model to deal with linguistic information in decision problems.

## 5. Conclusions

The modelling of the linguistic information to carry out the processes of CWW is crucial in decision problems. Many proposals have been provided to accomplish such processes of CWW. This contribution has reviewed different symbolic linguistic computing models, such as the 2-tuple linguistic model, the virtual linguistic model, and the proportional 2-tuple linguistic model, which have been widely applied to linguistic decision making problems, in order to carry out a comparative analysis among them.

Analysing the results obtained with such models, it has been shown that the 2-tuple linguistic model keeps the syntax and fuzzy semantics in its results, whereas the other two models do not keep them. Therefore, the 2-tuple linguistic model is the only one considered in the CWW paradigm. Additionally, its computational model provides accurate and understandable results because they are represented by means of a linguistic term and a numerical value.

## Acknowledgements

This work is partially supported by the Research Project TIN-2009-08286 and FEDER funds.

**Notes on contributors**



**Rosa M. Rodríguez** received her M.Sc. degree in Computer Science from the University of Jaén, Spain, in 2008. She is currently a Ph.D. student at the Department of Computer Science, University of Jaén, Jaén, Spain. Her research interests include linguistic preference modelling, decision making and fuzzy logic.



**Luis Martínez** received his M.Sc. and Ph.D. degrees in Computer Science from the University of Granada, Spain, in 1993 and 1999, respectively. He is currently a Professor in the Department of Computer Science, and Director of the Advanced Research Center in IT at the University of Jaén, Jaén, Spain. He currently acts as Editor-in-Chief of the *International Journal of Computational Intelligence Systems* and serves on the Editorial Board of *Soft Computing* and *Journal of Universal Computer Sciences*. His current research interests are linguistic preference modelling, decision making, fuzzy logic-based systems, computer-aided learning, sensory evaluation, recommender systems, and e-commerce. He has co-edited eight journal special issues on fuzzy preference modelling, fuzzy sets theory, and recommender systems.

**References**

Anagnostopoulos, K., Doukas, H., and Psarras, J. (2008), 'A linguistic multicriteria analysis system combining fuzzy sets theory, ideal and anti-ideal points for location site selection,' *Expert Systems With Applications*, 35, 4, 2041–2048.

Bonissone, P., and Decker, K. (1986), 'Selecting uncertainty calculi and granularity: An experiment in trading-off precision and complexity,' in *Uncertainty in Artificial Intelligence*, New York: Elsevier Science, North-Holland Publishing Company, pp. 217–247.

Chang, S.L., Wang, R.C., and Wang, S.Y. (2007), 'Applying a direct multi-granularity linguistic and strategy-oriented aggregation approach on the assessment of supply performance,' *European Journal of Operational Research*, 177, 2, 1013–1025.

de Andrés, R., Espinilla, M., and Martínez, L. (2010), 'An extended hierarchical linguistic model for managing integral evaluation,' *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3, 4, 486–500.

Degani, R., and Bortolan, G. (1988), 'The problem of linguistic approximation in clinical decision making,' *International Journal of Approximate Reasoning*, 2, 143–162.

Delgado, M., Verdegay, J., and Vila, M. (1993), 'On aggregation operations of linguistic labels,' *International Journal of Intelligent Systems*, 8, 3, 351–370.

Delgado, M., Vila, M., and Voxman, W. (1999), 'On a canonical representation of fuzzy numbers,' *Fuzzy Sets and Systems*, 93, 1, 125–135.

Dubois, D., and Prade, H. (1980), *Fuzzy sets and systems: Theory and applications*, New York: Kluwer Academic.

Evangelos, T. (2000), *Multi-criteria decision making methods: A comparative study*, Dordrecht: Kluwer Academic.

Fan, Z.P., Feng, B., Sun, Y.H., and Ou, W. (2009), 'Evaluating knowledge management capability of organizations: A fuzzy linguistic method. Part 2,' *Expert Systems With Applications*, 36, 2, 3346–3354.

Fu, G. (2008), 'A fuzzy optimization method for multicriteria decision making: An application to reservoir flood control operation,' *Expert Systems With Applications*, 34, 1, 145–149.

Herrera, F., and Herrera-Viedma, E. (2000), 'Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information,' *Fuzzy Sets and Systems*, 115, 67–82.

- Herrera, F., and Martínez, L. (2000), 'A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words,' *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, 6, 746–752.
- Herrera, F., Herrera-Viedma, E., and Verdegay, J. (1995), 'A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach,' *Information Sciences*, 85, 4, 223–239.
- Ishibuchi, H., Nakashima, T. and Nii, M. (2004), *Classification and modeling with linguistic information granules: Advanced approaches to linguistic data mining*, Berlin: Springer.
- Lu, J., Zhang, G., Ruan, D., and Wu, F. (2007), *Multi-objective group decision making. Methods, software and applications with fuzzy set techniques*, London: Imperial College Press.
- Martínez, L. (2007), 'Sensory evaluation based on linguistic decision analysis,' *International Journal of Approximate Reasoning*, 44, 2, 148–164.
- Martínez, L., Liu, J. and Yang, J.B. (2006), 'A fuzzy model for design evaluation based on multiple criteria analysis in engineering systems,' *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14, 3, 317–336.
- Martínez, L., et al. (2009), 'Linguistic decision making: Tools and applications,' *Information Sciences*, 179, 14, 2297–2298.
- Martínez, L., Ruan, D., and Herrera, F. (2010), 'Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications,' *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3, 4, 382–395.
- Mendel, J., et al. (2010), 'What computing with words means to me,' *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 5, 1, 20–26.
- Önüt, S., and Soner, S. (2008), 'Transshipment site selection using the AHP and TOPSIS approaches under fuzzy environment,' *Waste Management*, 28, 9, 1552–1559.
- Pedrycz, W., and Mingli, S. (2011), 'Analytic hierarchy process (AHP) in group decision making and its optimization with an allocation of information granularity,' *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19, 3, 527–539.
- Roubens, M. (1997), 'Fuzzy sets and decision analysis,' *Fuzzy Sets and Systems*, 90, 199–206.
- Schmucker, K. (1984), *Fuzzy sets, natural language computations, and risk analysis*, Rockville, MD: Computer Science Press.
- Tong, R., and Bonissone, P. (1980), 'A linguistic approach to decision making with fuzzy sets,' *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-10, 11, 716–723.
- Wang, J., and Hao, J. (2006), 'A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words,' *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14, 3, 435–445.
- Xu, Z. (2004), 'A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations,' *Information Sciences*, 166, 1–4, 19–30.
- Yager, R. (1981), 'A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets,' *Decision Sciences*, 12, 4, 589–600.
- Yager, R. (1995), 'An approach to ordinal decision making,' *International Journal of Approximate Reasoning*, 12, 3–4, 237–261.
- Yager, R. (1999), 'Approximate reasoning as a basis for computing with words,' in *Computing with Words and Information/Intelligent Systems 2: Applications*, Heidelberg: Physica Verlag, pp. 50–77.
- Yager, R. (2004), 'On the retranslation process in Zadeh's paradigm of computing with words,' *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part B: Cybernetics*, 34, 2, 1184–1195.
- Zadeh, L. (1965), 'Fuzzy sets,' *Information and Control*, 8, 338–353.
- Zadeh, L. (1975a), 'The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part I,' *Information Sciences*, 8, 3, 199–249.
- Zadeh, L. (1975b), 'The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part II,' *Information Sciences*, 8, 4, 301–357.
- Zadeh, L. (1975c), 'The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Part III,' *Information Sciences*, 9, 1, 43–80.
- Zadeh, L. (1996), 'Fuzzy logic=computing with words,' *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 94, 2, 103–111.
- Zadeh, L., and Kacprzyk, J., (eds.) (1999a), *Computing with Words in Information/Intelligent System. (Foundations)* (Vol. 33). Studies in Fuzziness and Soft Computing. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Zadeh, L., and Kacprzyk, J., (eds.) (1999b), *Computing with Words in Information/Intelligent System. (Applications)* (Vol. 34). Studies in Fuzziness and Soft Computing. Heidelberg: Springer-Verlag.



## B.5. Linguistic Information Modelling in Hesitant Contexts

Usually, the complexity of decision making problems is because of the uncertainty that surrounds the alternatives and the knowledge experts. One of the main topics in decision making is the modelling and treatment of the uncertainty of the different types of information that can be used by experts to provide their preferences. Our research focuses on decision making problems in qualitative contexts with high degree of uncertainty [107], where experts usually use linguistic information to express their preferences. The use of linguistic information has provided reliable and successful results in this type of decision making problems, but sometimes limited because the linguistic models use single-valued and predefined terms that restrict the richness of eliciting freely preferences to the experts [100, 141].

To overcome these limitations, different linguistic models have been introduced in the literature [100, 141, 149] to provide richer expressions than single linguistic terms, but they are either far away from the common language used by experts in decision making problems or not systematically defined. They are revised in the attached paper in Section B.6.

Therefore, in this section it is presented a new linguistic model to represent multiple linguistic terms and facilitate the computing with words processes. Besides, a tool is introduced to generate expressions close to human beings cognitive model in decision making problems.

Afterwards, we attach the paper *Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making*, published in *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, which introduces such a proposal.



## Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making

Rosa M. Rodríguez, Luis Martínez, and Francisco Herrera, *Member, IEEE*

**Abstract**—Dealing with uncertainty is always a challenging problem, and different tools have been proposed to deal with it. Recently, a new model that is based on hesitant fuzzy sets has been presented to manage situations in which experts hesitate between several values to assess an indicator, alternative, variable, etc. Hesitant fuzzy sets suit the modeling of quantitative settings; however, similar situations may occur in qualitative settings so that experts think of several possible linguistic values or richer expressions than a single term for an indicator, alternative, variable, etc. In this paper, the concept of a hesitant fuzzy linguistic term set is introduced to provide a linguistic and computational basis to increase the richness of linguistic elicitation based on the fuzzy linguistic approach and the use of context-free grammars by using comparative terms. Then, a multicriteria linguistic decision-making model is presented in which experts provide their assessments by eliciting linguistic expressions. This decision model manages such linguistic expressions by means of its representation using hesitant fuzzy linguistic term sets.

**Index Terms**—Context-free grammar, fuzzy linguistic approach, hesitant fuzzy sets, linguistic decision making, linguistic information.

### I. INTRODUCTION

**P**ROBLEMS that are defined under uncertain conditions are common in real-world decision-making problems but are quite challenging because of the difficulty of modeling and coping with such uncertainty. Different tools have been used to solve problems, such as probability; however, in many situations, uncertainty is not probabilistic in nature but, rather, imprecise or vague. Hence, other models, such as fuzzy logic and fuzzy sets theory [6], [39], have been successfully applied to handle imperfect, vague, and imprecise information [26]. Nevertheless, to handle vague and imprecise information whereby two or more sources of vagueness appear simultaneously, the modeling tools of ordinary fuzzy sets are limited. For this reason, different generalizations and extensions of fuzzy sets have been introduced.

Manuscript received January 31, 2011; revised April 27, 2011 and August 2, 2011; accepted August 19, 2011. Date of publication September 29, 2011; date of current version February 7, 2012. This work was supported in part under the Research Project TIN-2009-08286 and P08-TIC-3548 and by the European fund for regional development.

R. M. Rodríguez and L. Martínez are with the Department of Computer Science, University of Jaén, Jaén 23071, Spain (e-mail: rmdrodrig@ujaen.es; martin@ujaen.es).

F. Herrera is with the Department of Computer Science and Artificial Intelligence, University of Granada, Granada 18071, Spain (e-mail: herrera@decsai.ugr.es).

Digital Object Identifier 10.1109/TFUZZ.2011.2170076

- 1) *Type-2 fuzzy sets* [6], [24] and *type-n fuzzy sets* [6] that incorporate uncertainty about the membership function in their definition.
- 2) *Nonstationary fuzzy sets* [8] that introduce into the membership functions a connection that expresses a slight variation in the membership function.
- 3) *Intuitionistic fuzzy sets* [1] that extend fuzzy sets by an additional degree, which is called the degree of uncertainty.
- 4) *Fuzzy multisets* [37] based on multisets that allow repeated elements in the set.
- 5) *Hesitant fuzzy sets (HFS)* that have been recently introduced in [32] provide a very interesting extension of fuzzy sets. They try to manage those situations, where a set of values are possible in the definition process of the membership of an element.

The previous fuzzy tools suit problems that are defined as quantitative situations, but uncertainty is often because of the vagueness of meanings that are used by experts in problems whose nature is rather qualitative. In such situations, the fuzzy linguistic approach [40]–[42] has provided very good results in many fields and applications [2], [13], [18], [20], [27], [36]. However, in a similar way to the fuzzy sets, the use of the fuzzy linguistic approach presented some limitations, mainly regarding information modeling and computational processes, which are called processes of computing with words (CW) [9], [15], [21], [23]. Different linguistic models have tried to extend and improve the fuzzy linguistic approach from both points of view.

- 1) *The linguistic model based on type-2 fuzzy sets* representation [22], [33], [43] that represents the semantics of the linguistic terms by type-2 membership functions and using interval type-2 fuzzy sets for CW.
- 2) *The linguistic 2-tuple model* [12] that adds a parameter to the linguistic representation that is known as *symbolic translation*, which keeps the accuracy in the processes of CW.
- 3) *The proportional 2-tuple model* [34] that generalizes and extends the 2-tuple model by using two linguistic terms with their proportion to model the information and performs the processes of CW more accurately.
- 4) Other extensions that are based on previous ones introduced in [5] and [17].

By the revision of the fuzzy linguistic approach and the different linguistic extensions and generalizations, it is observed that the modeling of linguistic information is still quite *limited*, mainly because it is based on the elicitation of single and very simple terms that should encompass and express the information provided by the experts regarding a linguistic variable.

However, in different situations, the experts that are involved in the problems defined under uncertainty cannot easily provide a single term as an expression of his/her knowledge, because he/she is thinking of several terms at the same time or looking for a more complex linguistic term that is not usually defined in the linguistic term set.

Therefore, we work with a view to overcome such limitations, taking into account the idea under the concept of HFS introduced in [32] to deal with several values in a membership function in a quantitative setting. In this paper, we propose the concept of *hesitant fuzzy linguistic term set* (HFLTS), based on the fuzzy linguistic approach, that will serve as the basis of increasing the flexibility of the elicitation of linguistic information by means of linguistic expressions. Additionally, different computational functions and properties of HFLTS are introduced, and we then present how they can be used to improve the elicitation of linguistic information by using the fuzzy linguistic approach and context-free grammars. This is very important because it allows us to use different expressions to represent decision makers' knowledge/preferences in decision making.

In order to answer the question:

*How is the concept of HFLTS and its use in decision making justified?*

We present a multicriteria linguistic decision-making model in which experts provide their assessments by means of linguistic expressions based on comparative terms close to the expressions used by human beings. This decision model manages the linguistic expressions that are represented by HFLTS. We propose the use of two symbolic aggregation operators that allow us to obtain a linguistic interval, which is associated with each alternative, and an exploitation process based on the application of the nondominance choice degree to a preference relation that is obtained from the previous linguistic intervals.

We are only aware of two papers on linguistic decision making that use linguistic expressions instead of single terms [19], [30]. In [30], the authors presented a linguistic model that dealt with linguistic expressions generated by applying logical connectives to the linguistic terms. In [19], the authors introduced the concepts of determinacy and consistency of linguistic terms in multicriteria decision-making problems and presented a model based on a fuzzy set in which decision makers could provide their assessments by using several linguistic terms and the reliability degree of each term. These proposals are not very close to human beings' cognitive processes and they are simpler than the model proposed in this paper, that uses linguistic expressions based on comparative terms.

The paper is organized as follows. In Section II, we briefly review some preliminary concepts that will be used in the HFLTS proposal. In Section III, we introduce the concept of HFLTS and several basic properties and operations to carry out the processes of CW. In Section IV, we present the use of HFLTS to facilitate and increase flexibility to elicit linguistic information. In Section V, we present a multicriteria linguistic decision-making model and define two symbolic aggregation operators to accomplish the processes of CW by using linguistic intervals. An illustrative example is also introduced in this section. In Section VI, we make some concluding remarks and suggest fu-

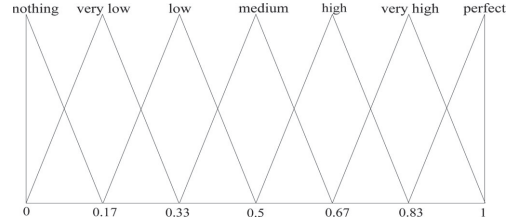


Fig. 1. Set of seven terms with its semantics.

ture research in this area. Appendix A contains a brief review of several necessary concepts to compare HFLTS, and Appendix B contains some definitions to build a preference relation between numeric intervals.

## II. PRELIMINARIES

Due to the fact that our proposal is based on the fuzzy linguistic approach [40]–[42] and HFS [32], in this section, we review their main concepts, necessary to understand the proposal of HFLTS and its use.

### A. Fuzzy Linguistic Approach

In many real decision situations, the use of linguistic information is suitable and straightforward because of the nature of different aspects of the problem. In such situations, one common approach to model the linguistic information is the fuzzy linguistic approach [40]–[42] that uses the fuzzy sets theory [39] to manage the uncertainty and model the information.

In [40]–[42], Zadeh introduced the concept of linguistic variable as “a variable whose values are not numbers but words or sentences in a natural or artificial language.” A linguistic value is less precise than a number, but it is closer to human cognitive processes that are used to successfully solve problems dealing with uncertainty. A linguistic variable is formally defined as follows.

*Definition 1:* [40]. A linguistic variable is characterized by a quintuple  $(H, T(H), U, G, M)$  in which  $H$  is the name of the variable;  $T(H)$  (or simply  $T$ ) denotes the term set of  $H$ , i.e., the set of names of linguistic values of  $H$ , with each value being a fuzzy variable that is denoted generically by  $X$  and ranging across a universe of discourse  $U$ , which is associated with the base variable  $u$ ;  $G$  is a syntactic rule (which usually takes the form of a grammar) for the generation of the names of values of  $H$ ; and  $M$  is a semantic rule for associating its meaning with each  $H$ ,  $M(X)$ , which is a fuzzy subset of  $U$ .

To deal with linguistic variables, it is necessary to choose the linguistic descriptors for the term set and their semantics. Fig. 1 shows a linguistic term set with the syntax and semantics of their terms.

There are different approaches to selecting the linguistic descriptors and different ways to define their semantics [38], [40]–[42]. The selection of the linguistic descriptors can be performed by means of the following.

- 1) *An ordered structure approach*: This defines the linguistic term set by means of an ordered structure providing the term set that is distributed on a scale at which a total order has been defined [10], [38]. For example, a set of seven terms,  $S$ , could be given as follows:

$$S = \{s_0 : \text{nothing}, s_1 : \text{very\_low}, s_2 : \text{low}, s_3 : \text{medium} \\ s_4 : \text{high}, s_5 : \text{very\_high}, s_6 : \text{perfect}\}.$$

In these cases, the existence of the following is usually required.

- a) A negation operator  $\text{Neg}(s_i) = s_j$  so that  $j = g - i$  ( $g + 1$  is the granularity of the term set).
  - b) A maximization operator:  $\text{Max}(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \geq s_j$ .
  - c) A minimization operator:  $\text{Min}(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \leq s_j$ .
- 2) *A context-free grammar approach*: This defines the linguistic term set by means of a context-free grammar  $G$  so that the linguistic terms are the sentences that are generated by  $G$  [3], [4], [40]–[42]. A grammar  $G$  is a 4-tuple  $(V_N, V_T, I, P)$ , where  $V_N$  is the set of nonterminal symbols,  $V_T$  is the set of terminals' symbols,  $I$  is the starting symbol, and  $P$  is the production rules that are defined in an extended Backus–Naur form [4]. Among the terminal symbols of  $G$ , we can find primary terms (e.g., low, medium, high), hedges (e.g., not, much, very), relations (e.g., lower than, higher than), conjunctions (e.g., and, but), and disjunctions (e.g., or). Thus, choosing  $I$  as any nonterminal symbol and using  $P$  could be generated linguistic expressions, such as, {lower than medium, greater than high, ...}.

The definition of their semantics can be accomplished as in [38] and [40]–[42] as follows.

- 1) *Semantics based on membership functions and a semantic rule*: This approach assumes that the meaning of each linguistic term is given by means of a fuzzy subset that is defined in the interval  $[0, 1]$ , which is described by membership functions [4]. This semantic approach is used when the linguistic descriptors are generated by means of a context-free grammar. Thus, it contains two elements: a) the primary fuzzy sets that are associated with the primary linguistic terms and b) a semantic rule  $M$  that provides the fuzzy sets of the nonprimary linguistic terms [40]–[42].
- 2) *Semantics based on an ordered structure of the linguistic term set*: It introduces the semantics from the structure that is defined over the linguistic term set. Therefore, the users provide their assessments by using an ordered linguistic term set [31], [38]. The distribution of a linguistic term set on a scale  $[0, 1]$  can be distributed symmetrically [38] or nonsymmetrically [11], [31].
- 3) *Mixed semantics*: This assumes elements from the aforementioned semantic approaches.

### B. Hesitant Fuzzy Sets

In [32], the author introduced a new extension for fuzzy sets to manage those situations in which several values are possible for

the definition of a membership function of a fuzzy set. Although this situation might be modeled by fuzzy multisets, they are not completely adequate for these situations.

An HFS is defined in terms of a function that returns a set of membership values for each element in the domain [32].

*Definition 2*: Let  $X$  be a reference set, an HFS on  $X$  is a function  $h$  that returns a subset of values in  $[0, 1]$ :

$$h : X \rightarrow \{\{0, 1\}\}.$$

Therefore, given a set of fuzzy sets an HFS is defined as the union of their membership functions.

*Definition 3*: Let  $M = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\}$  be a set of  $n$  membership functions. The HFS that is associated with  $M$ ,  $h_M$ , is defined as

$$h_M : M \rightarrow \{\{0, 1\}\} \\ h_M(x) = \bigcup_{\mu \in M} \{\mu(x)\}.$$

Some basic operations with the HFS were defined [32] as follows.

*Definition 4*: Given an HFS  $h$ , its lower and upper bounds are

$$h^-(x) = \min h(x) \\ h^+(x) = \max h(x).$$

*Definition 5*: Let  $h$  be an HFS, its complement is defined as

$$h^c(x) = \bigcup_{\gamma \in h(x)} \{1 - \gamma\}.$$

*Proposition 1*: [32]. The complement is involutive.

$$(h^c)^c = h.$$

*Definition 6*: Let  $h_1$  and  $h_2$  be two HFSs, their union is defined as

$$(h_1 \cup h_2)(x) = \{h \in (h_1(x) \cup h_2(x)) / h \geq \max(h_1^-, h_2^-)\}.$$

*Definition 7*: Let  $h_1$  and  $h_2$  be two HFS, their intersection is defined as

$$(h_1 \cap h_2)(x) = \{h \in (h_1(x) \cap h_2(x)) / h \leq \min(h_1^+, h_2^+)\}.$$

*Definition 8*: Let  $h$  be an HFS, the envelope of  $h$ ,  $A_{\text{env}(h)}$ , is defined as

$$A_{\text{env}(h)} = \{x, \mu_A(x), \nu_A(x)\}$$

with  $A_{\text{env}(h)}$  being the intuitionistic fuzzy set [1] of  $h$ , and  $\mu$  and  $\nu$  are, respectively, defined as

$$\mu_A(x) = h^-(x)$$

and

$$\nu_A(x) = 1 - h^+(x).$$

### III. HESITANT FUZZY LINGUISTIC TERM SETS

Similarly to the situations that are described and managed by HFS in [32], where an expert may consider several values to define a membership function, in the qualitative setting, it may occur that experts hesitate among several values to assess

a linguistic variable. The fuzzy linguistic approach is, however, aimed at statically assessing single linguistic terms for the linguistic variables. Hence, it is clear that, when experts hesitate about several values for a linguistic variable, the fuzzy linguistic approach is very limited. As pointed out in Section I, there are two proposals that use linguistic expressions instead of single terms [19], [30]. However, neither of them is adequate to fulfill the necessities and requirements of experts in hesitant situations.

Consequently, bearing in mind the idea under the HFS [32], in this section the concept of HFLTS, that is based on the fuzzy linguistic approach and the HFS is introduced. Some basic operations of HFLTS are then defined and some properties of such operations are revised.

#### A. Concept and Basic Operations

*Definition 9:* Let  $S$  be a linguistic term set,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , an HFLTS,  $H_S$ , is an ordered finite subset of the consecutive linguistic terms of  $S$ .

Let  $S$  be a linguistic term set,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , we then define the empty HFLTS and the full HFLTS for a linguistic variable  $\vartheta$  as follows.

- 1) empty HFLTS:  $H_S(\vartheta) = \{\}$ ,
- 2) full HFLTS:  $H_S(\vartheta) = S$ .

Any other HFLTS is formed with at least one linguistic term in  $S$ .

*Example 1:* Let  $S$  be a linguistic term set,  $S = \{s_0 : \text{nothing}, s_1 : \text{very\_low}, s_2 : \text{low}, s_3 : \text{medium}, s_4 : \text{high}, s_5 : \text{very\_high}, s_6 : \text{perfect}\}$ , a different HFLTS might be

$$H_S(\vartheta) = \{s_1 : \text{very\_low}, s_2 : \text{low}, s_3 : \text{medium}\}$$

$$H_S(\vartheta) = \{s_3 : \text{medium}, s_4 : \text{high}, s_5 : \text{very\_high}, s_6 : \text{perfect}\}.$$

Once the concept of HFLTS has been defined, it is necessary to introduce the computations and operations that can be performed on them.

Let  $S$  be a linguistic term set,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , and  $H_S$ ,  $H_S^1$ , and  $H_S^2$  be the three HFLTS.

*Definition 10:* The upper bound  $H_{S^+}$  and lower bound  $H_{S^-}$  of the HFLTS  $H_S$  are defined as

- 1)  $H_{S^+} = \max(s_i) = s_j$ ,  $s_i \in H_S$  and  $s_i \leq s_j \forall i$ ;
- 2)  $H_{S^-} = \min(s_i) = s_j$ ,  $s_i \in H_S$  and  $s_i \geq s_j \forall i$ .

*Definition 11:* The complement of HFLTS,  $H_S$ , is defined as

$$H_S^c = S - H_S = \{s_i/s_i \in S \text{ and } s_i \notin H_S\}.$$

*Proposition 2:* The complement of an HFLTS is involutive:

$$(H_S^c)^c = H_S.$$

*Proof:* By the use of the definition of a complement of an HFLTS

$$(H_S^c)^c = S - H_S^c = S - (S - H_S) = H_S.$$

*Definition 12:* The union between two HFLTS,  $H_S^1$  and  $H_S^2$ , is defined as

$$H_S^1 \cup H_S^2 = \{s_i/s_i \in H_S^1 \text{ or } s_i \in H_S^2\}$$

and the result will be another HFLTS.

*Definition 13:* The intersection of two HFLTS,  $H_S^1$  and  $H_S^2$ , is

$$H_S^1 \cap H_S^2 = \{s_i/s_i \in H_S^1 \text{ and } s_i \in H_S^2\}$$

and the result of this operation is another HFLTS.

The comparison of linguistic terms is necessary in many problems, and it has always been defined in different linguistic approaches. An HFLTS is a linguistic term subset, and the comparison among these elements is not simple. Therefore, we introduce the concept of *envelope* for an HFLTS in order to simplify these operations as shown later in the text.

*Definition 14:* The envelope of the HFLTS,  $\text{env}(H_S)$ , is a linguistic interval whose limits are obtained by means of upper bound (max) and lower bound (min). Hence

$$\text{env}(H_S) = [H_{S^-}, H_{S^+}], H_{S^-} - H_{S^+}.$$

*Example 2:* Let  $S = \{\text{nothing}, \text{very\_low}, \text{low}, \text{medium}, \text{high}, \text{very\_high}, \text{perfect}\}$  be a linguistic term set, and  $H_S = \{\text{high}, \text{very\_high}, \text{perfect}\}$  be an HFLTS of  $S$ , its envelope is

$$H_{S^-}(\text{high}, \text{very\_high}, \text{perfect}) = \text{high}$$

$$H_{S^+}(\text{high}, \text{very\_high}, \text{perfect}) = \text{perfect}$$

$$\text{env}(H_S) = [\text{high}, \text{perfect}].$$

*Definition 15:* The definition of the comparison between two HFLTS is based on the concept of the envelope of the HFLTS,  $\text{env}(H_S)$ . Hence, the comparison between  $H_S^1$  and  $H_S^2$  is defined as follows:

$$H_S^1(\vartheta) > H_S^2(\vartheta) \text{ iff } \text{env}(H_S^1(\vartheta)) > \text{env}(H_S^2(\vartheta))$$

$$H_S^1(\vartheta) = H_S^2(\vartheta) \text{ iff } \text{env}(H_S^1(\vartheta)) = \text{env}(H_S^2(\vartheta)).$$

Consequently, the comparison is conducted by interval values. In Appendix A, different approaches to comparing intervals are briefly reviewed and how to compare HFLTS is then clarified.

#### B. Properties

To conclude this section, some relevant properties of the HFLTS operations are reviewed.

Let  $H_S^1$ ,  $H_S^2$ , and  $H_S^3$  be three HFLTS, and  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ . Then

- 1) *Commutativity*

$$H_S^1 \cup H_S^2 = H_S^2 \cup H_S^1$$

$$H_S^1 \cap H_S^2 = H_S^2 \cap H_S^1.$$

*Proof of the union:*

$\subseteq$

Let  $s_i \in S$  be a linguistic value,  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ , then, by the definition of union,  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2$ ; if  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2$ , then  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^1$ .

$\supseteq$

Let  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^1$ , then,  $s_i \in H_S^2$  or  $s_i \in H_S^1$ ; if  $s_i \in H_S^2$  or  $s_i \in H_S^1$ , then  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ .

The demonstration of the intersection would be similar to the union.

2) *Associative*

$$\begin{aligned} H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3) &= (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3 \\ H_S^1 \cap (H_S^2 \cap H_S^3) &= (H_S^1 \cap H_S^2) \cap H_S^3. \end{aligned}$$

*Proof of the union:*

$\subseteq$   
Let  $s_i \in S$  be a linguistic value,  $s_i \in H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3)$ , then,  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^3$ . In the second case,  $s_i \in H_S^2$  or  $s_i \in H_S^3$ ; therefore, if  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$  or  $s_i \in H_S^3$ , then  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3$ .  
 $\supseteq$

Let  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cup H_S^3$  then,  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$  or  $s_i \in H_S^3$ . In the first case,  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2$ ; therefore, if  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2 \cup H_S^3$ , then  $s_i \in H_S^1 \cup (H_S^2 \cup H_S^3)$ . In a similar way, the associative property of the intersection can be demonstrated.

3) *Distributive*

$$\begin{aligned} H_S^1 \cap (H_S^2 \cup H_S^3) &= (H_S^1 \cap H_S^2) \cup (H_S^1 \cap H_S^3) \\ H_S^1 \cup (H_S^2 \cap H_S^3) &= (H_S^1 \cup H_S^2) \cap (H_S^1 \cup H_S^3). \end{aligned}$$

*Proof of the union:*

$\subseteq$   
Let  $s_i \in (H_S^1 \cap H_S^2) \cup (H_S^1 \cap H_S^3)$  then,  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^2$  and  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$ . Therefore,  $s_i \in H_S^1$  or  $s_i \in H_S^2$ .  
If  $s_i \in H_S^1$ , then  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$ .  
If  $s_i \in H_S^2$ , then  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$ .  
Thus,  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$  or  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$ , this means that  $s_i \in (H_S^1 \cap H_S^3) \cup (H_S^2 \cap H_S^3)$ .  
 $\supseteq$

Let  $s_i \in (H_S^1 \cap H_S^3) \cup (H_S^2 \cap H_S^3)$ . Then,  $s_i \in H_S^1 \cap H_S^3$  or  $s_i \in H_S^2 \cap H_S^3$ . On the first case, as  $s_i \in H_S^1$ , then  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ ; therefore,  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cap H_S^3$ . In the second case, as  $s_i \in H_S^2$ , then  $s_i \in H_S^1 \cup H_S^2$ ; therefore,  $s_i \in (H_S^1 \cup H_S^2) \cap H_S^3$ .

Similarly to the property of the union, the distributive property of the intersection can be demonstrated.

#### IV. ELICITATION OF LINGUISTIC INFORMATION BASED ON HESITANT FUZZY LINGUISTIC TERM SETS

Throughout the paper, it has been pointed out that the aim of the HFLTS is to improve the elicitation of linguistic information, mainly when experts hesitate among several values to assess linguistic variables.

The concept of HFLTS has been introduced as something that can be directly used by the experts to elicit several linguistic values for a linguistic variable, but such elements are not similar to human beings' way of thinking and reasoning. Therefore, in this section, the definition of simple but elaborated linguistic expressions that are more similar to human beings' expressions is proposed to be semantically represented by means of HFLTS and generated by a context-free grammar.

A simple context-free grammar  $G_H$  is introduced to support the type of linguistic information that we want to allow the experts to elicit in order to increase the flexibility and expressiveness of linguistic information, which is denoted by  $ll$ .

Besides the previous grammar  $G_H$ , it is also necessary to define how its linguistic expressions will be represented and managed in processes of CW. To do so, a function  $E(ll)$  is presented that transforms such linguistic expressions into HFLTS.

The context-free grammar  $G_H$  and the transformation function  $E(\cdot)$  are further detailed in the following sections.

#### A. Context-Free Grammar for Eliciting Linguistic Information Based on HFLTS

A context-free grammar  $G$  provides a way to generate linguistic terms and linguistic expressions by means of its different elements. Our objective is to define a context-free grammar  $G_H$  that generates simple but rich linguistic expressions that can be easily represented by means of HFLTS. Therefore, the context-free grammar  $G_H$  is defined to generate the type of linguistic expressions that we want to model in hesitant situations.

*Definition 16:* Let  $G_H$  be a context-free grammar, and  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a linguistic term set. The elements of  $G_H = (V_N, V_T, I, P)$  are defined as follows:

$V_N = \{\langle \text{primary term} \rangle, \langle \text{composite term} \rangle, \langle \text{unary relation} \rangle, \langle \text{binary relation} \rangle, \langle \text{conjunction} \rangle\}$   
 $V_T = \{\text{lower than, greater than, between, and, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$   
 $I \in V_N$ .

The production rules are defined in an extended Backus–Naur form so that the brackets enclose optional elements and the symbol “|” indicates alternative elements [4]. For the context-free grammar  $G_H$ , the production rules are as follows:

$P = \{I ::= \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{composite term} \rangle | \langle \text{unary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{binary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle \langle \text{conjunction} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{primary term} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g | \langle \text{unary relation} \rangle ::= \text{lower than} | \text{greater than} | \langle \text{binary relation} \rangle ::= \text{between} | \langle \text{conjunction} \rangle ::= \text{and}\}$ .

*Remark 1:* The *unary relation* has some limitations. If the nonterminal symbol is “lower than,” then the “primary term” cannot be  $s_0$ , and if the nonterminal symbol is “greater than,” then the “primary term” cannot be  $s_g$ .

*Remark 2:* In the “binary relation,” the “primary term” on the left-hand side must be less than the “primary term” on the right-hand side.

*Example 3:* Let  $S = \{\text{nothing, very\_low, low, medium, high, very\_high, perfect}\}$  be a linguistic term set; some linguistic expressions that are obtained by means of the context-free grammar  $G_H$  might be

$ll_1 = \text{high}$   
 $ll_2 = \text{lower than medium}$   
 $ll_3 = \text{greater than high}$   
 $ll_4 = \text{between medium and very\_high}$ .

These linguistic expressions are close to the linguistic structures used by human beings to provide their assessments in real-world problems, where they are not sure about one single value to assess the criteria or the alternatives. Therefore, the

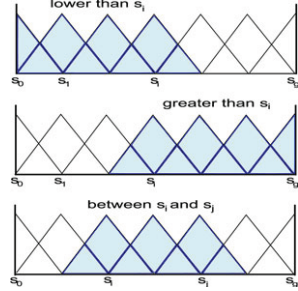


Fig. 2. HFLTS associated with the linguistic expressions.

hesitant situation is modeled by means of linguistic structures that are generated by the production rules,  $P \in G_H$ , being necessary to model semantically such information. To do so, the use of HFLTS is proposed.

#### B. Transforming Linguistic Expressions of $G_H$ into HFLTS

The transformation of the linguistic expressions  $\Pi$  that are produced by  $G_H$  into HFLTS is done by means of the transformation function  $E_{G_H}$ .

*Definition 17:* Let  $E_{G_H}$  be a function that transforms linguistic expressions  $\Pi$ , which are obtained by  $G_H$ , into HFLTS  $H_S$ , where  $S$  is the linguistic term set that is used by  $G_H$ :

$$E_{G_H} : \Pi \longrightarrow H_S.$$

The linguistic expressions that are generated by using the production rules will be transformed into HFLTS in different ways according to their meaning:

- 1)  $E_{G_H}(s_i) = \{s_i / s_i \in S\}$ ;
- 2)  $E_{G_H}(\text{less than } s_i) = \{s_j / s_j \in S \text{ and } s_j \leq s_i\}$ ;
- 3)  $E_{G_H}(\text{greater than } s_i) = \{s_j / s_j \in S \text{ and } s_j \geq s_i\}$ ;
- 4)  $E_{G_H}(\text{between } s_i \text{ and } s_j) = \{s_k / s_k \in S \text{ and } s_i \leq s_k \leq s_j\}$ .

With the previous definition of  $E_{G_H}$ , it is easy to figure out the representation of the initial linguistic expressions  $\Pi$  into HFLTS. Fig. 2 shows these transformations graphically.

*Example 4:* By the use of the linguistic expressions that are obtained in Example 3, i.e.,  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , and  $\Pi_4$  their transformation into HFLTS by the transformation function  $E_{G_H}$  is

$$\begin{aligned} E_{G_H}(\text{high}) &= \{\text{high}\} \\ E_{G_H}(\text{lower than medium}) &= \{\text{nothing, very\_low, low, medium}\} \\ E_{G_H}(\text{greater than high}) &= \{\text{high, very\_high, perfect}\} \\ E_{G_H}(\text{between medium and very\_high}) &= \{\text{medium, high, very\_high}\}. \end{aligned}$$

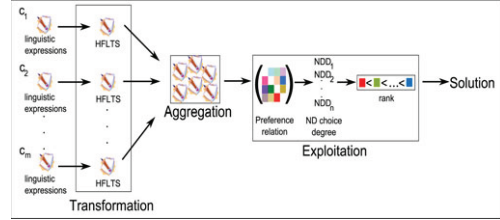


Fig. 3. Schema of the decision-making model.

### V. MULTICRITERIA LINGUISTIC DECISION-MAKING MODEL WITH LINGUISTIC EXPRESSIONS BASED ON COMPARATIVE TERMS

In this section, we present a multicriteria linguistic decision-making model in which decision makers can provide their assessments by means of linguistic expressions based on comparative terms close to the expressions used by human beings or by means of single linguistic terms. This decision model manages such linguistic expressions by its representation using HFLTS. To fuse these linguistic expressions, we propose two symbolic aggregation operators,  $\min\_upper$  and  $\max\_lower$ , that provide a linguistic interval for each alternative. Finally, an exploitation process based on the application of the nondominance choice degree to obtain the solution set of alternatives is proposed.

An example of a decision-making problem is also introduced to easily understand the proposed model.

#### A. Multicriteria Linguistic Decision-Making Problem

A multicriteria linguistic decision-making problem consists of a finite set of alternatives,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , where each alternative is defined by means of a finite set of criteria,  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , which is assessed by using linguistic expressions.

In this decision-making problem, we suppose a linguistic term set,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$ , and a context-free grammar  $G_H$ , which produces the linguistic expressions  $\Pi(x_i, c_j)$  based on comparative terms to assess the criteria,  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , for each alternative,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

#### B. Multicriteria Linguistic Decision Making Model

The proposed decision-making model consists mainly of the following three phases (see Fig. 3).

- 1) *Transformation phase:* The linguistic expressions provided by experts are transformed into HFLTS by using the transformation function  $E_{G_H}$ .
- 2) *Aggregation phase:* The assessments represented by HFLTS are aggregated by using two symbolic aggregation operators that obtain a linguistic interval, which is used to rank the alternatives in the following phase.
- 3) *Exploitation phase:* The linguistic intervals obtained in the previous phase are used to build a preference relation between alternatives, and a nondominance choice degree is applied to obtain a solution set of alternatives for the decision problem.

TABLE I  
ASSESSMENTS THAT ARE PROVIDED FOR THE DECISION PROBLEM

alternatives	H	criteria		
		c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
x <sub>1</sub>		between vl and m	between h and vh	h
x <sub>2</sub>		between l and m	m	lower than l
x <sub>3</sub>		greater than h	between vl and l	greater than h

TABLE II  
ASSESSMENTS TRANSFORMED INTO HFLTS

alternatives	H <sub>S</sub> <sup>i</sup> (x <sub>i</sub> )	criteria		
		c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
x <sub>1</sub>		{vl, l, m}	{h, vh}	{h}
x <sub>2</sub>		{l, m}	{m}	{n, vl, l}
x <sub>3</sub>		{h, vh, p}	{vl, l}	{h, vh, p}

These phases are explained in further detail later, forming an illustrative example to easily understand the decision model.

1) Transformation of the linguistic expressions into HFLTS:

Our aim is to facilitate the expressiveness of the experts in linguistic decision-making problems, providing a linguistic modeling close to human beings by using linguistic expressions that are generated by a context-free grammar  $G_H$ . The linguistic expressions that are provided by experts must be transformed into HFLTS to accomplish the aggregation process by means of the transformation function  $E_{G_H}$ , which is introduced in Definition 17.

*Example 5:* Let  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  be a set of alternatives,  $C = \{c_1, c_2, c_3\}$  be a set of criteria defined for each alternative, and  $S = \{s_0 : \text{nothing}(n), s_1 : \text{very low}(vl), s_2 : \text{low}(l), s_3 : \text{medium}(m), s_4 : \text{high}(h), s_5 : \text{very high}(vh), s_6 : \text{perfect}(p)\}$  be the linguistic term set that is used by the context-free grammar  $G_H$  to generate the linguistic expressions. The assessments that are provided in such a problem are shown in Table I.

The transformation of such expressions into HFLTS by means of the transformation function  $E_{G_H}$  is shown in Table II.

2) Aggregation of the assessments represented by HFLTS:

Once the assessments are represented by HFLTS, it is necessary to fuse the set of criteria for each alternative by using symbolic aggregation operators. In decision making, it is common to use two different points of view [29], the *pessimistic* and the *optimistic*. To find a balance between both approximations, we shall define two aggregation operators, *min\_upper* and *max\_lower*, which carry out the aggregation by using HFLTS. The “*min\_upper*” operator selects the worst of the superior values and the “*max\_lower*” selects the best of the inferior values. The result of application of these operators is two linguistic terms that will be used to build a linguistic interval. To do so, the minimum linguistic term will be the left limit of the interval and the maximum one will be the right. Each alternative has an associated linguistic interval that represents the core information of the HFLTS aggregated.

a) *Min\_upper* operator: This is a symbolic aggregation operator that is introduced to combine HFLTS, and it obtains the worst of the maximum linguistic terms.

TABLE III  
UPPER BOUND FOR EACH HFLTS

alternatives	H <sub>S</sub> <sup>+</sup> (x <sub>i</sub> )	criteria		
		c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
x <sub>1</sub>		{m}	{vh}	{h}
x <sub>2</sub>		{m}	{m}	{l}
x <sub>3</sub>		{p}	{l}	{p}

TABLE IV  
MINIMUM LINGUISTIC TERM OF THE SET OF CRITERIA

alternatives/H <sub>S</sub> <sup>+</sup> (x <sub>i</sub> )		
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
{m}	{l}	{l}

*Definition 18:* Let  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  be a set of alternatives,  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  be a set of criteria,  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a linguistic term set, and  $\{H_S^j(x_i)/i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  be a set of HFLTS. The *min\_upper* operator consists of the following two steps.

i) Apply the upper bound  $H_{S^+}$  for each HFLTS that is associated with each alternative:

$$H_{S^+}(x_i) = \{H_{S^+}^1(x_i), \dots, H_{S^+}^m(x_i)\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

ii) Obtain the minimum linguistic term for each alternative:

$$H_{S^+}^{\min}(x_i) = \min\{H_{S^+}^j(x_i)/j \in \{1, \dots, m\}\}, i \in \{1, \dots, n\}.$$

According to Example 5, the aggregation with such an operator is carried out as follows.

i) Apply the upper bound for each HFLTS (see Table III).

ii) Obtain the minimum linguistic term of the set of criteria for each alternative (see Table IV).

b) *Max\_lower* operator: This symbolic operator is also introduced to combine HFLTS, but it is opposite to the previous one, because it obtains the best of the minimum linguistic terms.

*Definition 19:* Let  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  be a set of alternatives,  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  be a set of criteria;  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a linguistic term set, and  $\{H_S^j(x_i)/i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}\}$  be a set of HFLTS. The *max\_lower* operator also consists of the following two steps.

i) Apply the lower bound for each HFLTS that is associated with each alternative:

$$H_{S^-}(x_i) = \{H_{S^-}^1(x_i), \dots, H_{S^-}^m(x_i)\} \\ i \in \{1, \dots, n\}.$$

ii) Obtain the maximum linguistic term for each alternative:

TABLE V  
LOWER BOUND FOR EACH HFLTS

	$H_{S^-}^j(x_i)$	criteria		
		$c_1$	$c_2$	$c_3$
alternatives	$x_1$	{vl}	{h}	{h}
	$x_2$	{l}	{m}	{n}
	$x_3$	{h}	{vl}	{h}

TABLE VI  
MAXIMUM LINGUISTIC TERM OF THE SET OF CRITERIA

alternatives/ $H_{S_{max}^-}(x_i)$		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
{h}	{m}	{h}

TABLE VII  
LINGUISTIC INTERVALS FOR THE ALTERNATIVES

alternatives/ $H'(x_i)$		
$x_1$	$x_2$	$x_3$
{m, h}	{l, m}	{l, h}

$$H_{S_{max}^-}(x_i) = \max\{H_{S^-}^j(x_i) / j \in \{1, \dots, m\}\}$$

$$i \in \{1, \dots, n\}.$$

Following Example 5, the results obtained by the application of the max\_lower operator are as follows.

- i) Apply the lower bound for each HFLTS (see Table V).
- ii) Obtain the maximum linguistic term of the set of criteria for each alternative (see Table VI).
- c) The linguistic terms that are obtained from the previous aggregation operators are used to build a linguistic interval for each alternative that represents the core information of the HFLTS aggregated. The left limit is the minimum of them, and the right limit is the maximum:

$$H'_{max}(x_i) = \max\{H_{S_{min}^+}(x_i), H_{S_{max}^-}(x_i)\}$$

$$H'_{min}(x_i) = \min\{H_{S_{min}^+}(x_i), H_{S_{max}^-}(x_i)\}$$

$$H'(x_i) = [H'_{min}(x_i), H'_{max}(x_i)].$$

Following Example 5, the linguistic intervals that are obtained are shown in Table VII.

- 3) *Exploitation phase*: Once the linguistic information has been aggregated, the exploitation phase is carried out, where the set of alternatives will be ordered to select the best one(s) according to the following steps.
  - a) Building of a preference relation: Now, the aggregated information regarding each alternative is expressed by a linguistic interval. Hence, to order such alternatives, first, a binary preference relation is built [7], [25] between alternatives. This preference relation is obtained by adapting the method that is proposed in [35]. In Appendix B, one such method is revised.
  - b) Application of a choice degree: For ranking alternatives from the preference relation, different choice functions could be applied [25], [28]. Here, we propose the use of a nondominance choice de-

gree NDD, which indicates the degree to which the alternative  $x_i$  is not dominated by the remaining ones. Its definition is given as follows. *Definition 20* [25]: Let  $P = [p_{ij}]$  be a preference relation that is defined over a set of alternatives  $X$ . For the alternative  $x_i$ , its nondominance degree  $NDD_i$  is obtained as

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j \neq i\}$$

where  $p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$  represents the degree to which  $x_i$  is strictly dominated by  $x_j$ .

- c) Finally, we obtain the set of nondominated alternatives as follows:

$$X^{ND} = \{x_i / x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\}.$$

Following Example 5, the exploitation phase consists of the following steps.

- a) Computing the preference degrees by using the definition that is introduced in [35]. This function must be adapted to deal with linguistic intervals; therefore,  $\text{Ind}(s_i) = i$  (it provides the index associated with the label),  $s_i \in S = \{s_0, \dots, s_9\}$ ,  $(P(x_1 > x_2))$ ,  $(P(x_2 > x_1))$ ,  $(P(x_1 > x_3))$ ,  $(P(x_3 > x_1))$ ,  $(P(x_2 > x_3))$ ,  $(P(x_3 > x_2))$ , and  $(P_D)$ , shown at the bottom of the next page.
- b) A nondominance choice degree  $NDD_i$  is applied to the preference relation

$$P_D^S = \begin{pmatrix} - & 1 & 0.334 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0.334 & - \end{pmatrix}$$

$$NDD_1 = \min\{(1 - 0), (1 - 0)\} = 1$$

$$NDD_2 = \min\{(1 - 1), (1 - 0.334)\} = 0$$

$$NDD_3 = \min\{(1 - 0.334), (1 - 0)\} = 0.664.$$

- c) Finally, the solution set of alternatives is

$$X^{ND} = \{x_1\}$$

## VI. CONCLUDING REMARKS AND FUTURE WORKS

In this paper, the concept of HFLTS has been introduced to increase the flexibility and richness of linguistic elicitation based on the fuzzy linguistic approach and the use of context-free grammars to support the elicitation of linguistic information by experts in hesitant situations under qualitative settings. In addition, different computational functions and properties of HFLTS have been presented. Afterwards, a multicriteria linguistic decision-making model in which experts provide their assessments by using linguistic expressions based on comparative terms has been presented and applied to a decision-making problem to show the usefulness of the HFLTS in decision making.

In the future, the application of HFLTS to group decision-making problems that are defined with uncertainty will be

explored, where the experts will be able to provide their assessments by means of preference relations by using linguistic expressions based on HFLTS.

APPENDIX A

Due to the fact that the comparison of HFLTS is based on their envelope, which are intervals, in this Appendix, a brief review is made of several methods to compare numeric intervals that could be used in the comparison of HFLTS, but first, the concept of numeric interval is revised.

*Definition 21:* [14]. An interval is defined by an ordered pair in brackets as

$$A = [a_L, a_R] = \{a : a_L \leq a \leq a_R\}$$

where  $a_L$  is the left limit, and  $a_R$  is the right limit of  $A$ .

*Definition 22:* [14]. The interval is also denoted by its center and width as

$$A = \langle a_C, a_W \rangle = \{a : a_C - a_W \leq a \leq a_C + a_W\}$$

where  $a_C$  is the center, and  $a_W$  is the width of  $A$ .

From definitions 21 and 22, the center and width of an interval may be calculated as

$$a_C = \frac{1}{2}(a_R + a_L)$$

$$a_W = \frac{1}{2}(a_R - a_L).$$

Different approaches to comparing intervals have been introduced in the literature. Two order relations are presented in [14]. One of them is defined by the left and right limits of an interval. This order relation is partial, and there are many pairs of intervals that cannot be compared with such a relation. To overcome this limitation, the authors defined a second-order relation by the center and width of the interval, but it is also a partial-order relation. In [16], the author defined a fuzzy preference relation between two intervals on the real line by means of a formula that

uses probability relations. The disadvantage of this approach is that it does not take into account the width of the intervals, and it could, therefore, find that two intervals are equal, although their widths were different.

Afterwards, in [29], the authors presented two approaches to compare any two interval numbers. In the following, we present one of them, which we consider suitable to accomplish the comparison of HFLTS by using their envelopes, because it overcomes the drawbacks of Tanaka, Ishibuchi, and Kundu's approaches, in further detail. Such a method introduces an acceptability function that indicates the grade of acceptability regarding the first interval is inferior to the second interval and is defined as follows.

*Definition 23:* [29]. Let  $I$  be the set of all closed intervals on the real line  $\Re$ , and  $A$  and  $B$  are the two intervals,  $A, B \in I$ . The acceptability function,  $A_{<} : I \times I \rightarrow [0, \infty)$ , is defined as

$$A_{<} = \frac{b_C - a_C}{b_W + a_W}$$

where  $b_W + a_W \neq 0$ ;  $a_C \leq b_C$ ; and  $a_C, b_C, a_W$ , and  $b_W$  are the centers and widths of the intervals  $A$  and  $B$ .

This grade of acceptability is a real number that represents that the grade of acceptance of the interval  $A$  is inferior to the interval  $B$  and is interpreted as follows:

- 1) If  $A_{<} = 0$ , then it is not accepted that the interval  $A$  is inferior to  $B$ .
- 2) If  $0 < A_{<} < 1$ , then  $A_{<}$  is accepted with different grades of satisfaction from 0 to 1.
- 3) If  $A_{<} \geq 1$ , then it is absolutely true that the interval  $A$  is inferior to  $B$ .

APPENDIX B

Appendix A revises the comparison between numeric intervals by means of a grade of acceptability that indicates if the first interval is inferior to the second one, but it does enable

$$P(x_1 > x_2) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_3))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_3)) + (\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2))} = 1$$

$$P(x_2 > x_1) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_3)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_3)) + (\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2))} = 0$$

$$P(x_1 > x_3) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_3)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.667$$

$$P(x_3 > x_1) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_3)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_3)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.333$$

$$P(x_2 > x_3) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_4))}{(\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.333$$

$$P(x_3 > x_2) = \frac{\max(0, \text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2)) - \max(0, \text{Ind}(s_2) - \text{Ind}(s_3))}{(\text{Ind}(s_3) - \text{Ind}(s_2)) + (\text{Ind}(s_4) - \text{Ind}(s_2))} = 0.667$$

$$P_D = \begin{pmatrix} - & 1 & 0.667 \\ 0 & - & 0.333 \\ 0.333 & 0.667 & - \end{pmatrix}.$$

us to discover the reciprocal preference degree between both intervals. Therefore, in this Appendix, the method that is proposed in [35] is reviewed to obtain a preference relation from a vector of intervals, and it is used in the exploitation phase of the multicriteria linguistic decision-making model presented in Section V.

*Definition 24:* [35]. Let  $A = [a_1, a_2]$  and  $B = [b_1, b_2]$  be two interval utilities; the preference degree of  $A$  over  $B$  (or  $A > B$ ) is defined as

$$P(A > B) = \frac{\max(0, a_2 - b_1) - \max(0, a_1 - b_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}$$

and the preference degree of  $B$  over  $A$  (or  $B > A$ ) is defined as

$$P(B > A) = \frac{\max(0, b_2 - a_1) - \max(0, b_1 - a_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)}.$$

It is obvious that  $P(A < B) + P(B > A) = 1$  and  $P(A > B) = P(B > A) = 0.5$ , when  $A = B$ ,  $a_1 = b_1$  and  $a_2 = b_2$ .

Therefore, the preference relation for the alternatives is obtained as follows.

*Definition 25:* [35]. Let  $P_D$  be a preference relation

$$P_D = \begin{pmatrix} - & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & - & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & - \end{pmatrix}$$

where

$$p_{ij} = P(x_i > x_j) = \frac{\max(0, x_{iR} - x_{jL}) - \max(0, x_{iL} - x_{jR})}{(x_{iR} - x_{iL}) - (x_{jR} - x_{jL})}$$

is the preference degree of the alternative  $x_i$  over  $x_j$ ;  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ;  $i \neq j$ , and  $x_i = [x_{iL}, x_{iR}]$ ,  $x_j = [x_{jL}, x_{jR}]$ .

#### REFERENCES

- [1] K.T. Atanassov, "Intuitionistic fuzzy sets," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 20, pp. 87–96, 1986.
- [2] H. Becker, "Computing with words and machine learning in medical diagnosis," *Inf. Sci.*, vol. 134, pp. 53–69, 2001.
- [3] P. P. Bonissone, "A fuzzy sets based linguistic approach: Theory and applications," in *Approximate Reasoning in Decision Analysis*. Amsterdam, The Netherlands: North-Holland, 1982, pp. 329–339.
- [4] G. Bordogna and G. Pasi, "A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation," *J. Amer. Soc. Inf. Sci.*, vol. 44, pp. 70–82, 1993.
- [5] Y. Dong, Y. Xu, and S. Yu, "Computing the numerical scale of the linguistic term set for the 2-tuple fuzzy linguistic representation model," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 17, no. 6, pp. 1366–1378, Dec. 2009.
- [6] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Kluwer, 1980.
- [7] Z. P. Fan, J. Ma, and Q. Zhang, "An approach to multiple attribute decision making based on fuzzy preference information alternatives," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 131, no. 1, pp. 101–106, 2002.
- [8] J.M. Garibaldi, M. Jaroszewski, and S. Musikasuwana, "Nonstationary fuzzy sets," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 16, no. 4, pp. 1072–1086, Aug. 2008.
- [9] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma, "Computing with words in decision making: Foundations, trends and prospects," *Fuzzy Optim. Decision Making*, vol. 8, no. 4, pp. 337–364, 2009.
- [10] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez, "A fusion approach for managing multi-granularity linguistic terms sets in decision making," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 114, no. 1, pp. 43–58, 2000.
- [11] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez, "A fuzzy linguistic methodology to deal with unbalanced linguistic term sets," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 354–370, Apr. 2008.
- [12] F. Herrera and L. Martínez, "A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 8, no. 6, pp. 746–752, Dec. 2000.
- [13] H. Ishibuchi, T. Nakashima, and M. Nii, *Classification and Modeling With Linguistic Information Granules: Advanced Approaches to Linguistic Data Mining*. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2004.
- [14] H. Ishibuchi and H. Tanaka, "Theory and methodology: Multiobjective programming in optimization of the interval objective function," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 48, pp. 219–225, 1990.
- [15] J. Kacprzyk and S. Zadrozny, "Computing with words is an implementable paradigm: Fuzzy queries, linguistic data summaries, and natural-language generation," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 3, pp. 461–472, Jun. 2010.
- [16] S. Kundu, "Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 86, pp. 357–367, 1997.
- [17] D. F. Li, "Multiattribute group decision making method using extended linguistic variables," *Int. J. Uncertainty, Fuzz. Knowl.-Based Syst.*, vol. 17, no. 6, pp. 793–806, Feb. 2009.
- [18] D. F. Li, "TOPSIS-based nonlinear-programming methodology for multiattribute decision making with interval-valued intuitionistic fuzzy sets," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 2, pp. 299–311, Apr. 2010.
- [19] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang, "A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making," *Int. J. Approx. Reason.*, vol. 44, no. 2, pp. 165–181, 2007.
- [20] L. Martínez, "Sensory evaluation based on linguistic decision analysis," *Int. J. Approx. Reason.*, vol. 44, no. 2, pp. 148–164, 2007.
- [21] L. Martínez, D. Ruan, and F. Herrera, "Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications," *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, vol. 3, no. 1, pp. 362–395, 2010.
- [22] J. M. Mendel, "An architecture for making judgement using computing with words," *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, vol. 12, no. 3, pp. 325–335, 2002.
- [23] J.M. Mendel, L.A. Zadeh, R.R. Yager, J. Lawry, H. Hagsras, and S. Guadarra, "What computing with words means to me," *IEEE Comput. Intell. Mag.*, vol. 5, no. 1, pp. 20–26, Feb. 2010.
- [24] M. Mizumoto and K. Tanaka, "Some properties of fuzzy sets of type 2," *Inf. Control*, vol. 31, pp. 312–340, 1976.
- [25] S.A. Orlovsky, "Decision-making with a fuzzy preference relation," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 1, pp. 155–167, 1978.
- [26] S. Parsons, "Current approaches to handling imperfect information in data and knowledge bases," *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.*, vol. 8, no. 3, pp. 353–372, Jun. 1996.
- [27] W. Pedrycz and S. Mingli, "Analytic hierarchy process (AHP) in group decision making and its optimization with an allocation of information granularity," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 19, no. 3, pp. 527–539, Jun. 2011.
- [28] M. Roubens, "Some properties of choice functions based on valued binary relations," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 40, pp. 309–321, 1989.
- [29] A. Sengupta and T. Kumar Pal, "On comparing interval numbers," *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 127, pp. 28–43, 2000.
- [30] Y. Tang and J. Zheng, "Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 157, no. 12, pp. 1662–1673, 2006.
- [31] V. Torra, "Negation function based semantics for ordered linguistic labels," *Int. J. Intell. Syst.*, vol. 11, pp. 975–988, 1996.
- [32] V. Torra, "Hesitant fuzzy sets," *Int. J. Intell. Syst.*, vol. 25, no. 6, pp. 529–539, 2010.
- [33] I. B. Türkşen, "Type 2 representation and reasoning for CWW," *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 127, pp. 17–36, 2002.
- [34] J. H. Wang and J. Hao, "A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 14, no. 3, pp. 435–445, Jun. 2006.
- [35] Y. M. Wang, J. B. Yang, and D. L. Xu, "A preference aggregation method through the estimation of utility intervals," *Comput. Oper. Res.*, vol. 32, pp. 2027–2049, 2005.
- [36] D. Wu and J. M. Mendel, "Computing with words for hierarchical decision making applied to evaluating a weapon system," *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 18, no. 3, pp. 441–460, Jun. 2010.
- [37] R. R. Yager, "On the theory of bags," *Int. J. Gener. Syst.*, vol. 13, pp. 23–37, 1986.
- [38] R. R. Yager, "An approach to ordinal decision making," *Int. J. Approx. Reason.*, vol. 12, pp. 237–261, 1995.

- [39] L. A. Zadeh, "Fuzzy sets," *Inf. Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.
- [40] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning—Part I," *Inf. Sci.*, vol. 8, pp. 199–249, 1975, 2012.
- [41] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning—Part II," *Inf. Sci.*, vol. 8, pp. 301–357, 1975.
- [42] L. A. Zadeh, "The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning—Part III," *Inf. Sci.*, vol. 9, pp. 43–80, 1975.
- [43] S. M. Zhou, R. I. John, F. Chiclana, and J. M. Garibaldi, "On aggregating uncertain information by type-2 OWA operators for soft decision making," *Int. J. Intell. Syst.*, vol. 25, no. 6, pp. 540–558, 2010.



**Rosa M. Rodríguez** received the M.Sc. degree in computer science from the University of Jaén, Jaén, Spain, in 2008. She is currently working toward the Ph.D. degree with the Department of Computer Science, University of Jaén.

Her research interests include linguistic preference modeling, decision making, and fuzzy logic.



**Luis Martínez** received the M.Sc. and Ph.D. degrees, both in computer science, from the University of Granada, Granada, Spain, in 1993 and 1999, respectively.

He is currently a Professor with the Department of Computer Science and the Director of the Advanced Research Center in Information Technology with the University of Jaén, Jaén, Spain. He currently acts as the Manager Editor of the journal *Soft Computing* and the Area Editor of the *International Journal of Computational Intelligence Systems*. His current research interests include linguistic preference modeling, decision making, fuzzy logic-based systems, computer-aided learning, sensory evaluation, recommender systems, and e-commerce.



**Francisco Herrera** (M'10) received the M.Sc. and Ph.D. degrees, both in mathematics, in 1988 and 1991, respectively, from the University of Granada, Granada, Spain.

He is currently a Professor with the Department of Computer Science and Artificial Intelligence, University of Granada. He has authored and coauthored more than 200 published papers in many international journals. He is the coauthor of the book *Genetic Fuzzy Systems: Evolutionary Tuning and Learning of Fuzzy Knowledge Bases* (World Scientific, 2001). He is currently the Editor-in-Chief of the international journal *Progress in Artificial Intelligence* (Springer) and serves as the Area Editor of the journal *Soft Computing* (area of evolutionary and bioinspired algorithms) and the *International Journal of Computational Intelligence Systems* (area of information systems). He is the Associated Editor of the IEEE TRANSACTIONS ON FUZZY SYSTEMS, *Information Sciences*, *Advances in Fuzzy Systems*, and the *International Journal of Applied Metaheuristics Computing*. He serves a member of the editorial boards of several journals, including *Fuzzy Sets and Systems*, *Applied Intelligence*, *Knowledge and Information Systems*, *Information Fusion*, *Evolutionary Intelligence*, the *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*, *Memetic Computation*, *Swarm*, and *Evolutionary Computation*, among others. His current research interests include computing with words and decision making, data mining, bibliometrics, data preparation, instance selection, fuzzy rule-based systems, genetic fuzzy systems, knowledge extraction based on evolutionary algorithms, memetic algorithms, and genetic algorithms.

Dr. Herrera received the European Coordinating Committee for Artificial Intelligence Fellowship in 2009, the 2010 Spanish National Award on Computer Science (ARITMEL) to the "Spanish Engineer on Computer Science," and the International Cajastur "Mamdani" Prize for Soft Computing (Fourth Edition, 2010).



## B.6. Group Decision Making Models with Comparative Linguistic Expressions

The complexity and relevance of real world decision making problems have made necessary to use multiple points of view to achieve a common solution, by using the knowledge provided for a group of experts. As we aforementioned, sometimes the linguistic models restrict the elicitation of the linguistic information to single linguistic terms, and in qualitative settings with high degree of uncertainty, experts can hesitate among several linguistic terms to provide their preferences. Therefore, richer expressions than single linguistic terms might support experts in such hesitant situations. In this section, it is proposed two new group decision making models in which experts can provide their preferences by means of single linguistic terms or comparative linguistic expressions close to the natural language used by experts in group decision making problems. These two models are explained in the following papers attached:

- *A Group Decision Making Model Dealing with Comparative Linguistic Expressions based on Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets*, submitted in *Information Sciences*, (it is in 2nd round with minor revision).
  - *Group Decision Making with Comparative Linguistic Terms*, published in an International conference, *Advances on Computational Intelligence Communications in Computer and Information Science*, vol. 297, pp. 181-190, Springer Berlin / Heidelberg, 2012.
-



## Group Decision Making with Comparative Linguistic Terms

Rosa M. Rodríguez<sup>1</sup>, Luis Martínez<sup>1</sup>, and Francisco Herrera<sup>2</sup>

<sup>1</sup> University of Jaén, Computer Science Department  
23071, Jaén, Spain  
{[rrodrig](mailto:rrodrig@ujaen.es),[martin](mailto:martin@ujaen.es)}@ujaen.es

<sup>2</sup> University of Granada, Computer Science and A.I. Department  
18071, Granada, Spain  
[herrera@decsai.ugr.es](mailto:herrera@decsai.ugr.es)

**Abstract.** In group decision making (GDM) framework, we focus on decision problems defined under uncertainty where decision makers can hesitate among several values to elicit their preferences. In such cases, the use of hesitant fuzzy linguistic term sets (HFLTS) can facilitate the elicitation of decision makers preferences. In this contribution, our aim is to propose a linguistic GDM model that allows to decision makers use single linguistic terms or comparative linguistic terms to express their preferences and obtain the solution set of alternatives of the GDM problem.

**Keywords:** Group decision making, hesitant fuzzy linguistic term sets, comparative linguistic terms, context-free grammar.

### 1 Introduction

Decision making is a usual process for human beings and companies in different areas such as, engineering [10], planning [20], etc. In decision making problems with multiple experts, each expert expresses his/her preferences depending on the nature of the alternatives and on his/her own knowledge over them. Usually, this knowledge is vague and imprecise. In such cases, the fuzzy logic [8] and fuzzy linguistic approach [18] provide suitable tools to deal with this type of uncertainty. The use of linguistic information implies to carry out processes of computing with words (CWW) [11,19]. There are different linguistic computing models to accomplish such processes [5,9,15]. However, such approaches are limited to model qualitative settings where decision makers hesitate among different values, because they are thinking of several linguistic terms to provide their preferences.

Torra introduced the concept of hesitant fuzzy sets [14] to manage situations in quantitative settings, when decision makers hesitate among different values to determine the membership of an element into a set. In qualitative settings it may occur a similar situation, decision makers hesitate among different linguistic

terms. Rodríguez et al. proposed the concept of HFLTS [12] to facilitate the elicitation of such linguistic information by comparative linguistic terms.

The aim of this contribution is to develop a linguistic GDM model capable to manage hesitant information by means of comparative linguistic terms represented by HFLTS. These comparative terms facilitate the elicitation of linguistic information to decision makers in hesitant situations. The proposed GDM model will manage this type of information by using linguistic intervals.

This paper is structured as follows: Section 2, introduces a basic scheme of a GDM problem and makes a brief review about fuzzy linguistic approach. Section 3, revises the elicitation of comparative linguistic terms represented by HFLTS. Section 4, presents a linguistic GDM model that deals with comparative linguistic terms. Section 5 shows an illustrative example of a GDM problem, and finally, Section 6 points out some concluding remarks.

## 2 Preliminaries

This section introduces a basic scheme for a GDM problem and reviews the fuzzy linguistic approach basis of the HFLTS.

### 2.1 Scheme of a Group Decision Making Problem

A GDM problem is defined as a decision situation where a finite set of experts,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  ( $m \geq 2$ ), express their preferences over a finite set of alternatives,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , ( $n \geq 2$ ) to obtain a solution set of alternatives for the decision problem [7]. Usually, each expert,  $e_k$ , provides her/his preferences on  $X$  by means of a preference relation  $P^k, \mu_{P^k} : X \times X \rightarrow D$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \dots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \dots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

where each assessment,  $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k$ , represents the degree of preference of the alternative  $x_i$  over  $x_j$  according to expert  $e_k$ .

Usually, GDM problems have been solved performing a selection process where experts obtain the best alternative from their preferences [13]. The selection process consists of two phases (see Fig.1).

- *Aggregation phase*: the experts preferences are aggregated to obtain a collective preference matrix that reflects the preferences provided by all experts.
- *Exploitation phase*: it selects the best alternative/s to solve the decision problem by ranking the collective preferences obtained in the previous phase by using a choice function [3].

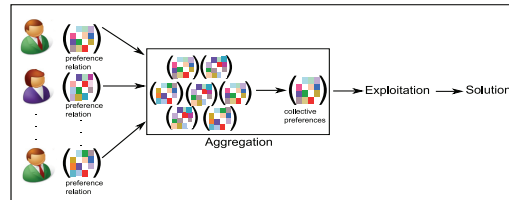


Fig. 1. General schema of a group decision making problem

### 2.2 Fuzzy Linguistic Approach

The fuzzy linguistic approach [18] represents qualitative settings by means of linguistic variables. The concept of linguistic variable was introduced by Zadeh [18] as “a variable whose values are not numbers but words or sentences in a natural or artificial language”. To model linguistically the information is necessary to choose the appropriate linguistic descriptors for the linguistic term set and their semantics. To do so, there are different possibilities [16]. We will use one of them that consists of applying directly the term set by considering all the terms distributed on a scale that has an order defined [16]. In these cases, it is required that in the linguistic term set there are the following operators:

1. Negation:  $Neg(s_i) = s_j$  with  $j = g-i$  ( $g+1$  is the granularity of the term set).
2. Maximization:  $Max(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \geq s_j$ .
3. Minimization:  $Min(s_i, s_j) = s_i$  if  $s_i \leq s_j$ .

The semantics of the terms is represented by fuzzy numbers defined in the interval  $[0,1]$ , described by membership functions [1].

We aforementioned that the use of linguistic information implies processes of CWW. To perform these computations in the fuzzy linguistic approach appeared two classical computational models:

- Semantic model that computes with linguistic terms by means of operations associated to their membership functions based on the Extension Principle [2].
- Symbolic model that uses the ordered structure of the linguistic terms to operate [16].

Symbolic models have been widely used in decision making because of their simplicity and understandability. In this contribution, we will use a symbolic model in the proposal for the GDM model.

### 3 Elicitation of Comparative Linguistic Terms

Our interest is focused on GDM problems under uncertainty where decision makers may hesitate among different values to assess qualitative settings. To

manage such a situation, we propose the use of comparative linguistic terms represented by HFLTS. In [12] Rodríguez et al. defined the following context-free grammar to generate expressions with comparative linguistic terms.

**Definition 1.** [12] Let  $G_H$  be a context-free grammar and  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  a linguistic term set. The elements of  $G_H = (V_N, V_T, I, P)$  are defined as follows:

$V_N = \{\langle \text{primary term} \rangle, \langle \text{composite term} \rangle, \langle \text{unary relation} \rangle, \langle \text{binary relation} \rangle, \langle \text{conjunction} \rangle\}$

$V_T = \{\text{lower than, greater than, between, and, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$

$I \in V_N$

The production rules are defined in an extended Backus Naur Form so that the brackets enclose optional elements and the symbol  $|$  indicates alternative elements [1]. For the context-free grammar,  $G_H$ , the production rules are the following:

$P = \{I ::= \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{composite term} \rangle\}$

$\langle \text{composite term} \rangle ::= \langle \text{unary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{binary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{conjunction} \rangle \langle \text{primary term} \rangle$

$\langle \text{primary term} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g$

$\langle \text{unary relation} \rangle ::= \text{lower than} | \text{greater than}$

$\langle \text{binary relation} \rangle ::= \text{between}$

$\langle \text{conjunction} \rangle ::= \text{and}$

These linguistic expressions are represented by HFLTS.

**Definition 2.** [12] An HFLTS,  $H_S$ , is an ordered finite subset of consecutive linguistic terms of  $S$ , where  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  is a linguistic term set.

For example, let  $S = \{\text{nothing, very\_low, low, medium, high, very\_high, perfect}\}$  be a linguistic term set and  $X$  an alternative, an HFLTS might be:

$$H_S(X) = \{\text{high, very\_high, perfect}\}$$

To obtain HFLTS from the comparative linguistic terms generated by the context-free grammar  $G_H$ , was defined the transformation function  $E_{G_H}$ .

**Definition 3.** [12] Let  $E_{G_H}$  be a function that transforms linguistic expressions,  $ll$ , obtained by  $G_H$ , into HFLTS,  $H_S$ , where  $S$  is the linguistic term set used by  $G_H$ .

$$E_{G_H} : S_{ll} \longrightarrow H_S \quad (1)$$

In decision making is often to carry out comparisons between values. The comparison between two HFLTS is complex, because an HFLTS is a set of linguistic terms. Therefore, to compare two HFLTS was introduced the concept of envelope of an HFLTS.

**Definition 4.** [12] The envelope of a HFLTS,  $env(H_S)$ , is a linguistic interval whose limits are obtained by means of upper bound (max) and lower bound (min):

$$env(H_S) = [H_{S-}, H_{S+}], \quad H_{S-} \leq H_{S+} \quad (2)$$

where

$$H_{S^+} = \max(s_i) = s_j, s_i \in H_S \text{ and } s_i \leq s_j \forall i \text{ and}$$

$$H_{S^-} = \min(s_i) = s_j, s_i \in H_S \text{ and } s_i \geq s_j \forall i$$

Following the previous example,  $H_S(X) = \{high, very\_high, perfect\}$ , its envelope is:

$$env(H_S) = [high, perfect]$$

Once obtained the envelopes of HFLTS, the comparison is conducted by interval values. Different approaches can be applied to carry out such comparison [12]. More operations with HFLTS and properties can be found in [12].

#### 4 Linguistic Group Decision Making Model Dealing with Comparative Linguistic Terms

The aim of this contribution is to propose a linguistic GDM model that copes with hesitant situations in qualitative settings in which decision makers provide linguistic information by means of single linguistic terms or comparative linguistic terms. This model based on the classical symbolic model uses the indexes of the linguistic term set to operate across the decision making process. It extends the decision resolution scheme shown in Fig. 1 adding a phase to manage linguistic information by means of HFLTS. It consists mainly of three phases (see Fig. 2):

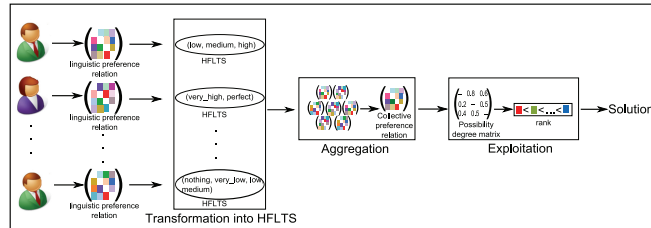


Fig. 2. Scheme of the linguistic group decision making model

1. Transformation of the comparative linguistic terms preference relations into HFLTS

Experts provide their preference relation,  $P^k$ , by using single linguistic terms or comparative linguistic terms,  $\mu_{pk} : X \times X \rightarrow S_U$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \dots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \dots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

where each assessment  $p_{ij}^k \in S_{ll}$ , represents the preference degree of the alternative  $x_i$  over  $x_j$  according to expert  $e_k$ , expressed in the information domain  $S_{ll}$ . To solve the GDM problem the comparative linguistic terms are transformed into HFLTS by means of the transformation function  $E_{GH}$ . Afterwards, it is computed an envelope for each HFLTS that obtains a linguistic interval that will be used to aggregate the preferences provided by experts,  $env(H_S(p_{ij}^k)) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} [p_{11}^{k-}, p_{11}^{k+}] & \cdots & [p_{1n}^{k-}, p_{1n}^{k+}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^{k-}, p_{n1}^{k+}] & \cdots & [p_{nn}^{k-}, p_{nn}^{k+}] \end{pmatrix}$$

2. Aggregation of the preference relations represented by linguistic intervals  
The linguistic intervals are aggregated to obtain a collective preference relation  $P_C$ . We use the LOWA aggregation operator [4] to aggregate the right limits,  $p_{ij}^{k+}$ , and the left limits,  $p_{ij}^{k-}$  of the intervals.

$$P_C = \begin{pmatrix} [p_{11}^-, p_{11}^+] & \cdots & [p_{1n}^-, p_{1n}^+] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^-, p_{n1}^+] & \cdots & [p_{nn}^-, p_{nn}^+] \end{pmatrix}$$

where  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  and  $n$  is the number of alternatives.

3. Exploitation phase  
Once the linguistic intervals have been aggregated, the set of alternatives is ordered to select the best one/s. To do so, we use the approach proposed by Jiang [6] that deals with interval preference relations and obtains a ranking of alternatives based on numerical possibility degrees according to the following steps:

- (a) Firstly, it is calculated the mean preference relation  $\bar{P}_C = (\bar{p}_{ij})_{n \times n}$ , and the error matrix  $\delta = (\delta_{ij})_{n \times n}$ , that represents the mean distance of the limits of the intervals of  $P_C$ ,

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij}^- + p_{ij}^+) \tag{3}$$

$$\delta_{ij} = \frac{1}{2}(p_{ij}^+ - p_{ij}^-) \tag{4}$$

where  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$

*Remark 1.* We note that to deal with linguistic intervals symbolically, these functions are adapted, so  $\bar{p}_{ij} = \frac{1}{2}(ind(p_{ij}^-) + ind(p_{ij}^+))$ ,  $\delta_{ij} = \frac{1}{2}(ind(p_{ij}^+) - ind(p_{ij}^-))$ ;  $ind(s_i) = i$ .

- (b) Afterwards, it is used the error propagation principle [17] to obtain the priority vector  $\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n)$  of the mean preference relation,  $\bar{P}_C$ .
-

$$\bar{w}_i = \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{p}_{ij} + \frac{n}{2} - 1)}{n(n-1)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

It is calculated an error vector  $\Lambda w = (\Lambda w_1, \dots, \Lambda w_n)$  of  $\bar{w}$  due to the imprecise values of  $\bar{p}_{ij}$ , by using the following function.

$$\Lambda w_i = \frac{1}{n(n-1)} \sqrt{\sum_{j=1}^n \delta_{ij}^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

And thus it is got the priority vector  $w = (w_1, \dots, w_n)^T$  of the collective matrix,  $P_C$ , where  $w_i = [\bar{w}_i - \Lambda w_i, \bar{w}_i + \Lambda w_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

- (c) To rank these interval weights  $w_i (i = 1, \dots, n)$ , each  $w_i$  is compared with all  $w_j$  by using the possibility degree function, and it is then built a possibility degree matrix  $PD = (pd_{ij})_{n \times n}$ .

$$pd_{ij} = p(\bar{w}_i \geq \bar{w}_j) = \frac{\min(2(\Lambda w_i + \Lambda w_j), \max(\bar{w}_i + \Lambda w_i - (\bar{w}_j - \Lambda w_j), 0))}{2(\Lambda w_i + \Lambda w_j)} \quad (7)$$

A non-dominance choice degree is applied to the possibility degrees to obtain the solution set of alternatives. To do so, the possibility degrees of the alternatives  $pd_{ij}$ , are summed by rows, and they are ranked in a descending order.

$$pd_i = \sum_{j=1}^n pd_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

Finally, the alternatives are ordered according to  $pd_i$  and then the best alternative is selected.

## 5 Illustrative Example

Here, we present a GDM problem solved by the proposed GDM model.

Let a GDM problem be defined in qualitative settings where a set of experts,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ , provide their preferences over a set of alternatives,  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ . Experts provide their preferences by using the comparative linguistic terms generated by the context-free grammar  $G_H$ , (see Def. 1). Such linguistic expressions are represented by HFLTS. The linguistic term set used for the context-free grammar is  $S = \{nothing(n), very\_low(vl), low(l), medium(m), high(h), very\_high(vh), perfect(p)\}$  and the preference relations provided by the experts are the following ones:

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & less\ than\ vl & vh & more\ than\ h \\ more\ than\ vl & - & between\ h\ and\ vh & less\ than\ m \\ l & less\ than\ h & - & more\ than\ vh \\ less\ than\ vh & more\ than\ h & less\ than\ m & - \end{pmatrix}$$

188 R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & \text{less than } m & \text{more than } h & \text{between } vl \text{ and } l \\ \text{more than } h & - & h & vl \\ \text{less than } vh & l & - & \text{more than } vh \\ \text{less than } l & vh & \text{between } vh \text{ and } p & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & \text{more than } h \text{ between } vl \text{ and } l & h \\ \text{less than } vh & - & \text{more than } m & \text{more than } h \\ \text{less than } l & \text{less than } vh & - & vh \\ l & \text{less than } vh & vl & - \end{pmatrix}$$

According to the Fig. 2, the GDM process consists of:

1. *Transformation of the comparative linguistic terms preference relations into HFLTS*

The linguistic preference relations provided by the experts are transformed into HFLTS by means of the transformation function  $E_{GH}$ :

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \{n, vl\} & \{vh\} & \{h, vh, p\} \\ \{vl, l, m, h, vh, p\} & \{l\} & \{n, vl, l, m, h\} & \{h, vh\} \\ \{n, vl, l, m, h, vh\} & \{h, vh, p\} & \{n, vl, l, m\} & \{n, vl, l, m\} \\ & & & \{vh, p\} \\ & & & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & \{n, vl, l, m\} & \{h, vh, p\} & \{vl, l\} \\ \{h, vh, p\} & - & \{h\} & \{vl\} \\ \{n, vl, l, m, h, vh\} & \{l\} & - & \{vh, p\} \\ \{n, vl, l\} & \{vh\} & \{vh, p\} & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & \{h, vh, p\} & \{vl, l\} & \{h\} \\ \{n, vl, l, m, h, vh\} & - & \{m, h, vh, p\} & \{h, vh, p\} \\ \{n, vl, l\} & \{n, vl, l, m, h, vh\} & - & \{vh\} \\ \{l\} & \{n, vl, l, m, h, vh\} & \{vl\} & - \end{pmatrix}$$

The envelopes obtained for each HFLTS are the following ones:

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & [n, vl] & [vh, vh] & [h, p] \\ [vl, p] & - & [h, vh] & [n, m] \\ [l, l] & [n, h] & - & [vh, p] \\ [n, vh] & [h, p] & [n, m] & - \end{pmatrix} P^2 = \begin{pmatrix} - & [n, m] & [h, p] & [vl, l] \\ [h, p] & - & [h, h] & [vl, vl] \\ [n, vh] & [l, l] & - & [vh, p] \\ [n, l] & [vh, vh] & [vh, p] & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & [h, p] & [vl, l] & [h, h] \\ [n, vh] & - & [m, p] & [h, p] \\ [n, l] & [n, vh] & - & [vh, vh] \\ [l, l] & [n, vh] & [vl, vl] & - \end{pmatrix}$$

2. *Aggregation of the preference relations represented by linguistic intervals*

The linguistic intervals are aggregated by using the LOWA operator to obtain the collective preferences matrix,

$$P_C = \begin{pmatrix} - & [vl, m] & [h, vh] & [m, vh] \\ [l, p] & - & [h, p] & [m, h] \\ [vl, h] & [vl, h] & - & [vh, p] \\ [vl, m] & [h, p] & [l, m] & - \end{pmatrix}$$


---

3. *Exploitation phase*

Once obtained the collective preferences from experts, it is used the approach proposed by Jiang [6] to obtain the solution set of alternatives.

- a) Mean preference relation  $P_C$ , and error-matrix  $\delta$ , of the collective preference relation  $P_C$ :

$$P_C = \begin{pmatrix} - & 2 & 4.5 & 4 \\ 4 & - & 5 & 3.5 \\ 2.5 & 2.5 & - & 5.5 \\ 2 & 5 & 2.5 & - \end{pmatrix} \quad \delta = \begin{pmatrix} - & 1 & 0.5 & 1 \\ 2 & - & 1 & 0.5 \\ 1.5 & 1.5 & - & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.5 & - \end{pmatrix}$$

- b) Priority vector  $\bar{w}$ , and error vector  $\Lambda w$ :

$$\bar{w} = (0.958, 1.125, 0.958, 0.875) \\ \Lambda w = (0.125, 0.191, 0.182, 0.125)$$

- c) Possibility degree matrix  $PD$ :

$$PD = \begin{pmatrix} - & 0.236 & 0.5 & 0.667 \\ 0.764 & - & 0.723 & 0.895 \\ 0.5 & 0.276 & - & 0.635 \\ 0.333 & 0.104 & 0.364 & - \end{pmatrix}$$

- d) Finally a dominance choice degree is applied over the possibility degree of the alternatives

$$pd_1 = 1.403 \quad pd_2 = 2.382 \quad pd_3 = 1.411 \quad pd_4 = 0.801$$

and then the ranking of the alternatives is:

$$x_2 > x_3 > x_1 > x_4,$$

being the best alternative of the GDM problem,  $x_2$ .

## 6 Conclusions

GDM is a key area in many different fields such that decision makers may face situations in which they hesitate among several linguistic terms to provide their preferences. In this contribution, we have presented a linguistic GDM model capable to deal with HFLTS, that facilitates the elicitation of hesitant information to decision makers.

**Acknowledgments.** This work is partially supported by the Research Project TIN-2009-08286 and FEDER funds.

## References

1. Bordogna, G., Pasi, G.: A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science* 44, 70–82 (1993)

190 R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera

2. Degani, R., Bortolan, G.: The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *Int. Journal of Approximate Reasoning* 2, 143–162 (1988)
  3. Herrera, F., Herrera-Viedma, E.: Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European J. of Operational Research* 120(1), 144–161 (2000)
  4. Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L.: A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach. *Information Sciences* 85(4), 223–239 (1995)
  5. Herrera, F., Martínez, L.: A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8(6), 746–752 (2000)
  6. Jiang, Y.: An approach to group decision making based on interval fuzzy preference relations. *J. of Systems Science and Systems Engineering* 16(1), 113–120 (2007)
  7. Kacprzyk, J.: Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems* 18, 105–118 (1986)
  8. Klir, G.J., Yuan, B.: *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR (1995)
  9. Lawry, J.: A methodology for computing with words. *International Journal of Approximate Reasoning* 28, 51–89 (2001)
  10. Liu, J., Martínez, L., Wang, H., Rodríguez, R.M., Novozhilov, V.: Computing with words in risk assessment. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 3(4), 396–419 (2010)
  11. Martínez, L., Ruan, D., Herrera, F.: Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 3(4), 382–395 (2010)
  12. Rodríguez, R.M., Martínez, L., Herrera, F.: Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 20(1), 109–119 (2012)
  13. Roubens, M.: Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems* 90, 199–206 (1997)
  14. Torra, V.: Hesitant fuzzy sets. *Int. J. of Intelligent Systems* 25(6), 529–539 (2010)
  15. Türkşen, I.B.: Type 2 representation and reasoning for CWW. *Fuzzy Sets and Systems* 127, 17–36 (2002)
  16. Yager, R.R.: An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning* 12(3-4), 237–261 (1995)
  17. Yoon, K.: The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: a practical approach. *Journal of the Operational Research Society* 40, 681–686 (1989)
  18. Zadeh, L.: The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III* (8,9), 199–249, 301–357, 43–80 (1975)
  19. Zadeh, L.: Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 94(2), 103–111 (1996)
  20. Zhang, T., Zhang, G., Ma, J., Lu, J.: Power distribution system planning evaluation by a fuzzy multi-criteria group decision support system. *International Journal of Computational Intelligence Systems* 3(4), 474–485 (2010)
-

---

## A Group Decision Making Model Dealing with Comparative Linguistic Expressions based on Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets

Rosa M. Rodríguez<sup>a</sup>, Luis Martínez<sup>a</sup>, Francisco Herrera<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Dept. of Computer Science, University of Jaén, 23071 - Jaén, Spain. E-mail: {rmrodrig,martin}@ujaen.es*

<sup>b</sup>*Dept. of Computer Science and A.I., University of Granada, 18071 - Granada, Spain. E-mail: herrera@decsai.ugr.es*

---

### Abstract

The complexity and impact of many real world decision making problems lead to the necessity of considering multiple points of view, building group decision making problems in which a group of experts provide their preferences to achieve a solution. In such complex problems uncertainty is often present and for managing it, the use of linguistic information has provided successful results, but sometimes limited because the linguistic models use single-valued and predefined terms that restrict the richness of eliciting freely preferences to the experts. Usually, experts may doubt between different linguistic terms and need richer expressions to express their knowledge more accurately, however linguistic group decision making approaches do not provide any model to make more flexible the elicitation of linguistic preferences in such hesitant situations. In this paper is proposed a new linguistic group decision model that facilitates the elicitation of flexible and rich linguistic expressions, in particular the use of comparative linguistic expressions, close to human beings cognitive model for expressing linguistic preferences based on hesitant fuzzy linguistic term sets and context-free grammars. This model defines the group decision process and the necessary operators and tools to manage such linguistic expressions.

*Keywords:* Group decision making, hesitant fuzzy linguistic term set, comparative linguistic expressions, linguistic interval, context-free grammar.

### 1. Introduction

Decision making is a usual process for human beings and companies in different areas such as information retrieval [4], selection [8], evaluation [9], investment [17], planning [36], etc. The complexity of real world decision problems and the importance of such decisions have made necessary including multiple points of view to achieve a solution from the knowledge provided by a group of experts. Often in group decision making (GDM) the complexity is induced by the uncertainty surrounding the alternatives and the experts' knowledge. Much research has been developed on GDM problems [18, 30, 31], being one of the main topics, the managing and modelling of uncertainty by different forms of information used by experts to provide their preferences such as utility vectors [5], fuzzy preference relations [21], linguistic variables [14], interval values [15], multiplicative preference relations [6], hesitant fuzzy set [39], etc. Our research deals with GDM problems defined in linguistic contexts because the use of linguistic information is quite common by experts in problems with a high degree of uncertainty [24] and has provided reliable and successful results in different GDM problems [1, 43].

In spite of previous results obtained by linguistic approaches in decision making, different authors have pointed out some necessary improvements of such approaches [20, 37]:

- Most of linguistic decision approaches deals with linguistic terms defined a priori preventing other choices to express preferences in a richer way.
- Additionally experts are restricted to provide their preferences by using just one term that sometimes may not reflect exactly what they mean.

To cope with previous issues different proposals have been introduced in the literature. Wang and Hao [40] proposed the use of proportional linguistic 2-tuple that provides the possibility of using proportions of two consecutive linguistic terms. Ma et al. [20] developed another model to increase the flexibility of linguistic preference expressions by joining different single terms into a new synthesized term, without any fixed rule for such a conversion, that is used by a fuzzy model and with measures of consistency and determinacy. Also Tang et al. [37] introduced a linguistic model that is able to manage linguistic expressions built by logical connectives ( $\neg, \vee, \wedge, \longrightarrow$ ) and fuzzy relations that measure the similarity between any two linguistic

terms. Previous models provide a way to express richer expressions than single linguistic terms but they are either far away of common language used by experts in GDM problems or not systematically defined. Furthermore, these models have been applied to multi-criteria decision making problems in which experts express their preferences by means of preference vectors.

The use of hesitant fuzzy linguistic term sets (HFLTS) [33] improves the previous linguistic approaches [20, 37, 40] in their aim of achieving the previous improvements pointed out. Because it provides experts a greater flexibility to elicit linguistic preferences by using context-free grammars that fix the rules to build flexible linguistic expressions to express preferences, in particular it allows the use of comparative linguistic expressions. However, the application of a linguistic modelling to GDM is not straight either easy as can be seen that previous approaches have not been applied in GDM problems yet. Such a difficulty comes from the use of linguistic preference relations to manage experts' preferences.

Therefore, in this paper we present a new linguistic GDM model to achieve such improvements. It deals with comparative linguistic expressions, close to common language used by experts in real world decision making problems, based on HFLTS and context-free grammars that support experts' preference elicitation in uncertain group decision making situations in which, they demand rich expressions able to express their preferences even when they hesitate among different terms.

This novel GDM model extends the classical GDM solving process scheme [34], based on an *Aggregation* phase that combines the experts preferences and an *Exploitation* phase that obtains a solution set of alternatives for the GDM problem; by adding phases that manage the gathering of comparative linguistic expressions, their transformation into linguistic intervals modelled by HFLTS and the necessary tools to accomplish the processes of computing with words (CWW) [25, 26] in a simple and accurate way.

The remaining of the paper is structured as follows: Section 2 reviews the scheme of a GDM problem and makes a brief introduction of the fuzzy linguistic approach and the 2-tuple linguistic representation model used for carrying out the processes of CWW in the linguistic decision solving process. Section 3 deals with the elicitation of linguistic expressions based on hesitant fuzzy linguistic term sets and context-free grammars. Section 4 presents a novel GDM model dealing with comparative linguistic expressions and Section 5 solves a GDM problem by using the proposed model. Finally, some conclusions are pointed out.

## 2. Linguistic Group Decision Making

This paper aims at introducing a linguistic group decision making model capable of dealing with comparative linguistic expressions as preference assessments in hesitant decision situations. Before presenting this model, in this section we briefly review some basic and necessary concepts, about GDM, linguistic information and computing with words to understand our proposal.

### 2.1. Group decision making

Group decision making is defined as a decision situation in which takes part two or more experts that have their own knowledge and attitudes regarding the decision problem, and they provide their preferences to reach a collective decision [18]. The need for multiple views is quite common in complex and in organizational decision situations [2, 7, 19, 35].

A GDM solving process applies a *selection process* to achieve a collective solution that obtains the best alternative or subset of alternatives according to experts' preferences. However, sometimes the aim of GDM is not to achieve the best solution, but rather than a satisfactory solution for all experts involved. In the latter situation differences among experts are settled by negotiation namely, consensus reaching processes [28, 30]. This paper focuses on *selection processes* for GDM, because they are always necessary even for obtaining satisfactory solutions after the negotiation process whose necessity is problem dependent.

Formally, a GDM problem is defined as a decision situation in which two or more experts,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  ( $m \geq 2$ ), express their preferences over a finite set of alternatives,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , ( $n \geq 2$ ) to obtain a solution set of alternatives for the decision problem [16]. Usually, each expert  $e_k$ , provides her/his preferences on  $X$  by means of a preference relation  $P^k, \mu_{P^k} X \times X \rightarrow D$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \cdots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \cdots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

where each assessment,  $\mu_{P^k}(x_i, x_j) = p_{ij}^k$ , represents the *degree of preference* of the alternative  $x_i$  over  $x_j$  according to expert  $e_k$ . The comparison of two alternatives characterized by preference relations has been focus of interest and deeply researched in the literature [10, 29].

Typically, a selection process for GDM [34] consists of two main phases (see Fig. 1).

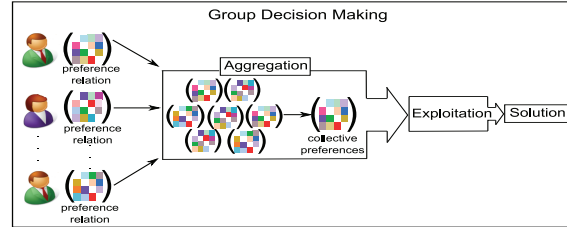


Figure 1: General schema of a group decision making problem

- *Aggregation phase*: it combines the experts preference relations by using aggregation operators to obtain a collective preference matrix that represents the preferences provided by all experts that participate in the decision problem.
- *Exploitation phase*: that selects the best alternative(s) to solve the decision problem from the collective preferences obtained in the previous phase. To do so, it may use a choice function that assigns a choice degree for each alternative [11].

## 2.2. Linguistic information

Many aspects of different activities in the real world cannot be assessed in a quantitative form, but rather in a qualitative one, and thus, the use of a linguistic approach is necessary. A common approach to model the linguistic information is the fuzzy linguistic approach [46] that uses the fuzzy sets theory [45] to model the linguistic information. The fuzzy linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables. In order to model linguistically the information, we have to choose the appropriate linguistic descriptors for the linguistic term set and their semantics. There are different approaches for such selections [12, 22]. We will use one of them that consists of supplying directly the term set by considering all the terms distributed on a scale which has an order defined [44]. For example, a set of seven terms  $S$ , could be:

$$S = \{\text{neither, very low, low, medium, high, very high, absolute}\}$$

The semantics of the terms is represented by fuzzy numbers defined in the interval  $[0,1]$ , described by membership functions [38].

Because of our goal is to present a GDM model where experts use linguistic expressions to provide their preferences over the set of alternatives, the general scheme of a GDM problem shown in Fig. 1 should be extended to manage linguistic information. According to Herrera and Herrera-Viedma in [12], the solution scheme of a linguistic decision making problem must be formed by the following steps (see Fig. 2):

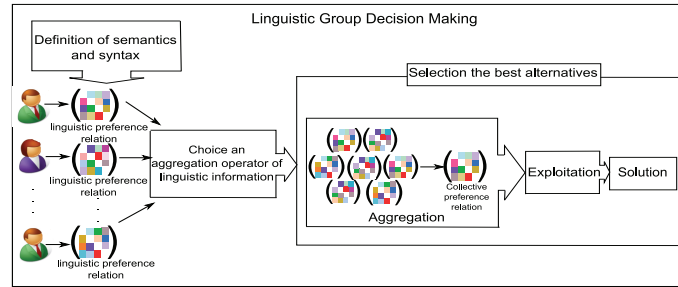


Figure 2: Schema of a group decision making problem by using linguistic information

- *The choice of the linguistic term set with its semantics.* It establishes the linguistic descriptors that the experts will use to provide their preferences about the alternatives regarding their knowledge and experience.
- *The choice of an aggregation operator for linguistic information.* A linguistic aggregation operator is chosen to aggregate the linguistic preferences provided by experts.
- *Selection of the best alternative(s).* It consists of selecting the best alternative or subset of alternatives. It is carried out by following the general scheme with two phases shown in Fig. 1.

Experts provide linguistic information, therefore it is necessary to apply processes of CWW in the aggregation phase by using linguistic computing models [13, 40, 42]. In our proposal, we will use the 2-tuple linguistic representation model introduced by Herrera and Martínez in [13] because of its

precision, simplicity and interpretability in the computations with linguistic information in the aggregation phase [32]

The 2-tuple linguistic representation model extends the fuzzy linguistic approach for modelling linguistic information by introducing a new parameter called *symbolic translation*.

**Definition 1.** [13, 23] *The symbolic translation is a numerical value assessed in  $[-0.5, 0.5)$  that supports the "difference of information" between a counting of information  $\beta$  assessed in the interval of granularity  $[0, g]$  of the term set  $S$  and the closest value in  $\{0, \dots, g\}$  which indicates the index of the closest linguistic term in  $S$ .*

This concept was used to develop a linguistic representation model that represents the linguistic information by means of 2-tuples  $(s_i, \alpha)$ ,  $s_i \in S$ , and  $\alpha_i \in [-0.5, 0.5)$ .

This representation model defines a set of functions to facilitate computational processes with 2-tuples [13].

**Definition 2.** [13, 23] *Let  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  be a set of linguistic terms. The 2-tuple set associated with  $S$  is defined as  $\langle S \rangle = S \times [-0.5, 0.5)$ . We define the function  $\Delta : [0, g] \rightarrow \langle S \rangle$  given by*

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \quad \text{with} \quad \begin{cases} i = \text{round}(\beta), \\ \alpha = \beta - i, \end{cases} \quad (1)$$

where *round* assigns to  $\beta$  the integer number  $i \in \{0, \dots, g\}$  closest to  $\beta$ .

**Remark 1.**  $\Delta$  is a bijective function [13] and  $\Delta^{-1} : \langle S \rangle \rightarrow [0, g]$  is defined by  $\Delta^{-1}(s_i, \alpha) = i + \alpha$ .

**Remark 2.** *The conversion between a linguistic term into a linguistic 2-tuple consists of adding a value 0 as symbolic translation,  $s_i \in S \Rightarrow (s_i, 0)$ .*

Let us suppose a symbolic aggregation operation over labels assessed in  $S = \{\text{neither, very low, low, medium, high, very high, absolute}\}$  that obtains as result  $\beta = 4.25$  then the representation of this information by means of a 2-tuple is shown in Fig. 3.

The linguistic 2-tuple model has defined a computational model based on the functions  $\Delta$  and  $\Delta^{-1}$  and defines a negation operator, several aggregation functions and the comparison between two 2-tuples [13].

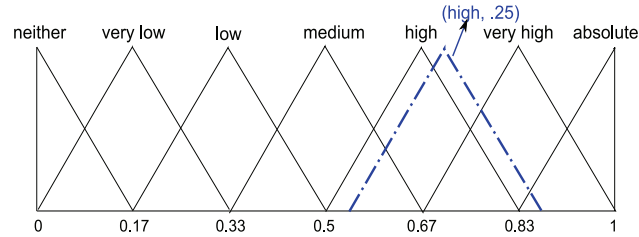


Figure 3: A 2-tuple linguistic representation

**3. Eliciting linguistic information in hesitant situations in decision making: The use of flexible linguistic expressions**

Usually experts involved in GDM problems defined in linguistic frameworks use single values to provide their preferences. For example, let's suppose a group of experts on literature  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  has to express its preferences on several books  $X = \{book\_A, book\_B, book\_C\}$  to publish one of them (see Fig. 4), by using the linguistic term set  $S$ , to provide the degree of preference between every two alternatives:

$$S = \{neither, very\ low, low, medium, high, very\ high, absolute\}$$

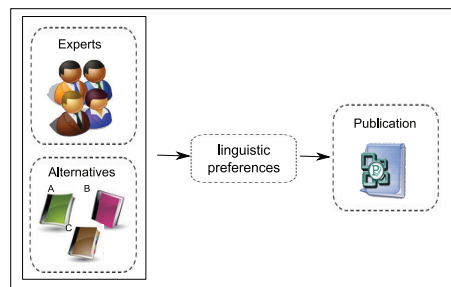


Figure 4: Select a book to publish it

Expert  $e_1$  could provide the following preference relation,

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & high & very\ high \\ medium & - & high \\ low & very\ low & - \end{pmatrix}$$

being  $p_{13}^1$ , the degree of preference of *book\_A* regarding *book\_C* *very high*. Nevertheless, when experts face decision situations in which there is a high degree of uncertainty, they often hesitate among different linguistic terms and would like to use more complex linguistic expressions, that cannot be built in classical linguistic approaches to express their preferences.

Such a limitation for expressing linguistic preferences in hesitant situations is because of the use of linguistic terms defined a priori, and because most of linguistic approaches model the information by using just one linguistic term. To overcome it, different proposals [20, 37, 40] provide more flexible and richer expressions than can include more than one linguistic term:

- Tang and Zheng introduced in [37] a linguistic approach that allows the construction of linguistic expressions from a set of linguistic terms  $S$ , by using logical connectives ( $\vee, \wedge, \neg, \longrightarrow$ ), whose semantics are represented by fuzzy relations that describe the degree of similarity between linguistic terms. The set of all linguistic expressions is denoted as  $LE$  and recursively defined as:

1.  $L_i \in LE$  for  $i = 1, \dots, n$
2. if  $\theta, \phi \in LE$  then  $\neg\theta, \theta \vee \phi, \theta \wedge \phi, \theta \longrightarrow \phi \in LE$

Examples of linguistic expressions in  $LE$  generated from  $S$  could be:

$$\neg high \vee medium$$

$$medium \wedge high$$

- Wang and Hao proposed in [40] a linguistic modelling based on the proportions of two consecutive linguistic terms represented by 2-tuples to express linguistic expressions. A proportional 2-tuple value has a linguistic term in each 2-tuple that represents the linguistic information and a numerical value that represents its proportion in the linguistic expression.

Examples of linguistic expressions based on proportional 2-tuples in  $S$  are:

$$\{(high, 0.25), (very\ high, 0.75)\}$$

$$\{(low, 0.37), (medium, 0.63)\}$$

- Ma et al. developed in [20] a model to increase the flexibility of linguistic expressions by using multiple linguistic terms that are integrated in *synthesized comments*. There are not any rule to fix the syntax of such synthesized comments obtained from multiple terms as:

Table 1: Synthesized comments

neither	very low	low	medium	high	very high	absolute	Comment
0	0	1	1	0	0	0	<i>Commonly</i>
0	0	0	0	0	1	1	<i>Excellent</i>

Because of the use of the several linguistic terms in the synthesized terms, the computations on them are based on a fuzzy model and measures of determinacy and consistency of the linguistic terms.

Notwithstanding the previous approaches provide a higher flexibility to express linguistic expressions in hesitant decision situations, none of them is close to human beings cognitive model either provides suitable expressions for linguistic preferences in GDM. Maybe this is the reason no one has been applied to GDM problems.

Here, we consider another possibility for generating more elaborated linguistic expressions that consists of using a context-free grammar [3]. Rodríguez et al. show in [33] how to generate comparative linguistic expressions by using a context-free grammar. Depending on the specific problem, the context-free grammar can generate different linguistic expressions. Given that our aim is to deal with hesitant situations in GDM, we have considered for eliciting linguistic preferences in such problems, a similar but extended context-free grammar from the defined in [33], because it may generate comparative linguistic expressions similar to the expressions used by experts in GDM problems.

**Definition 3.** Let  $G_H$  be a context-free grammar and  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  a linguistic term set. The elements of  $G_H = (V_N, V_T, I, P)$  are defined as follows:

$$V_N = \{\langle \text{primary term} \rangle, \langle \text{composite term} \rangle, \langle \text{unary relation} \rangle, \langle \text{binary relation} \rangle, \langle \text{conjunction} \rangle\}$$

$$V_T = \{\text{lower than, greater than, at least, at most, between, and, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$$

$$I \in V_N$$

The production rules are defined in an extended Backus Naur Form so that the brackets enclose optional elements and the symbol | indicates alternative elements [3]. For the context-free grammar,  $G_H$ , the production rules are the following:

$$\begin{aligned} P &= \{I ::= \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{composite term} \rangle \\ \langle \text{composite term} \rangle &::= \langle \text{unary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{binary relation} \rangle \\ \langle \text{primary term} \rangle \langle \text{conjunction} \rangle \langle \text{primary term} \rangle \\ \langle \text{primary term} \rangle &::= s_0 | s_1 | \dots | s_g \\ \langle \text{unary relation} \rangle &::= \text{lower than} | \text{greater than} | \text{at least} | \text{at most} \\ \langle \text{binary relation} \rangle &::= \text{between} \\ \langle \text{conjunction} \rangle &::= \text{and} \} \end{aligned}$$

**Remark 3.** The unary relations “at least” and “at most” might be equivalent to the relations “greater or equal than” and “lower or equal than”.

The expressions produced by the context-free grammar  $G_H$ , may be either single valued linguistic terms  $s_i \in S$ , or comparative linguistic expressions. Both types of expressions define the expression domain generated by  $G_H$  and it is noted as  $S_U$ .

By using the previous grammar  $G_H$ , the expert  $e_1$  may elicit their preferences about the books by means of comparative linguistic expressions closer to human beings such as,

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \text{between high and very high} & \text{very high} \\ \text{at most low} & - & \text{high} \\ \text{at most low} & \text{between very low and low} & - \end{pmatrix}$$

These comparative linguistic expressions generated by  $G_H$ , can not be directly used for CWW, therefore in [33] a transformation function was proposed to transform them into HFLTS.

**Definition 4.** [33] An HFLTS,  $H_S$ , is an ordered finite subset of consecutive linguistic terms of  $S$ , where  $S = \{s_0, \dots, s_g\}$  is a linguistic term set.

For example, let  $S = \{\text{neither, very low, low, medium, high, very high, absolute}\}$  be a linguistic term set and  $\vartheta$  a linguistic variable, an HFLTS could be,

$$H_S(\vartheta) = \{\text{high, very high, absolute}\}$$

The comparative linguistic expressions are transformed into HFLTS by means of the transformation function  $E_{G_H}$ . These transformations depend on of the comparative linguistic expressions generated by  $G_H$ .

**Definition 5.** Let  $E_{G_H}$  be a function that transforms linguistic expressions,  $ll \in S_U$ , obtained by using  $G_H$ , into HFLTS,  $H_S$ . Being  $S$  the linguistic term set used by  $G_H$ , and  $S_U$  is the expression domain generated by  $G_H$ ,

$$E_{G_H} : S_U \longrightarrow H_S$$

The comparative linguistic expressions generated by  $G_H$ , using the production rules are converted into HFLTS by means of the following transformations:

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i | s_i \in S\}$
- $E_{G_H}(\text{at most } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j \leq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{lower than } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j < s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{at least } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j \geq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{greater than } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j > s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{between } s_i \text{ and } s_j) = \{s_k | s_k \in S \text{ and } s_i \leq s_k \leq s_j\}$

Therefore, the previous comparative linguistic expressions provided by the expert  $e_1$  over the books are transformed into HFLTS as follows,

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \{\text{high, very high}\} & \{\text{very high}\} \\ \{\text{high, very high, absolute}\} & - & \{\text{high}\} \\ \{\text{neither, very low, low}\} & \{\text{very low, low}\} & - \end{pmatrix}$$

In order to facilitate the computations with HFLTS, it was introduced the concept of envelope of an HFLTS whose definition is,

**Definition 6.** [33] *The envelope of a HFLTS,  $env(H_S)$ , is a linguistic interval whose limits are obtained by means of its upper bound (max) and its lower bound (min):*

$$env(H_S) = [H_{S-}, H_{S+}], \quad H_{S-} \leq H_{S+}$$

where the upper bound and lower bound of  $H_S$  are defined as,

$$H_{S+} = \max(s_i) = s_j, \quad s_i \in H_S \text{ and } s_i \leq s_j \quad \forall i$$

$$H_{S-} = \min(s_i) = s_j, \quad s_i \in H_S \text{ and } s_i \geq s_j \quad \forall i$$

The CWW processes are carried out by using these linguistic intervals.

#### 4. A group decision making model dealing with comparative linguistic expressions

In this section, it is presented a novel GDM model capable to deal either with single linguistic terms or with comparative linguistic expressions, based on context-free grammars and HFLTS, that facilitate the elicitation of linguistic information in group decision problems dealing with hesitant situations. Once the model has been presented, it will be described an algorithm to solve GDM problems applying such a model.

##### 4.1. Hesitant linguistic group decision making model

This model considers that experts involved in the problem can use single linguistic terms or comparative linguistic expressions generated by the context-free grammar  $G_H$ , to express their preferences according to their needs.

The use of comparative linguistic expressions and HFLTS implies that the proposed model extends and modifies the linguistic solving scheme shown in Fig. 2 as follows (see Fig. 5):

1. *Definition of semantics, syntax and context-free grammar:* this phase is modified from Fig. 2 in order to include the definition of the context-free grammar  $G_H$ , to generate the comparative linguistic expressions.
2. *Transformation into linguistic intervals:* this new phase is necessary to manage the comparative linguistic expressions by HFLTS.
3. *Choice of aggregation operator:* it is similar to the scheme in Fig. 2, but the operators operate on linguistic intervals.
4. *Selection process:* it obtains the best alternative or set of alternatives according to the preferences provided by experts.

In the coming subsections previous phases are described in further detail.

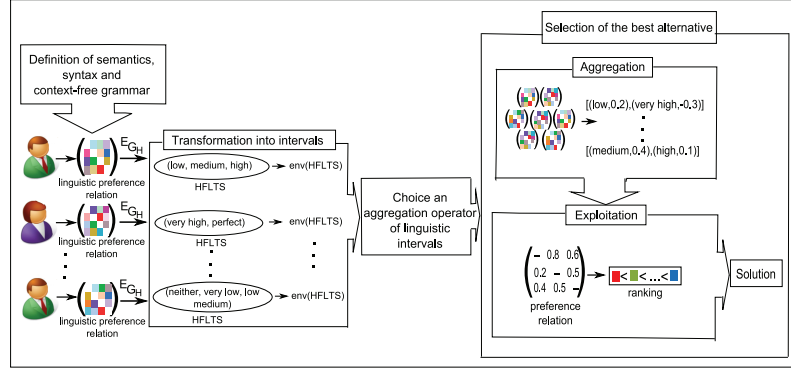


Figure 5: Scheme of the proposed group decision making model

4.1.1. Definition of semantics, syntax and context-free grammar

As it was revised in section 2.2 and according to [12], the use of linguistic information in decision making implies to establish the linguistic descriptors that will be used by the experts to provide their preferences.

However, the use of comparative linguistic expressions and HFLTS makes necessary to extend this phase and include the definition of the context-free grammar  $G_H$ , that generates comparative linguistic expressions that experts will use to provide their preferences in the GDM problem.

The context-free grammar  $G_H$ , is problem dependent but for GDM problems the one presented in Def. 3 is a good basis because of the comparative linguistic expressions obtained are suitable for expressing linguistic preferences in preference relations.

4.1.2. Transformation of the linguistic expressions into linguistic intervals

In this phase the linguistic expressions of the preference relations provided by experts are transformed into linguistic intervals to facilitate the processes of CWW in the selection phase. To do so, once the linguistic descriptors have been selected and their semantics defined, the experts that take part in the GDM problem provide their preference relations  $P^k$ ,  $k \in \{1, \dots, m\}$ , by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions,  $\mu_{P^k} : X \times X \rightarrow S_U$ ,

$$P^k = \begin{pmatrix} p_{11}^k & \cdots & p_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}^k & \cdots & p_{nn}^k \end{pmatrix}$$

in which each assessment  $p_{ij}^k \in S_u$ , represents the preference degree of the alternative  $x_i$  over  $x_j$  according to expert  $e_k$ . These preferences are expressed in the expression domain  $S_u$ , generated by  $G_H$ , to facilitate the elicitation of linguistic expressions.

It is necessary to transform both types of terms into HFLTS for carrying out the processes of CWW in the *selection phase* (see Fig. 5). Hence, the elicited preferences are transformed into HFLTS by means of the transformation function  $E_{G_H}$ , that must be defined in this phase. Similarly to the previous phase, the transformation function introduced in Def. 5 is an initial basis for GDM problems.

$$E_{G_H}(p_{ij}^k) = H_S(p_{ij}^k)$$

where  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  and  $n$  the number of alternatives.

To carry out the computations in the *selection phase*, according to the computing model defined for HFLTS, it is obtained the envelope for each HFLTS that will be used to aggregate the preferences provided by experts,

$$env(H_S(p_{ij}^k)) = [p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$$

Therefore, the preference relations provided by experts are represented by linguistic intervals as follows,

$$P^k = \begin{pmatrix} [p_{11}^{k-}, p_{11}^{k+}] & \cdots & [p_{1n}^{k-}, p_{1n}^{k+}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [p_{n1}^{k-}, p_{n1}^{k+}] & \cdots & [p_{nn}^{k-}, p_{nn}^{k+}] \end{pmatrix}$$

#### 4.1.3. Choice of an aggregation operator for linguistic intervals

Similarly to [12], in this case, it will be selected a suitable aggregation operator able to deal with linguistic intervals obtained in the previous phase.

This choice is problem dependent and usually one or more aggregation operators are necessary to obtain a solution of the GDM problem.

4.1.4. *Selection of the best alternative(s)*

The selection process looks for the solution set of alternatives for the GDM problem. It follows the scheme presented in Fig. 5 composed by two steps that are further detailed below.

1. *Aggregation of the preference relations represented by linguistic intervals.*

So far, the elicited preferences by experts are modelled by linguistic intervals. In the aggregation step, such preferences will be aggregated by the operators selected previously to obtain a collective preference for each alternative.

Taking advantage of the linguistic intervals, this model interprets those preferences from two points of view in hesitant situations, being the lower value of the envelope the pessimistic perception and the greater one the optimistic perception. A double aggregation process is carried out keeping initially apart both perceptions (see Fig. 6).

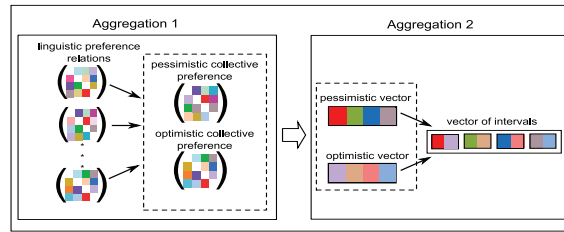


Figure 6: Scheme of the aggregation process

- i) *Pessimistic/optimistic collective preference relations.*

It is necessary to choose a linguistic aggregation operator  $\varphi$ , that will depend on the problem. Such an operator will be used to aggregate separately the right and left limits of the linguistic intervals obtaining two collective preference relations  $P_C^+$  and  $P_C^-$ , that represent the collective optimistic and pessimistic perceptions of the aggregated preferences respectively. These collective preferences are represented by 2-tuple linguistic values.

$$P_C^+ = \begin{pmatrix} (s_r, \alpha)_{11}^+ & \cdots & (s_r, \alpha)_{1n}^+ \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_r, \alpha)_{n1}^+ & \cdots & (s_r, \alpha)_{nn}^+ \end{pmatrix} \quad P_C^- = \begin{pmatrix} (s_r, \alpha)_{11}^- & \cdots & (s_r, \alpha)_{1n}^- \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (s_r, \alpha)_{n1}^- & \cdots & (s_r, \alpha)_{nn}^- \end{pmatrix}$$

$$(s_r, \alpha)_{ij}^+ = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(p_{ij}^{k+}))) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

$$(s_r, \alpha)_{ij}^- = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(p_{ij}^{k-}))) \quad \forall k \in \{1, \dots, m\} \quad (3)$$

being  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  and  $s_r \in S = \{s_0, \dots, s_g\}$ .

ii) *Collective linguistic interval vector.*

A collective linguistic interval for each alternative  $x_i$ , is computed. To obtain such an interval, the collective linguistic preferences based on perceptions  $P_C^+$  and  $P_C^-$  are aggregated by using an aggregation operator  $\phi$ , that may be the same as  $\varphi$  or not. The results obtained by these computations are the optimistic  $p_i^+$ , and pessimistic  $p_i^-$ , collective preferences for each alternative  $x_i$ .

$$p_i^+ = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^+)) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (4)$$

$$p_i^- = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^-)) \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \quad (5)$$

A collective linguistic interval is then built for each alternative  $x_i$ , obtaining a vector of intervals of collective preferences for the alternatives:

$$V^R = (p_1^R, \dots, p_n^R) \quad (6)$$

where  $p_i^R = [p_i^-, p_i^+]$  and  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

2. *Exploitation.*

In the exploitation step, the vector of collective linguistic intervals for the alternatives is used to obtain a ranking of alternatives and select the best one(s) as solution of the GDM problem. There are different approaches to order the alternatives [15, 27, 41]. We will use the approach proposed by Wang et al. in [41] because it allows to obtain a ranking of alternatives by using intervals. Such an approach builds a preference relation between alternatives by using the following definition,

**Definition 7.** [41] Let  $A = [a_1, a_2]$  and  $B = [b_1, b_2]$  be two interval utilities, the preference degree of  $A$  over  $B$  (or  $A > B$ ) is defined as:

$$P(A > B) = \frac{\max(0, a_2 - b_1) - \max(0, a_1 - b_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)} \quad (7)$$

and the preference degree of  $B$  over  $A$  (or  $B > A$ ) as:

$$P(B > A) = \frac{\max(0, b_2 - a_1) - \max(0, b_1 - a_2)}{(a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)} \quad (8)$$

Note that  $P(A < B) + P(B > A) = 1$  and  $P(A > B) = P(B > A) = 0.5$  when  $A = B$ , i.e.  $a_1 = b_1$  and  $a_2 = b_2$ .

**Definition 8.** [41] Let  $P_D$  be a preference relation

$$P_D = \begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

being  $p_{ij} = P(p_i^R > p_j^R)$  the preference degree of the alternative  $x_i$  over  $x_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  and  $p_i^R = [p_i^-, p_i^+]$  and  $p_j^R = [p_j^-, p_j^+]$ .

Eventually, a choice function is used to generate a solution set of alternatives for the decision problem. Different choice functions have been proposed in the literature [11]. We will use a non dominance choice degree,  $NDD$ , that indicates the degree to which an alternative is not dominated by the remaining ones. Its definition is given as follows:

**Definition 9.** [27] Let  $P_D = [p_{ij}]$  be a preference relation defined over a set of alternatives  $X$ . For the alternative  $x_i$ , its non-dominance degree,  $NDD_i$ , is obtained as:

$$NDD_i = \min\{1 - p_{ji}^S, j \neq i\} \quad (9)$$

where  $p_{ji}^S = \max\{p_{ji} - p_{ij}, 0\}$  represents the degree to which  $x_i$  is strictly dominated by  $x_j$ .

And the non dominated alternatives obtained are,

$$X^{ND} = \{x_i/x_i \in X, NDD_i = \max_{x_j \in X} \{NDD_j\}\} \quad (10)$$

#### 4.2. Algorithm of the proposed GDM model

Once the proposed GDM model has been explained in detail, we present an algorithm to solve GDM problems defined in qualitative frameworks in which experts may elicit comparative linguistic expressions applying such a model.

Let us suppose a set of alternatives,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , and a set of experts  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  that express their preference relations by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions.

The algorithm is the following one:

1. Defining the semantics and syntax of the linguistic term set  $S$ .
2. Defining the context-free grammar  $G_H$ .
3. Gathering the preference relations  $P^k$  provided by experts  $k \in \{1, \dots, m\}$ .
4. Transforming the preference relations into HFLTS by using the transformation function  $E_{G_H}$  (see Def. 5).
5. Obtaining for each HFLTS its envelope  $[p_{ij}^{k-}, p_{ij}^{k+}]$  (see Def. 6).
6. Selecting two linguistic aggregation operators  $\varphi$  and  $\phi$ . These two operators might be the same.
7. Obtaining the pessimistic and optimistic collective preference relations  $P_C^-, P_C^+$ , by using the linguistic aggregation operator  $\varphi$ .
8. Computing a pessimistic and optimistic collective preference for each alternative applying Eq. (4) and (5) by using the linguistic aggregation operator  $\phi$ .
9. Building a vector of intervals  $V^R = (p_1^R, \dots, p_n^R)$ , of collective preferences for the alternatives  $p_i^R = [p_i^-, p_i^+]$  by using Eq. (6).
10. Building a preference relation  $P_D$ , by using the Eq. (7) and (8).
11. Applying a non dominance choice degree  $ND D$  by using Eq. (9).
12. Rank the set of alternatives and select the best one(s).

To understand easily the proposed GDM model, a GDM problem will be solved following the steps of the algorithm.

#### 5. Illustrative example

Let us suppose that a conference committee composed by 3 researchers  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ , wants to grant a best paper award in an International Conference. There are four selected papers,  $X = \{\text{John's paper, Mike's paper, David's}$

paper, Frank's paper}. Because of the uncertainty among the papers, it is difficult for the researchers use just one linguistic term to provide their preferences. To facilitate the elicitation of their preferences they can use comparative linguistic expressions close to the human beings cognitive process.

To solve the proposed GDM problem is applied the algorithm presented in section 4.2.

1. *Defining the semantics and syntax of the linguistic term set S*

In GDM problems, experts provide their assessments by means of preference relations, where an assessment represent the preference degree of an alternative over another one. A linguistic term set suitable to express such assessments is:

$$S = \{neither(n), very\ low(vl), low(l), medium(m), high(h), very\ high(vh), absolute(a)\}$$

2. *Defining the context-free grammar  $G_H$ .*

We will use the context-free grammar introduced in Def. 3.

3. *Gathering the preferences provided by experts.*

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & at\ most\ vl & vh & at\ most\ vl \\ at\ least\ vh & - & between\ h\ and\ vh & at\ most\ m \\ l & at\ most\ l & - & greater\ than\ h \\ at\ least\ h & greater\ than\ m & at\ most\ m & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & at\ most\ l & greater\ than\ m & lower\ than\ m \\ greater\ than\ m & - & h & vl \\ at\ most\ vl & l & - & greater\ than\ h \\ between\ h\ and\ vh & vh & between\ n\ and\ l & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & greater\ than\ m & between\ h\ and\ vh & l \\ at\ most\ l & - & at\ least\ h & greater\ than\ m \\ lower\ than\ m & at\ most\ l & - & vh \\ h & at\ most\ l & vl & - \end{pmatrix}$$

4. *Transforming the preference relations into HFLTS.*

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & \{n, vl\} & \{vh\} & \{n, vl\} \\ \{vh, a\} & - & \{h, vh\} & \{n, vl, l, m\} \\ \{l\} & \{n, vl, l\} & - & \{vh, a\} \\ \{h, vh, a\} & \{h, vh, a\} & \{n, vl, l, m\} & - \end{pmatrix}$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} - & \{n, vl, l\} & \{h, vh, a\} & \{n, vl, l\} \\ \{h, vh, a\} & - & \{h\} & \{vl\} \\ \{n, vl\} & \{l\} & - & \{vh, a\} \\ \{h, vh\} & \{vh\} & \{n, vl, l\} & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & \{h, vh, a\} & \{h, vh\} & \{l\} \\ \{n, vl, l\} & - & \{h, vh, a\} & \{h, vh, a\} \\ \{n, vl, l\} & \{n, vl, l\} & - & \{vh\} \\ \{h\} & \{n, vl, l\} & \{vl\} & - \end{pmatrix}$$

5. Obtaining for each HFLTS its envelope.

$$P^1 = \begin{pmatrix} - & [n, vl] & [vh, vh] & [n, vl] \\ [vh, a] & - & [h, vh] & [n, m] \\ [l, l] & [n, l] & - & [vh, a] \\ [h, a] & [h, a] & [n, m] & - \end{pmatrix} P^2 = \begin{pmatrix} - & [n, l] & [h, a] & [n, l] \\ [h, a] & - & [h, h] & [vl, vl] \\ [n, vl] & [l, l] & - & [vh, a] \\ [h, vh] & [vh, vh] & [n, l] & - \end{pmatrix}$$

$$P^3 = \begin{pmatrix} - & [h, a] & [h, vh] & [l, l] \\ [n, l] & - & [h, a] & [h, a] \\ [n, l] & [n, l] & - & [vh, vh] \\ [h, h] & [n, l] & [vl, vl] & - \end{pmatrix}$$

6. Selecting two linguistic aggregation operators.

Without loss of generality and for the sake of simplicity, it is need in the aggregation phase the arithmetic mean aggregation operator based on 2-tuple defined as follows,

**Definition 10.** [13] Let  $x = \{(s_1, \alpha_1), \dots, (s_n, \alpha_n)\}$  be a set of 2-tuples, the 2-tuple arithmetic mean  $\bar{x}$  is computed as,

$$\bar{x} = \Delta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta^{-1}(s_i, \alpha_i)\right) = \Delta\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_i\right) \quad (11)$$

7. Obtaining the pessimistic and optimistic collective preference relations.

$$P_C^+ = \begin{pmatrix} - & (m, 0) & (vh, .33) & (l, -.33) \\ (vh, -.33) & - & (vh, 0) & (m, .33) \\ (l, -.33) & (l, 0) & - & (a, -.33) \\ (vh, 0) & (h, .33) & (l, 0) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{C_{12}}^+ = \Delta\left(\frac{1}{3}(\Delta^{-1}(vl, 0) + \Delta^{-1}(l, 0) + \Delta^{-1}(a, 0))\right) = (m, 0)$$

$$P_C^- = \begin{pmatrix} - & (vl, .33) & (h, .33) & (vl, -.33) \\ (m, 0) & - & (h, 0) & (l, -.33) \\ (vl, -.33) & (vl, -.33) & - & (vh, 0) \\ (h, 0) & (m, 0) & (n, .33) & - \end{pmatrix}$$

$$P_{C_{12}}^- = \Delta\left(\frac{1}{3}(\Delta^{-1}(n, 0) + \Delta^{-1}(n, 0) + \Delta^{-1}(h, 0))\right) = (vl, .33)$$

8. *Computing a pessimistic and optimistic collective preference for each alternative* (see Table 2).

Table 2: Pessimistic and optimistic collective preference for each alternative

	<i>John</i>	<i>Mike</i>	<i>David</i>	<i>Frank</i>
pessimistic	l,.11	m,-.11	l,.11	l,.44
optimistic	m,.33	h,.33	m,.11	h,-.22

$$p_1^- = \Delta\left(\frac{1}{3}(\Delta^{-1}(vl, .33) + \Delta^{-1}(h, .33) + \Delta^{-1}(vl, -.33))\right) = (l, .11)$$

9. *Building a vector of intervals  $V^R = (p_1^R, p_2^R, p_3^R, p_4^R)$  for the alternatives* (see Table 3).

Table 3: Linguistic intervals for each alternative

<i>John</i>	<i>Mike</i>	<i>David</i>	<i>Frank</i>
$p_1^R$	$p_2^R$	$p_3^R$	$p_4^R$
[(l,.11),(m,.33)]	[(m,-.11),(h,.33)]	[(l,.11),(m,.11)]	[(l,.44),(h,-.22)]

10. *Building a preference relation  $P_D$ .*

$$P_D = \begin{pmatrix} - & 0.17 & 0.55 & 0.35 \\ 0.83 & - & 0.91 & 0.68 \\ 0.45 & 0.09 & - & 0.29 \\ 0.65 & 0.32 & 0.71 & - \end{pmatrix}$$

where  $P_{D_{12}}$  is obtained as follows,

$$P_D(p_1^R > p_2^R) = \frac{\max(0, 3.33-2.89) - \max(0, 2.11-4.33)}{(3.33-2.11) + (4.33-2.89)} = 0.17$$

$$p_1^R = [p_1^-, p_1^+] = [\Delta^{-1}(l, .11), \Delta^{-1}(m, .33)] = [2.11, 3.33].$$

11. Afterwards, a non dominance choice degree is applied.

$$P_D^S = \begin{pmatrix} - & 0 & 0.1 & 0 \\ 0.67 & - & 0.82 & 0.36 \\ 0 & 0 & - & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.43 & - \end{pmatrix}$$

$NDD_1 = 0.33$   $NDD_2 = 1$ ,  $NDD_3 = 0.18$ ,  $NDD_4 = 0.64$   
where  $NDD_1$  is computed as follows,

$$NDD_1 = \min\{(1 - 0.67), (1 - 0), (1 - 0.3)\} = 0.33$$

12. And finally, the set of alternatives is ordered,

$$x_2 > x_4 > x_1 > x_3$$

and we select the best one as solution of the GDM problem whose linguistic interval is,

$$x_2 = [(m, -.11), (h, .33)]$$

## 6. Conclusions

The need for modelling complex linguistic expressions in decision making has been pointed out by several authors, because the uncertainty involved in such problems makes that experts hesitate among more than one single linguistic term to express their preferences. Some approaches were developed to accomplish such a necessity. However, none of them has been applied to GDM due to the lack of matching between the expressions generated by those approaches and the expressions used by experts in GDM problems.

In this paper, it has been presented a GDM model capable to deal with comparative linguistic expressions based on context-free grammars and HFLTS to facilitate the elicitation of linguistic information in hesitant decision situations. Such a model carries out the processes of CWW by using a simple and accurate linguistic computing model. Eventually, an illustrative GDM problem has been solved by the proposed model in order to show its performance.

## Acknowledgements

This work is partially supported by the Research Project TIN-2012-31263 and FEDER funds.

### References

- [1] D. Ben-Arieh and Z. Chen. Linguistic group decision-making: Opinion aggregation and measures of consensus. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 5(4):371–386, 2006.
- [2] D. Ben-Arieh and Z. Chen. Linguistic-labels aggregation and consensus measures for autocratic decision making using group recommendations. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 36(3):558–568, 2006.
- [3] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.
- [4] R.A. Carrasco and P. Villar. A new model for linguistic summarization of heterogeneous data: an application to tourism web data sources. *Soft Computing*, 16(1):135–151, 2012.
- [5] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 97:33–48, 1998.
- [6] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, and F. Herrera. Cardinal consistency of reciprocal preference relations: A characterization of multiplicative transitivity. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17:14–23, 2009.
- [7] S.J. Chuu. Selecting the advanced manufacturing technology using fuzzy multiple attributes group decision making with multiple fuzzy information. *Computers & industrial engineering*, 57(3):1033–1042, 2009.
- [8] T. Deng, C. YAng, and Q. Hu. Feature selection in decision systems based on conditional knowledge granularity. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(4):655–671, 2011.
- [9] S. Feng, X. Chen, S. Chen, and X.Lu. Application and evaluation about obstacle edge extraction technology in the parking assistant system. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(6):1342–1349, 2011.

- 
- [10] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy preference modelling and multicriteria decision support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [11] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 120(1):144–161, 2000.
- [12] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67–82, 2000.
- [13] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
- [14] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, and F. Chiclana. A consensus support system model for group decision-making problems with multi-granular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.
- [15] Y. Jiang. An approach to group decision making based on interval fuzzy preference relations. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 16(1):113–120, 2007.
- [16] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:105–118, 1986.
- [17] D. Liu, Y. Yao, and T. Li. Three-way investment decisions with decision-theoretic rough sets. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(1):66–74, 2011.
- [18] J. Lu, G. Zhang, D. Ruan, and F. Wu. *Multi-Objective Group Decision Making. Methods, Software and Applications with Fuzzy Set Techniques*. Imperial College Press, 2007.
- [19] J. Lu, G. Zhang, and F. Wu. Team situation awareness using web-based fuzzy group decision support systems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(1):51–60, 2008.
- [20] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision

- making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):165–181, 2007.
- [21] M.U. Marimin, H. Itsuo, and T. Hiroyuki. Linguistic labels for expressing fuzzy preference relations in fuzzy group decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. Part B: Cybernetics*, 28(2):205–217, 1998.
- [22] L. Martínez. Sensory evaluation based on linguistic decision analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):148–164, 2007.
- [23] L. Martínez and F. Herrera. An overview on the 2-tuple linguistic model for computing with words in decision making: Extensions, applications and challenges. *Information Sciences*, 207(1):1–18, 2012.
- [24] L. Martínez, J. Liu, and J.B. Yang. A fuzzy model for design evaluation based on multiple criteria analysis in engineering systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(3):317–336, 2006.
- [25] L. Martínez, D. Ruan, and F. Herrera. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):382–395, 2010.
- [26] J.M. Mendel, L.A. Zadeh, R.R. Yager, J. Lawry, H. Hagsras, and S. Guadarrama. What computing with words means to me. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 5(1):20–26, 2010.
- [27] S.A. Orlovski. Decision-making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:155–167, 1978.
- [28] I. Palomares, J. Liu, Y. Xu, and L. Martínez. Modelling experts’ attitudes in group decision making. *Soft Computing*, 16(10):1755–1766, 2012.
- [29] R.O. Parreiras, P. Ekel, and F. Bernardes Jr. A dynamic consensus scheme based on a nonreciprocal fuzzy preference relation modeling. *Information Sciences*, 211(0):1 – 17, 2012.
- [30] R.O. Parreiras, P.Ya. Ekel, J.S.C. Martini, and R.M. Palhares. A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. *Information Sciences*, 180(7):1075–1089, 2010.

- 
- [31] W. Pedrycz, P. Ekel, and R.O. Parreiras. *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*. John Wiley and Sons, Ltd, 2011.
- [32] R.M. Rodríguez and L. Martínez. An analysis of symbolic linguistic computing models in decision making. *International Journal of General Systems*, 42(1):121–136, 2013.
- [33] R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.
- [34] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.
- [35] A. Sanayei, S.F. Mousavi, and A.Yazdankhah. Group decision making process for supplier selection with VIKOR under fuzzy environment. *Expert systems with applications*, 37(1):24–30, 2010.
- [36] K. Taghizadeh, M. Bagherpour, and I. Mahdavi. Application of fuzzy multi-objective linear programming model in a multi-period multi-product production planning problem. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 4(2):228–243, 2011.
- [37] Y. Tang and J. Zheng. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(12):1662–1673, 2006.
- [38] R.M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decisionmaking with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-10(11):716–723, 1980.
- [39] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.
- [40] J.H. Wang and J. Hao. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):435–445, 2006.
- [41] Y.M. Wang, J.B. Yang, and D.L. Xu. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers and Operations Research*, 32:2027–2049, 2005.

- [42] D. Wu and J.M. Mendel. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1145–1161, 2007.
- [43] Y.J. Xu and Q.L. Da. Standard and mean deviation methods for linguistic group decision making and their applications. *Expert Systems with Applications*, 37(8):5905–5912, 2010.
- [44] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3-4):237–261, 1995.
- [45] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [46] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. *Information Sciences, Part I, II, III*, (8,9):199–249,301–357,43–80, 1975.

### B.7. Multicriteria Decision Making Models with Comparative Linguistic Expressions

We have proposed two novel multicriteria decision making models with comparative linguistic expressions. One of them has defined own aggregation operators to aggregate HFLTS and it is explained in the attached paper in Section B.5. The second one is based on 2-tuple and it is extended to propose a multicriteria multiexpert decision making model in which experts can provide their assessments by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions. The computing with words processes are carried out by using the linguistic 2-tuple model because it is simple, efficient and obtains precise and understandable results. It consists of 6 phases as shown in Figure B.2.

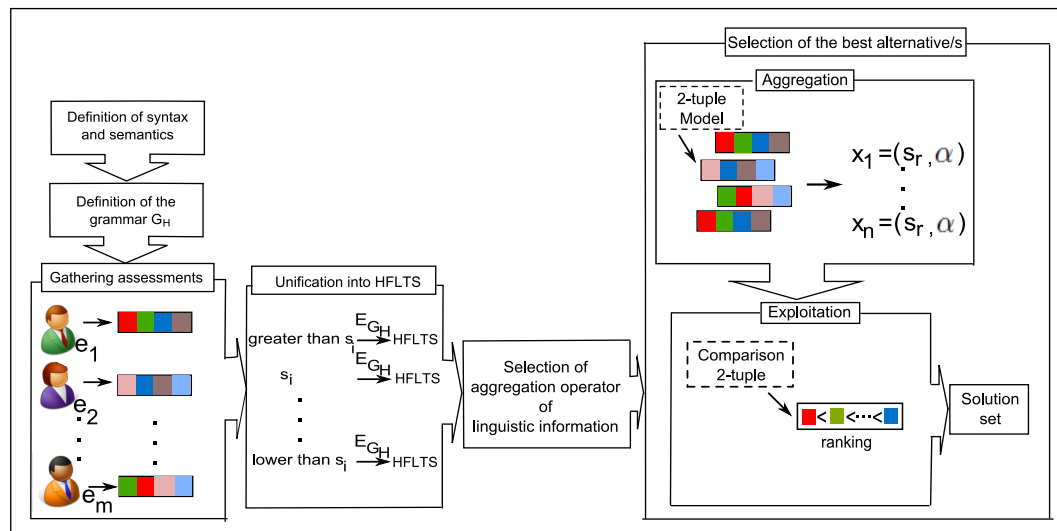


Figure B.2: Multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions based on 2-tuple

1. *Definition of semantics and syntax*

This phase establishes the granularity of the uncertainty  $g$ , the linguistic term set  $S$ , which will be used by experts to provide their assessments, and the semantics of such linguistic terms.

2. *Definition of the context-free grammar*

It is defined a context-free grammar  $G_H$ , that generates comparative linguistic expressions that experts will use to provide their assessments. The context-free grammar  $G_H$ , is problem dependent, therefore, it is important to choose the elements of the grammar  $G_H = (V_N, V_T, P, I)$ .

3. *Gathering of assessments*

Each expert  $E = \{e_1, \dots, e_l\}$ , provides his/her assessments over the set of criteria  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ , defined for each alternative  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions generated by the context-free grammar  $G_H$ .

4. *Unification of linguistic expressions into HFLTS*

To carry out the computing with words processes in the phase *selection of the best alternative*, the linguistic expressions provided by experts are unified into a same domain. To do so, it is used the transformation function  $E_{G_H}$ , that transforms both single linguistic terms and comparative linguistic expressions into HFLTS.

$$E_{G_H}(v_{ij}^k) = H_S(v_{ij}^k)$$

5. *Selection of the linguistic information aggregation operator*

Taking into account that this model uses the linguistic 2-tuple model, to carry out the computing with words processes it is chosen an aggregation operator  $\varphi$  based on 2-tuple. Different aggregation operators to aggregate 2-tuple can be found in the literature [67]. The choice of the operator depends on the problem.

6. *Selection of the best alternative.*

This phase selects the set of alternatives as solution of the decision making problem and it is divided into two steps: (i) *Aggregation* and (ii) *Exploitation*.

i) *Aggregation of linguistic information*

The preference vectors provided by experts are aggregated to obtain a collective value for each alternative. Taking into account that the

---

assessments were unified into HFLTS, a three steps aggregation process is carried out.

- Firstly, the linguistic terms that compound the HFLTS are aggregated to obtain the assessment represented by a 2-tuple value. To do so, each linguistic term is transformed into a 2-tuple value by adding a value 0 as symbolic translation.

$$H_S(v_{ij}^k) = \{s_r, s_{r+1}, \dots, s_t\}, \quad s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0),$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \in \{1, \dots, m\}$  and  $k \in \{1, \dots, l\}$ .

Once obtained the 2-tuple values, they are aggregated by means of the aggregation operator  $\varphi$ , chosen previously.

$$v_{C_{ij}}^k = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^k)) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\}$$

- In the second aggregation process, the criteria for each expert are aggregated to obtain a collective value for each criterion by using an aggregation operator  $\phi$ , that may be the same as  $\varphi$  or not.

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^k)) \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$  and  $j \in \{1, \dots, m\}$ .

- Finally, the collective criteria for each alternative are aggregated by means of an aggregation operator  $\theta$ , to obtain a collective value for each alternative  $v_{C_i}$ .

$$v_{C_i} = \Delta(\theta(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

where  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

#### ii) *Exploitation*

In this step the collective values for each alternative are used to obtain a ranking of alternatives and select the best one/s. To do so, it is used the comparison of 2-tuples [67].

The algorithm defined for the multicriteria multiexpert decision making model is the following one.

---

1. Defining the semantics and syntaxis of the linguistic term set  $S$ .
2. Defining the context-free grammar  $G_H$ .
3. Gathering the assessments provided  $v_{ij}^k$ ,  $i = \{1, \dots, n\}$ ,  $j = \{1, \dots, m\}$  and  $k = \{1, \dots, l\}$ .
4. FOR each expert  $k = \{1, \dots, l\}$  DO
  - 4.1 FOR each row  $i = \{1, \dots, n\}$  DO
    - 4.1.1 FOR each column  $j = \{1, \dots, m\}$  DO

$$E_{G_H}(v_{ij}^k) = H_S^k(v_{ij})$$

END FOR

END FOR

END FOR

5. Selecting three aggregation operators of linguistic information  $\varphi$ ,  $\phi$  and  $\theta^*$ .
6. FOR each expert  $k = \{1, \dots, l\}$  DO
  - 6.1 FOR each row  $i = \{1, \dots, n\}$  DO
    - 6.1.1 FOR each column  $j = \{1, \dots, m\}$  DO
      - 6.1.1.1 FOR each linguistic term of the HFLTS ( $s_r$ ), DO

$$s_r \in S \Rightarrow (s_r, 0)$$

END FOR

END FOR

END FOR

END FOR

7. FOR each expert  $k = \{1, \dots, l\}$  DO
  - 7.1 FOR each row  $i = \{1, \dots, n\}$  DO

---

\*These operators might be the same.

---

7.1.1 FOR each column  $j = \{1, \dots, m\}$  DO

$$v_{C_{ij}}^k = \Delta(\varphi(\Delta^{-1}(s_r, 0)_{ij}^k)) \quad \forall r \in \{1, \dots, t\}$$

END FOR

END FOR

END FOR

8. FOR each row  $i = \{1, \dots, n\}$  DO

8.1 FOR each column  $j = \{1, \dots, m\}$  DO

$$v_{C_{ij}} = \Delta(\phi(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij}^k)) \quad \forall k \in \{1, \dots, l\}$$

END FOR

END FOR

9. FOR each alternative  $i = \{1, \dots, n\}$  DO

$$v_{C_i} = \Delta(\theta(\Delta^{-1}(s_r, \alpha)_{ij})), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}$$

END FOR

10. Selecting the best alternative.

$$X = \max_{x_i \in X} \{(s_r, \alpha)\}$$



## B.8. Multicriteria Multiexpert Decision Making Model applied to Nuclear Safeguards Evaluation

As it was pointed out in the motivation of this research report, one of the reasons to improve the flexibility of the elicitation of linguistic information is because in the problem of nuclear safeguards evaluation, the IAEA experts need linguistic expressions more elaborated than single linguistic terms to provide their assessments in hesitant situations. To overcome this limitation, in this section we solve the problem of nuclear safeguards evaluation by applying the multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions based on 2-tuple presented in the Section B.7.

Firstly, we briefly introduce the problem of nuclear safeguards evaluation, and the algorithm defined for the multicriteria multiexpert decision making model is then applied.

### B.8.1. Description of the Nuclear Safeguards Evaluation Problem

Before introducing the problem, we highlight that the data used for the nuclear safeguards evaluation problem are real data. They were provided by professor Da Ruan who worked in SCK•CEN, (nuclear research centre) in Mol, Belgium.

Let us suppose a specific evaluation process to evaluate the possibility of “conducting a specific process gaseous diffusion enrichment” within the evaluation of the production of highly enriched uranium.

Table B.1 shows the set of indicators (criteria) grouped by their type (strong, medium and weak), which are used in this evaluation process. The weights vector provided by the indicators is  $W_{ind} = (9, 3, 1)$ .

A set of four IAEA experts  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  takes part in this evaluation process and its weights vector is  $W_{exp} = (3, 5, 4, 2)$ . The IAEA experts can provide their assessments by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions. Afterwards, we follow the steps of the algorithm defined for the multicriteria multiexpert decision making model.

---

Tabla B.1: Indicators description

Indicator	Description	Type
1	Compressor for pure UF6	Strong
2	Gaseous diffusion barrier	
3	Heat exchanger for cooling pure UF6	
4	Diffuser housing/vessel	Medium
5	Gas blower for UF6	
6	Rotary shaft seal	
7	Special control valve (large aperture)	
8	Special shut-off valve (large aperture)	
9	Chlorine trifluoride	
10	Nickel powder, high purity	
11	Gasket, large	Weak
12	Feed system/product and tails withdrawal	
13	Expansion bellows	
14	Header piping system	
15	Vacuum system and pump	
16	Aluminum oxide powder	
17	Nickel powder	
18	PTFE (teflon)	
19	Large electrical switching yard	
20	Large heat increase in air or water	
21	Larger specific power consumption	
22	Larger cooling requirements (towers)	

### B.8.2. Resolution Algorithm

1. *Defining the semantics and syntax of the linguistic term set S.*

In this multicriteria multiexpert decision making problem, the assessment  $v_i^k$  represents the preference of the IAEA expert  $k$  over the indicator  $i$ . A suitable linguistic term set to solve this problem might be the following one,

$$S = \{Nothing(N), Very\ Low(VL), Low(L), Medium(M), High(H), Very\ High(VH), Perfect(P)\}$$


---

2. *Defining the context-free grammar  $G_H$ .*

The context-free grammar  $G_H$  to generate comparative linguistic expressions is the following one,

$$V_N = \{\langle \text{primary term} \rangle, \langle \text{composite term} \rangle, \langle \text{unary relation} \rangle, \langle \text{binary relation} \rangle, \langle \text{conjunction} \rangle\}$$

$$V_T = \{\text{lower than, greater than, at least, at most, between, and, } s_0, s_1, \dots, s_g\}$$

$$I \in V_N$$

$$P = \{I ::= \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{composite term} \rangle$$

$$\langle \text{composite term} \rangle ::= \langle \text{unary relation} \rangle \langle \text{primary term} \rangle | \langle \text{binary relation} \rangle$$

$$\langle \text{primary term} \rangle \langle \text{conjunction} \rangle \langle \text{primary term} \rangle$$

$$\langle \text{primary term} \rangle ::= s_0 | s_1 | \dots | s_g$$

$$\langle \text{unary relation} \rangle ::= \text{lower than} | \text{greater than} | \text{at least} | \text{at most}$$

$$\langle \text{binary relation} \rangle ::= \text{between}$$

$$\langle \text{conjunction} \rangle ::= \text{and}\}$$

3. *Gathering the assessments provided by experts*

The assessments provided by IAEA experts over the indicators set is shown in Table B.2.

Tabla B.2: Assessments provided by IAEA experts

<b>Ind.</b>	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	H	L	H	P
2	at least VH	VH	btw* H and VH	at least VH
3	VH	M	P	P
4	M	M	VH	H
5	M	btw VL and L	M	greater than H
6	H	M	VH	M
7	at most L	L	VH	VH
8	P	lower than L	greater than H	VH
9	M	L	VH	H
10	L	L	M	H
11	lower than L	M	VH	btw M and H
12	VL	btw L and M	L	H
13	P	P	P	at least H
14	VH	M	P	H
15	btw L and M	at most L	lower than L	at most L
16	L	L	L	M
17	H	M	greater than H	btw H and VH
18	M	M	M	L
19	btw L and M	at least VH	VH	VH
20	P	M	P	H
21	H	M	VH	P
22	btw L and M	VL	L	at most L

\*btw stand for between.

---

#### 4. Unification into HFLTS

The assessments are unified into HFLTS by using the transformation function  $E_{G_H}$  (see Table B.3). The transformations are the following ones:

- $E_{G_H}(s_i) = \{s_i | s_i \in S\}$
- $E_{G_H}(\text{at most } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j \leq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{lower than } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j < s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{at least } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j \geq s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{greater than } s_i) = \{s_j | s_j \in S \text{ and } s_j > s_i\}$
- $E_{G_H}(\text{between } s_i \text{ and } s_j) = \{s_k | s_k \in S \text{ and } s_i \leq s_k \leq s_j\}$

#### 5. Selection of three linguistic information aggregation operators.

Without loss of generality and for the sake of simplicity, the aggregation operators used in this phase will be the OWA operator to aggregate the linguistic terms of the HFLTS, whose weights vector is obtained by means of Filev and Yager approach [50]. Regarding aggregation of indicators and IAEA experts, we will use the weighted mean according to the weight provided in the definition of the problem. The weights will be normalized in  $[0,1]$ .

#### 6. Transformation into 2-tuple

The assessments are transformed into 2-tuple values to carry out the computing processes in the aggregation.

---

Tabla B.3: Assessments unified into HFLTS

Indicator	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	{H}	{L}	{H}	{P}
2	{VH,P}	{VH}	{H,VH}	{VH,P}
3	{VH}	{M}	{P}	{P}
4	{M}	{M}	{VH}	{H}
5	{M}	{VL,L}	{M}	{VH,P}
6	{H}	{M}	{VH}	{M}
7	{N,VL,L}	{L}	{VH}	{VH}
8	{P}	{N,VL}	{VH,P}	{VH}
9	{M}	{L}	{VH}	{H}
10	{L}	{L}	{M}	{H}
11	{N,VL}	{M}	{VH}	{M,H}
12	{ML}	{L,M}	{L}	{H}
13	{P}	{P}	{P}	{H,VH,P}
14	{VH}	{M}	{P}	{H}
15	{L,M}	{N,VL,L}	{N,VL}	{N,VL,L}
16	{L}	{L}	{L}	{M}
17	{H}	{M}	{VH,P}	{H,VH}
18	{M}	{M}	{M}	{L}
19	{L,M}	{VH,P}	{VH}	{VH}
20	{P}	{M}	{P}	{H}
21	{H}	{M}	{VH}	{P}
22	{L,M}	{VL}	{L}	{N,VL,L}

7. *Aggregation, step 1.*

Table B.4 shows the results obtained of the aggregation of the linguistic terms of the HFLTS by using the OWA operator. The results are represented by 2-tuple values.

---

Tabla B.4: Result of aggregating the linguistic terms of the HFLTS

Indicator	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$
1	(H,0)	(L,0)	(H,0)	(P,0)
2	(P,-.17)	(VH,0)	(VH,-.5)	(P,-.17)
3	(VH,0)	(M,0)	(P,0)	(P,0)
4	(M,0)	(M,0)	(VH,0)	(H,0)
5	(M,0)	(L,-.5)	(M,0)	(P,-.17)
6	(H,0)	(M,0)	(VH,0)	(M,0)
7	(VL,-.11)	(L,0)	(VH,0)	(VH,0)
8	(P,0)	(N,.17)	(P,-.17)	(VH,0)
9	(M,0)	(L,0)	(VH,0)	(H,0)
10	(L,0)	(L,0)	(M,0)	(H,0)
11	(N,.17)	(M,0)	(VH,0)	(H,-.5)
12	(VL,0)	(M,-.5)	(L,0)	(H,0)
13	(P,0)	(P,0)	(P,0)	(VH,.11)
14	(VH,0)	(M,0)	(P,0)	(H,0)
15	(M,-.5)	(VL,-.11)	(N,.17)	(VL,-.11)
16	(L,0)	(L,0)	(L,0)	(M,0)
17	(H,0)	(M,0)	(P,-.17)	(VH,-.5)
18	(M,0)	(M,0)	(M,0)	(L,0)
19	(M,-.5)	(P,-.17)	(VH,0)	(VH,0)
20	(P,0)	(M,0)	(P,0)	(H,0)
21	(H,0)	(M,0)	(VH,0)	(P,0)
22	(M,-.5)	(VL,0)	(L,0)	(VL,-.11)}

To obtain the assessment  $v_2^1 = (P, -.17)$ , first, it is computed the weights of the linguistic terms of the HFLTS.

$$\alpha = \frac{i}{g} = \frac{5}{6}, \quad w_1 = \alpha = \frac{5}{6} \quad w_2 = (1 - \alpha) = \frac{1}{6}$$

Once obtained the weights, it is applied the OWA operator.

$$v_{C_2}^1 = \Delta\left(\frac{5}{6} * \Delta^{-1}(P, 0) + \frac{1}{6} * \Delta^{-1}(H, 0)\right) = (P, -.17)$$

8. Aggregation, step 2.

The assessments of the indicators for each IAEA expert are aggregated to obtain a collective value for each indicator  $v_{C_i}$ . The aggregation operator used is the weighted mean and the weights vector is  $W_{exp} = (3, 5, 4, 2)$ . The collective values of the indicators are shown in Table B.5.

Tabla B.5: Collective values for indicators

Indicator	$v_{C_i}$
1	(H,-.43)
2	(VH,.15)
3	(VH,-.29)
4	(H,-.29)
5	(M,-.13)
6	(H,-.21)
7	(M,.05)
8	(H,-.27)
9	(M,.36)
10	(M,-.43)
11	(M,.04)
12	(L,.25)
13	(P,-.13)
14	(H,.43)
15	(VL,.03)
16	(L,.14)
17	(H,.24)
18	(M,-.14)
19	(VH,-.24)
20	(VH,-.36)
21	(H,.21)
22	(L,-.41)

The value  $v_{C_1}$  is computed as follows,

$$v_{C_1} = \Delta\left(\frac{3*\Delta^{-1}(H,0)+5*\Delta^{-1}(L,0)+4*\Delta^{-1}(H,0)+2*\Delta^{-1}(P,0)}{3+5+4+2}\right) = (H, -.43)$$


---

9. *Aggregation, step 3.*

In the last aggregation process, the collective values of the indicators are aggregated to obtain a global value for the evaluation process “gaseous diffusion enrichment”. The aggregation operator is also the weighted mean and the weights vector is  $W_{ind} = (9, 3, 1)$ .

Finally the global value obtained is,  $V_{global} = (H, -.15)$ .

The global value shows that the possibility of “conducting the process gaseous diffusion enrichment” is close to High.

---



## B.9. Decision Support System

This section presents a module entitled *Hesitant*, to manage the comparative linguistic expressions and HFLTS in a decision support system so-called *Multicriteria Decision Analysis with Computing with Words* (MCDACW). It has been developed by the research group *Intelligent Systems Based on Fuzzy Decision Analysis* (SINBAD<sup>2</sup>).

First, the architecture of MCDACW is described and afterwards, the functionality of the *Hesitant* module is explained by using a specific module developed for the nuclear safeguards evaluation problem defined in Section B.8.

### B.9.1. Architecture of the Application MCDACW

The architecture used to develop the application MCDACW has been the platform Rich Client Platform (RCP) [111]. RCP is a technology that allows to select the more appropriate components and modules to join them in a specific functionality to build a complete desktop application.

There are different alternatives to develop an RCP application, such as: Eclipse RCP, Netbeans platform and Spring framework. To develop MCDACW we have chosen Eclipse RCP [111]. Eclipse RCP uses OSGi [1] as modularity and extension mechanism. It also has a lot of information and a very large community that supports it.

The application is based on 4 types of basic modules:

- *Libraries*: They are the modules that provide support to decision making.
- *GUI*: They are the modules that compound the application interface.
- *Methods*: They are Eclipse plugins that solve different decision making problems.
- *Operators*: They are Eclipse plugins that implement different aggregation operators.

The application interface is divided into 3 main views:

- *Framework*: It is the main window that is displayed when running the application and where the decision making problem is defined by adding the

experts involved in the problem, the alternatives set and criteria set. It is also defined the information domain which is assigned to each expert, alternative or criterion.

- *Gathering*: In this window the assessments of experts are introduced.
- *Rating*: It allows to select the decision making model which will be used to solve the problem. It is compound by different tabs depending of the model phases.

### B.9.2. Functionality of the Hesitant Module

MCDACW is a desktop application developed to aid solving decision making problems. It has different modules, we are focusing on the functionality of the Hesitant module that deals with comparative linguistic expressions and HFLTS. So far, the module implements the multicriteria and multicriteria multiexpert decision making models proposed in Section B.7 respectively.

Afterwards, we show the functionality of the Hesitant module by using the multicriteria multiexpert decision making problem of nuclear safeguards evaluation.

As aforementioned, the interface is divided into three views.

- *Framework*

The framework is defined by adding the experts set, alternatives set (in this case only one) and the criteria set grouped according to their type: Strong, Medium and Weak (see Fig. B.3).

---

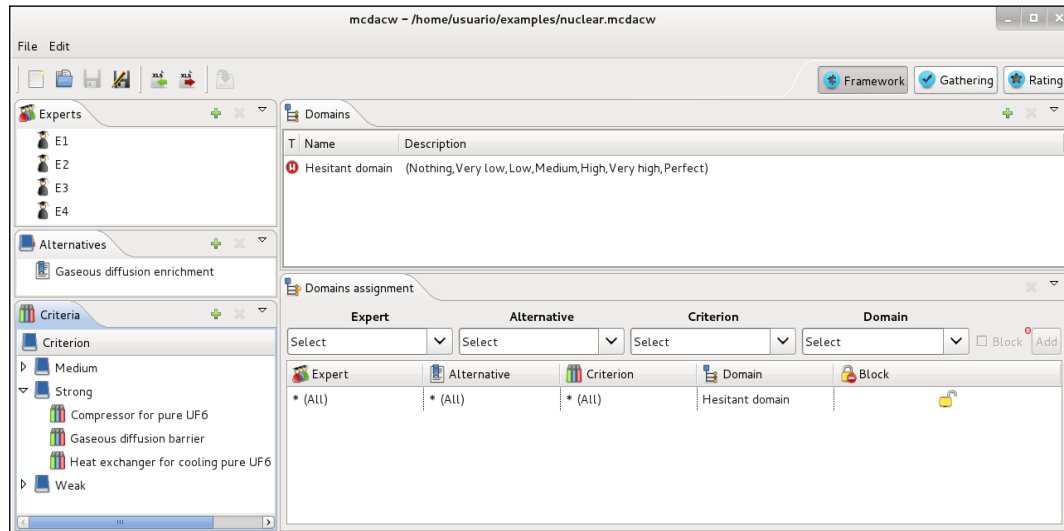


Figura B.3: Framework definition

Afterwards, the information domain used to provide the assessments is defined (see Fig. B.4) and assigned to each expert.

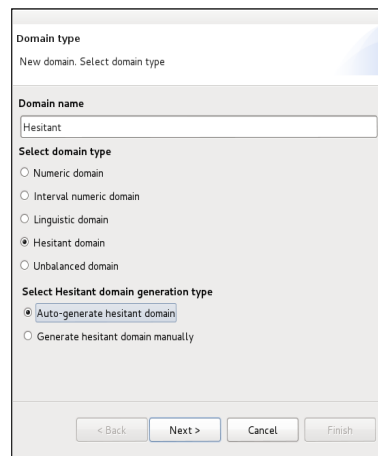


Figura B.4: Selection of the information domain

### ■ Gathering

In this part, we introduce the assessments provided by experts for each criterion. Figure B.5 shows on the bottom the syntax and semantics of the linguistic term set  $S$ , and the type of assessments that can be used.

- *Primary*: They are the single linguistic terms.
- *Composite*: They are the comparative linguistic expressions generated by the context-free grammar  $G_H$ , which are divided into *Unary*, those that use just one linguistic term and *Binary*, those that use two linguistic terms.

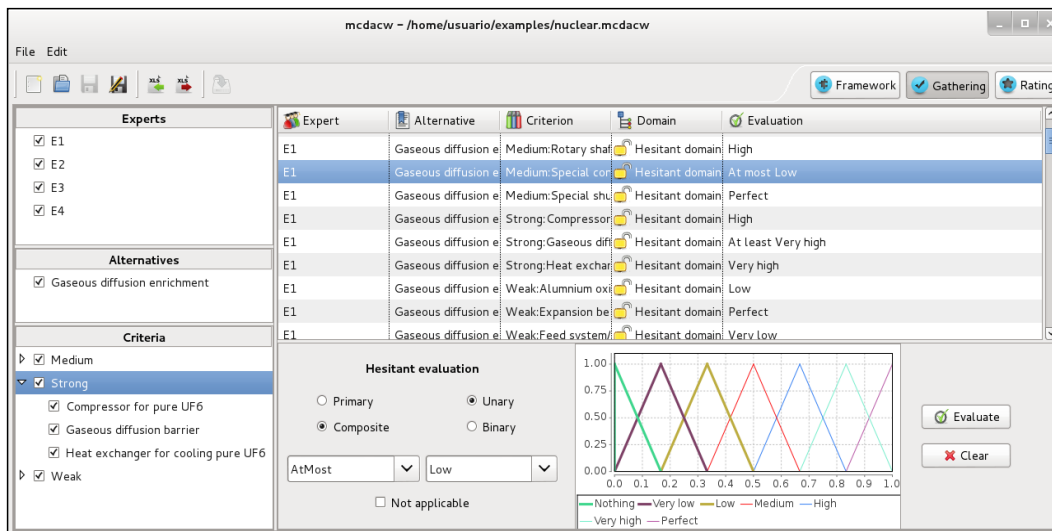


Figura B.5: Gathering of assessments

### ■ Ratings

The ratings view is compound of three tabs.

- Selection of the Method*: In this tab the decision making method to solve the problem is chosen. In this case, “Nuclear safeguards Evaluation”. It shows the description of the method and the steps to be performed (see Fig. B.6).

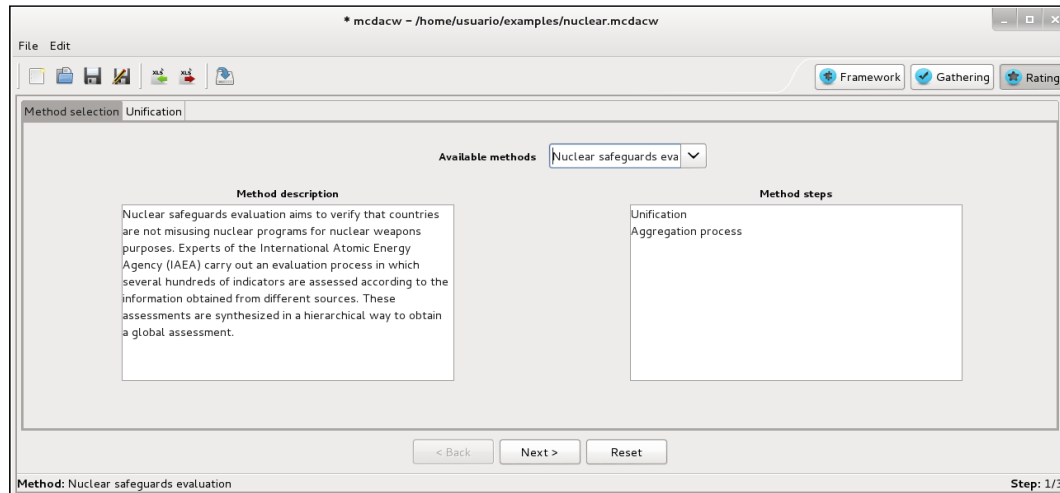


Figura B.6: Selection of the Method

- ii) *Unification*: In this step, we have to chose the aggregation operator to aggregate the linguistic terms of the HFLTS. So far, the only operator implemented is the OWA operator with the quantifier proposed by Filev and Yager [50], which will be used in this problem (see Fig. B.7).

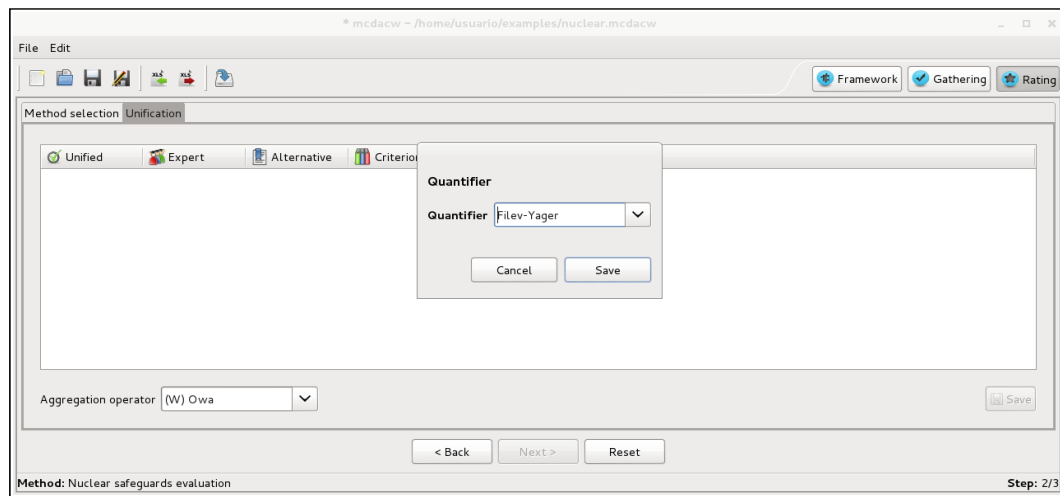


Figura B.7: Unification: selection of the aggregation operator

Figure B.8 shows the results represented by 2-tuple values.

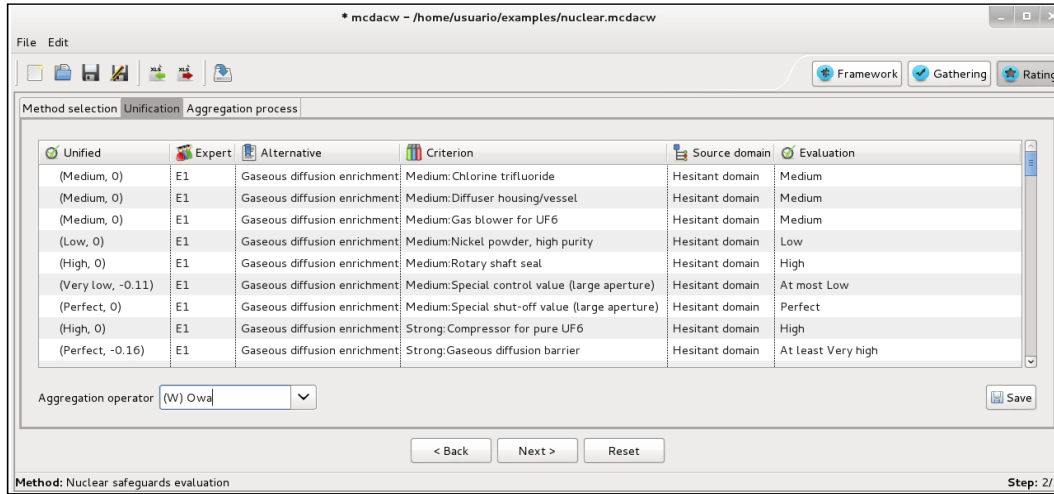


Figura B.8: Unification: results represented by 2-tuple values

- iii) *Aggregation process*: The experts assessments are aggregated by selecting the aggregation operator *weighted mean* and adding the experts weights as shown in Figure B.9.

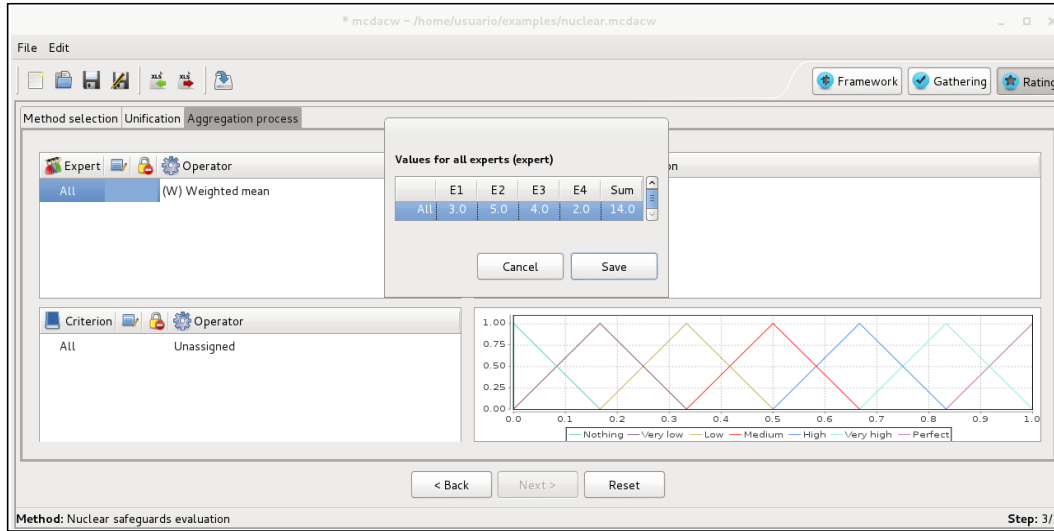


Figura B.9: Aggregation: selection of the aggregation operator

Afterwards, we select the aggregation operator to aggregate the criteria and introduce their weights according to their type. Figure B.10 shows the final result represented by a 2-tuple value for the evaluation process.

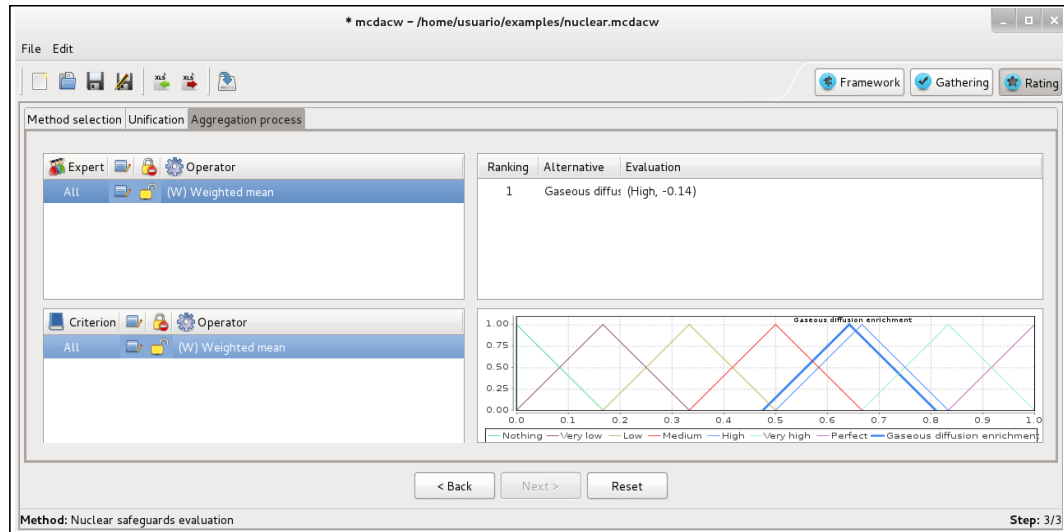


Figura B.10: Aggregation: final result

---

## B.10. Conclusions and Future Works

Finally, we will review the main proposals and results obtained in this research and point out our future works.

### B.10.1. Conclusions

Decision making is a usual process for human beings in many real world activities, such as, engineering, planning, medicine and so on. Real world decision problems are usually defined in contexts where the information is vague and imprecise. There are different approaches to deal with this type of uncertainty. In this report, we have focused on Fuzzy Linguistic Approach that provides successful results in decision making problems. The use of Fuzzy Linguistic Approach implies to operate with words. There are different linguistic models to carry out the computing with words processes and model the linguistic information. In this research, we have reviewed the most used linguistic models in decision making, by analyzing its linguistic representation and its computational model. In the revised models, we have focused on the symbolic computing models since they obtain precise and easy understandable results. Despite the benefits of these models, it was pointed out the need of improving the flexibility of expressing more complex terms, because most of them manage the linguistic terms defined a priori, and restrict experts to express their assessments or preferences by means of single linguistic terms that sometimes are not enough to reflect their knowledge.

To overcome these limitations, different researchers have proposed in the literature approaches that provided linguistic expressions more flexible and richer than single linguistic terms. However, such expressions are not similar to the expressions used by experts in decision making problems and/or do not have defined any rule to generate the expressions.

Therefore, in this research we have proposed a new linguistic representation model entitled Hesitant Fuzzy Linguistic Term Set, that models multiple linguistic terms, and we have proposed the use of context-free grammars to generate formally comparative linguistic expressions close to human beings cognitive model. The comparative linguistic expressions are modelled by means of HFLTS.

Afterwards, we have presented two group decision making models with comparative linguistic expressions which are able to offer experts higher flexibility to

---

express their preferences in situations with high degree of uncertainty.

Taking into account that in many decision making problems the alternatives are assessed by multiple criteria, we also planned to tackle such type of problems by defining a multicriteria decision making model in which the assessments can be provided by means of single linguistic terms or comparative linguistic expressions.

In the field of decision models, we have also considered that the complexity of the multicriteria decision making problems in real world leads to consider multiple points of view. Therefore, we have presented a multicriteria multiexpert decision making model in which experts can provide their assessments by using single linguistic terms or comparative linguistic expressions. In addition, an application of the multicriteria multiexpert decision making model has been applied to a nuclear safeguards evaluation problem.

Finally, a decision support system has been shown. It implements a new module to manage the comparative linguistic expressions and HFLTS in decision making problems.

As we can see, all the objectives that we pursued at the beginning of this research have been achieved by the proposals presented in the report.

### B.10.2. Future Works

Taking into account these previous results, our future works and research will focus on the following research aims:

- To improve the representation of the comparative linguistic expressions to facilitate the computing with words processes with this type of information by defining a new fuzzy envelope.
  - To define new aggregation operators to aggregate HFLTS.
  - To apply the proposed models in this research to real problems to compare the results with decision making models already defined.
  - To complete the implementation of the Hesitant module developing the group decision making models with comparative linguistic expressions and HFLTS.
  - To define new context-free grammars to generate comparative linguistic expressions according to specific decision making problems.
-

### B.10.3. Publications

Regarding the scientific spreading and publications of our scientific results, we will highlight the following contributions:

- In International Journals
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets for Decision Making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 20, issue 1, pp. 109-119, 2012.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, A Group Decision Making Model Dealing with Comparative Linguistic Expressions based on Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. *Information Sciences*. Submitted in 2nd round with minor revision.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, An Analysis of Symbolic Linguistic Computing Models in Decision Making. *International Journal of General Systems*, vol. 42, issue 1, pp. 121-136, 2013.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, D. Ruan, J. Liu, Using Collaborative Filtering for Dealing with Missing Values in Nuclear Safeguards Evaluation. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and knowledge-based Systems*, vol. 18, issue 4, pp. 431-450, 2010.
  - In International Conferences
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets. ISKE 2011, Foundations of Intelligent Systems, Advances in Intelligent and Soft Computing, vol. 122, pp. 287-295, Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, A Multicriteria Linguistic Decision Making Model Dealing with Comparative Terms. Eurofuse 2011, Advances in Intelligent and Soft Computing, vol. 107, pp. 229-241, Springer Berlin / Heidelberg, 2011.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Group Decision Making with Comparative Linguistic Terms. IPMU 2012, Advances on Computational Intelligence Communications in Computer and Information Science, vol. 297, pp. 181-190, Springer Berlin / Heidelberg, 2012.
-

- R.M. Rodríguez, M. Espinilla, L. Martínez, A Comparative Analysis of Symbolic Linguistic Computational Models. International Fuzzy Systems Association. European Society for Fuzzy Logic and Technology, Lisboa (Portugal), July 20-24th, 2009.
  - R.M. Rodríguez, L. Martínez, A Comparison among Symbolic Computational Models in Linguistic Decision Making. The 9th International FLINS Conference on Foundations and Applications of Computational Intelligence, Emei, Chengdu (China), August 2-4th, 2010.
  - In National Conferences
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Modelo Lingüístico de Toma de Decisiones Multicriterio con Expresiones Lingüísticas Comparativas. XVI Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF 2012), Valladolid (Spain), February 1st-3rd, 2012.
    - R.M. Rodríguez, L. Martínez, F. Herrera, Toma de Decisión Lingüística. Modelos Computacionales Simbólicos y su Aplicación en el Tratamiento de Percepciones. XV Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy (ESTYLF2010), Punta Umbría (Huelva), February 3-5th, 2010.
-

# Índice de tablas

2.1. Preferencias de los expertos . . . . .	57
2.2. Vectores de preferencia transformados a 2-tupla . . . . .	60
2.3. Vectores de preferencia transformados a 2-tupla proporcional . . . . .	62
2.4. Resolución del problema con distintos modelos simbólicos . . . . .	62
2.5. Análisis comparativo de modelos simbólicos . . . . .	63
2.6. Evaluación . . . . .	66
2.7. Gestión de Recursos . . . . .	67
2.8. Servicios basados en Internet . . . . .	68
2.9. Aplicaciones industriales . . . . .	69
2.10. Más aplicaciones . . . . .	69
3.1. Especialidades de los expertos . . . . .	76
3.2. Comentarios sintetizados . . . . .	78
4.1. Preferencia colectiva pesimista y optimista para cada alternativa . . . . .	116
4.2. Intervalos lingüísticos para las alternativas . . . . .	116
5.1. Esquema general de un problema de toma de decisiones multicriterio . . . . .	120
5.2. Valoraciones proporcionadas para el problema de decisiones . . . . .	123
5.3. Valores de preferencia . . . . .	134
5.4. Transformación de las valoraciones . . . . .	135
5.5. Resultados obtenidos con upper bound para cada valoración . . . . .	135
5.6. Mínimo término lingüístico para cada alternativa . . . . .	136
5.7. Resultados obtenidos con lower bound para cada valoración . . . . .	136
5.8. Máximo término lingüístico para cada alternativa . . . . .	136
5.9. Intervalos lingüísticos de las alternativas . . . . .	137

5.10. Conversión de términos lingüísticos a 2-tupla . . . . .	139
5.11. Agregación de los valores 2-tupla de cada criterio . . . . .	139
5.12. Valores colectivos para cada alternativa . . . . .	140
6.1. Descripción de los indicadores . . . . .	149
6.2. Valoraciones proporcionadas sobre los indicadores . . . . .	151
6.3. Valoraciones unificadas en CTLDD . . . . .	152
6.4. Resultado de agregar los términos de los CTLDD . . . . .	154
6.5. Valores colectivos de los indicadores . . . . .	155
B.1. Indicators description . . . . .	262
B.2. Assessments provided by IAEA experts . . . . .	264
B.3. Assessments unified into HFLTS . . . . .	266
B.4. Result of aggregating the linguistic terms of the HFLTS . . . . .	267
B.5. Collective values for indicators . . . . .	268

---

# Índice de figuras

1.1. Estructura de la evaluación global . . . . .	6
2.1. Representaciones gráficas de funciones de pertenencia . . . . .	16
2.2. Definición semántica de la variable lingüística altura utilizando funciones trapezoidales . . . . .	23
2.3. Definición semántica de la variable lingüística altura utilizando funciones triangulares . . . . .	23
2.4. Diferentes distribuciones para el concepto muy alto . . . . .	24
2.5. Esquema básico de resolución de un problema de Toma de Decisión	26
2.6. Esquema de un problema de Toma de Decisión Lingüístico . . . . .	27
2.7. Esquema de computación lingüística difusa . . . . .	29
2.8. Esquema de computación con palabras . . . . .	29
2.9. Clasificación de los modelos lingüísticos computacionales . . . . .	31
2.10. Proceso de aproximación lingüística . . . . .	34
2.11. Ejemplo de representación de conjuntos difusos Tipo-2 . . . . .	35
2.12. Ejemplo de una representación lingüística 2-tupla . . . . .	42
2.13. Ejemplo de representación del modelo propuesto por Xu . . . . .	46
2.14. Base restringida en el espacio vectorial . . . . .	54
2.15. Conjunto de 7 etiquetas con su semántica asociada . . . . .	56
2.16. Resultados del modelo basado en la Combinación Convexa . . . . .	59
2.17. Resultados del modelo 2-Tupla . . . . .	61
3.1. Premio al mejor cuadro . . . . .	77
3.2. Expresiones lingüísticas representadas mediante CTLDD . . . . .	89

---

4.1. Modelo de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas basado en la Combinación Convexa . . . . .	94
4.2. Modelo de toma de decisiones en grupo con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla . . . . .	103
4.3. Esquema del doble proceso de agregación . . . . .	105
4.4. Esquema de explotación . . . . .	106
5.1. Modelo de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas basado en max-min . . . . .	122
5.2. Operadores de agregación <i>max_lower</i> y <i>min_upper</i> . . . . .	126
5.3. Modelo de toma de decisiones multicriterio con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla . . . . .	129
5.4. Modelo de toma de decisiones multicriterio multiexperto con expresiones lingüísticas comparativas basado en 2-tupla . . . . .	141
5.5. Esquema de triple proceso de agregación . . . . .	142
7.1. Definición del marco de trabajo . . . . .	159
7.2. Selección del dominio de información . . . . .	160
7.3. Recolección de las valoraciones . . . . .	161
7.4. Selección del método a utilizar . . . . .	162
7.5. Unificación: selección del operador de agregación . . . . .	162
7.6. Unificación: resultados representados en valores 2-tupla . . . . .	163
7.7. Agregación: selección del operador de agregación . . . . .	164
7.8. Agregación: resultado final de la agregación . . . . .	164
B.1. Structure of the overall evaluation . . . . .	176
B.2. Multicriteria multiexpert decision making model with comparative linguistic expressions based on 2-tuple . . . . .	255
B.3. Framework definition . . . . .	273
B.4. Selection of the information domain . . . . .	273
B.5. Gathering of assessments . . . . .	274
B.6. Selection of the Method . . . . .	275
B.7. Unification: selection of the aggregation operator . . . . .	275
B.8. Unification: results represented by 2-tuple values . . . . .	276
B.9. Aggregation: selection of the aggregation operator . . . . .	276

---

---

B.10. Aggregation: final result . . . . . 277



# Bibliografía

- [1] Osgi core concepts overview. [http](http://www.weiglewilczek.com/fileadmin/Publications/Poster_OSGi_web.pdf) :  
[//www.weiglewilczek.com/fileadmin/Publications/Poster\\_OSGi\\_web.pdf](http://www.weiglewilczek.com/fileadmin/Publications/Poster_OSGi_web.pdf)  
(Visitado en febrero de 2013), 2013.
- [2] J. Aczél. On weighted synthesis of judgements. *Aequationes Mathematicae*, 27(1):288–307, 1984.
- [3] G.I. Adamopoulos and C.P. Pappis. Theory and methodology a fuzzy-linguistic approach to a multi-criteria sequencing problem. *European Journal of Operational Research*, 92:628–636, 1996.
- [4] K. Anagnostopoulos, H. Doukas, and J. Psarras. A linguistic multicriteria analysis system combining fuzzy sets theory, ideal and anti-ideal points for location site selection. *Expert Systems with Applications*, 35(4):2041–2048, 2008.
- [5] B. Arfi. Fuzzy decision making in politics: A linguistic fuzzy-set approach (LFSA). *Political Analysis*, 13(1):23–56, 2005.
- [6] K.T. Atanassov. Intuitionistic fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 20:87–96, 1986.
- [7] A. Awasthi, S.S. Chauhan, and H. Omrani. Application of fuzzy TOPSIS in evaluating sustainable transportation systems. *Expert Systems with Applications*, 38(10):12270–12280, 2011.
- [8] A. Balezentis, T. Balezentis, and W.K.M. Brauers. Personnel selection based on computing with words and fuzzy MULTIMOORA. *Expert Systems with Applications*, 39(9):7961–7967, 2012.

- 
- [9] H. Becker. Computing with words and machine learning in medical diagnosis. *Information Sciences*, 134:53–69, 2001.
- [10] D. Ben-Arieh and Z. Chen. Linguistic-labels aggregation and consensus measures for autocratic decision making using group recommendations. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 36(3):558–568, 2006.
- [11] P.P. Bonissone. A fuzzy sets based linguistic approach: theory and applications. In *Approximate Reasoning in Decision Analysis (M.M. Gupta and E. Sanchez, eds.)*, pages 99–111, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [12] P.P. Bonissone and K.S. Decker. *Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-Off Precision and Complexity*. In L.H. Kanal and J.F. Lemmer, Editors., *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North-Holland, 1986.
- [13] G. Bordogna, M. Fedrizzi, and G. Pasi. A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 27(1):126–132, 1997.
- [14] G. Bordogna and G. Pasi. A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44:70–82, 1993.
- [15] P. Bosc, D. Kraft, and F. Petry. Fuzzy sets in database and information systems: Status and opportunities. *Fuzzy Sets and Systems*, 3(156):418–426, 2005.
- [16] J.J. Buckley. The multiple judge, multiple criteria ranking problem: A fuzzy set approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 13(1):25–37, 1984.
- [17] T.X. Bui. *A Group Decision Support System for Cooperative Multiple Criteria Group Decision-Making*. Springer-Verlag, 1987.
- [18] G. Büyüközkan and D. Ruan. Evaluation of software development projects using a fuzzy multi-criteria decision approach. *Mathematics and Computers in Simulation*, 77(5-6):464–475, 2008.
-

- 
- [19] E.J. Castellano and L. Martínez. A web-decision support system based on collaborative filtering for academic orientation. case study of the spanish secondary school. *Journal of Universal Computer Science*, 15(14):2786–2807, 2009.
- [20] K.H. Chang and T.C. Wen. A novel efficient approach for DFMEA combining 2-tuple and the OWA operator. *Expert Systems with Applications*, 37(3):2362–2370, 2010.
- [21] S.L. Chang, R.C. Wang, and S.Y. Wang. Applying a direct multi-granularity linguistic and strategy-oriented aggregation approach on the assessment of supply performance. *European Journal of Operational Research*, 177(2):1013–1025, 2007.
- [22] S.J. Chen and C.L. Hwang. *Fuzzy Multiple Attribute Decision-Making: Methods and Applications*. 1992.
- [23] Y. Chen, X. Zeng, M. Happiette, P. Bruniaux, R. Ng, and W. Yu. Optimisation of garment design using fuzzy logic and sensory evaluation techniques. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 22(2):272–282, 2009.
- [24] N. Chomsky. Three models for the description of language. *IRE Transactions on Information Theory*, 2(3):113–124, 1956.
- [25] T.Y. Chou, C.L. Hsu, and M.C. Chen. A fuzzy multi-criteria decision model for international tourist hotels location selection. *International Journal of Hospitality Management*, 27(2):293–301, 2008.
- [26] S.J. Chuu. Evaluating the flexibility in a manufacturing system using fuzzy multi-attribute group decision-making with multi-granularity linguistic information. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 32(3-4):409–421, 2007.
- [27] S.J. Chuu. Selecting the advanced manufacturing technology using fuzzy multiple attributes group decision making with multiple fuzzy information. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3):1033–1042, 2009.
-

- 
- [28] R. de Andrés, M. Espinilla, and L. Martínez. An extended hierarchical linguistic model for managing integral evaluation. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4), 2010.
- [29] R. de Andrés and J.L. García-Lapresta. An endogenous human resources selection model based on linguistic assessments. *Neural Network World*, 20(1):91–111, 2010.
- [30] R. de Andrés, J.L. García-Lapresta, and L. Martínez. A multi-granular linguistic model for management decision-making in performance appraisal. *Soft Computing*, 14(1):21–34, 2010.
- [31] R. Degani and G. Bortolan. The problem of linguistic approximation in clinical decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 2:143–162, 1988.
- [32] M. Delgado, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. Combining numerical and linguistic information in group decision making. *Information Sciences*, 107(1-4):177–194, 1998.
- [33] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. Linguistic decision-making models. *International Journal of Intelligent Systems*, 7(5):479–492, 1992.
- [34] M. Delgado, J.L. Verdegay, and M.A. Vila. On aggregation operations of linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 8(3):351–370, 1993.
- [35] M. Delgado, M.A. Vila, and W. Voxman. A fuzziness measure for fuzzy numbers; applications. *Fuzzy sets and systems*, 94:205–216, 1998.
- [36] M. Delgado, M.A. Vila, and W. Voxman. On a canonical representation of fuzzy numbers. *Fuzzy sets and systems*, 93:125–135, 1998.
- [37] T. Demirel, N. Ç. Demirel, and C. Kahraman. Multi-criteria warehouse location selection using Choquet integral. *Expert Systems with Applications*, 37(5):3943 – 3952, 2010.
- [38] Y. Dong, W.C. Hong, Y. Xu, and S. Yu. Selecting the individual numerical scale and prioritization method in the analytic hierarchy process: A 2-tuple
-

- 
- fuzzy linguistic approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 19(1):13–25, 2011.
- [39] Y. Dong, Y. Xu, and S. Yu. Computing the numerical scale of the linguistic term set for the 2-tuple fuzzy linguistic representation model. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 17(6):1366–1378, 2009.
- [40] W. Dongrui and J.M. Mendel. Aggregation using the linguistic weighted average and interval type-2 fuzzy sets. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(6):1145–1161, 2007.
- [41] H. Doukas and J. Psarras. A linguistic decision support model towards the promotion of renewable energy. *Energy Sources Part B-Economics Planning And Policy*, 4(2):166–178, 2009.
- [42] H.C. Doukas, B.M. Andreas, and J.E. Psarras. Multi-criteria decision aid for the formulation of sustainable technological energy priorities using linguistic variables. *European Journal of Operational Research*, 182(2):844–855, 2007.
- [43] D. Dubois and H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. Kluwer Academic, New York, 1980.
- [44] M. Dursun and E.E. Karsak. A fuzzy MCDM approach for personnel selection. *Expert Systems with Applications*, 37(6):4324–4330, 2010.
- [45] M. Espinilla, I. Palomares, L. Martínez, and D. Ruan. A comparative study of heterogeneous decision analysis approaches applied to sustainable energy evaluation. *International Journal on Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 20(1):159–174, 2012.
- [46] Z.P. Fan, B. Feng, and W.L. Suo. A fuzzy linguistic method for evaluating collaboration satisfaction of NPD team using mutual-evaluation information. *International Journal of Production Economics*, 122(2):547–557, 2009.
- [47] Z.P. Fan, B. Feng, Y.H-Sun, and W. Ou. Evaluating knowledge management capability of organizations: A fuzzy linguistic method. *Expert Systems with Applications*, 36(2, Part 2):3346–3354, 2009.
-

- 
- [48] Z.P. Fan, W.L. Suo, B. Feng, and Y. Liu. Trust estimation in a virtual team: A decision support method. *Expert Systems with Applications*, 38(8):10240–10251, 2011.
- [49] Z.P. Fan, W.L. Wei, and B. Feng. Identifying risk factors of it outsourcing using interdependent information: An extended DEMATEL method. *Expert Systems with Applications*, 39(3):3832–3840, 2012.
- [50] D. Filev and R. R. Yager. On the issue of obtaining OWA operator weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 94:157–169, 1998.
- [51] J. Fodor and M. Roubens. *Fuzzy Preference Modelling and Multicriteria Decision Support*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1994.
- [52] G. Fu. A fuzzy optimization method for multicriteria decision making: An application to reservoir flood control operation. *Expert Systems with Applications*, 34(1):145–149, 2008.
- [53] J.L. García-Lapresta and M. Martínez-Panero. Linguistic-based voting through centered OWA operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(4):381–393, 2009.
- [54] M.E. Genevois and Y.E. Albayrak. A fuzzy multiattribute decision making model to evaluate human resource flexibility problem. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 14(3-5):495–509, 2008.
- [55] A.H. Gharehgozli, M. Rabbani, N. Zaerpour, and J. Razmi. A comprehensive decision-making structure for acceptance/rejection of incoming orders in make-to-order environments. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 39(9-10):1016–1032, 2008.
- [56] R.A. Gheorghe, A. Bufardi, and P. Xirouchakis. Fuzzy multicriteria decision aid method for conceptual design. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 54(1):151–154, 2005.
- [57] S. Gramajo and L. Martínez. A linguistic decision support model for qos priorities in networking. *Knowledge-based Systems*, 32(1):65–75, 2012.
-

- 
- [58] Z. Güngör and F. Arıkan. Using fuzzy decision making system to improve quality-based investment. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 18(2):197–207, 2007.
- [59] N. Halouani, H. Chabchoub, and J.M. Martel. PROMETHEE-MD-2T method for project selection. *European Journal of Operational Research*, 195(3):841–849, 2009.
- [60] F. Herrera, S. Alonso, F. Chiclana, and E. Herrera-Viedma. Computing with words in decision making: Foundations, trends and prospects. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(4):337–364, 2009.
- [61] F. Herrera, E-López, and M.A. Rodríguez. A linguistic decision model for promotion mix management. *Fuzzy Sets and Systems*, 131(1):47–61, 2002.
- [62] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 27(5):646–656, 1997.
- [63] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Choice functions and mechanisms for linguistic preference relations. *European Journal of Operational Research*, 120(1):144–161, 2000.
- [64] F. Herrera and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information. *Fuzzy Sets and Systems*, 115:67–82, 2000.
- [65] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and L. Martínez. A fusion approach for managing multi-granularity linguistic term sets in decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 114(1):43–58, 2000.
- [66] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and J.L. Verdegay. A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy Sets and Systems*, 78:73–87, 1996.
- [67] F. Herrera and L. Martínez. A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8(6):746–752, 2000.
-

- 
- [68] E. Herrera-Viedma and A.G. López-Herrera. A model of information retrieval system with unbalanced fuzzy linguistic information. *International Journal Of Intelligent Systems*, 22(11):1197–1214, 2007.
- [69] E. Herrera-Viedma and A.G. López-Herrera. A review on information accessing systems based on fuzzy linguistic modelling. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):420–437, 2010.
- [70] E. Herrera-Viedma, A.G. López-Herrera, M. Luque, and C. Porcel. A fuzzy linguistic IRS model based on a 2-tuple fuzzy linguistic approach. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems*, 15(2):225–250, 2007.
- [71] E. Herrera-Viedma, L. Martínez, F. Mata, and F. Chiclana. A consensus support system model for group decision-making problems with multigranular linguistic preference relations. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 13(5):644–658, 2005.
- [72] E. Herrera-Viedma, G. Pasi, A.G. López-Herrera, and C. Porcel. Evaluating the information quality of web sites: A methodology based on fuzzy computing with words. *Journal of American Society for Information Science and Technology*, 57(4):538–549, 2006.
- [73] E. Herrera-Viedma, E. Peis, J.M. Morales del Castillo, S. Alonso, and E.K. Anaya. A fuzzy linguistic model to evaluate the quality of web sites that store XML documents. *International Journal of Approximate Reasoning*, 46(1):226–253, 2007.
- [74] U. Hohle. *Mathematics of fuzzy sets: Logic, Topology, and Measure Theory*. Springer, 1998.
- [75] J.E. Hopcroft, R. Motwani, and J.D. Ullman. *Introducción a la Teoría de Autómatas, Lenguajes y Computación*. Addison-Wesley, Madrid, tercera edición edition, 2007.
- [76] C.L. Hwang and K. Yoon. *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications : A State-of-the-Art Survey*. Springer-Verlag, 1981.
-

- 
- [77] IAEA. *IAEA Bulletin, Annual Report*, volume 43, chapter Nuclear Security and Safeguards. 2001.
- [78] H. Ishibuchi, T. Nakashima, and M. Nii. *Classification and Modeling with Linguistic Information Granules: Advanced Approaches to Linguistic Data Mining*. Springer, Berlin, 2004.
- [79] H. Ishibuchi and H. Tanaka. Theory and methodology: Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research*, 48:219–225, 1990.
- [80] Y. Jiang. An approach to group decision making based on interval fuzzy preference relations. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 16(1):113–120, 2007.
- [81] Y. Ju, A. Wang, and X. Liu. Evaluating emergency response capacity by fuzzy AHP and 2-tuple fuzzy linguistic approach. *Expert Systems with Applications*, 39(8):6972–6981, 2012.
- [82] J. Kacprzyk. Group decision making with a fuzzy linguistic majority. *Fuzzy Sets and Systems*, 18:105–118, 1986.
- [83] J. Kacprzyk and S. Zadrozny. Computing with words in intelligent database querying: standalone and internet-based applications. *Information Sciences*, 134:71–109, 2001.
- [84] C. Kahraman and I. Kaya. A fuzzy multicriteria methodology for selection among energy alternatives. *Expert Systems with Applications*, 37(9):6270–6281, 2010.
- [85] C. Kahraman, I. Kaya, and S. Çebi. Renewable energy system selection based on computing with words. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):461–473, 2010.
- [86] G.J. Klir and B. Yuan. *Fuzzy sets and fuzzy logic: Theory and Applications*. Prentice-Hall PTR, 1995.
- [87] S. Kundu. Min-transitivity of fuzzy leftness relationship and its application to decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 86:357–367, 1997.
-

- 
- [88] J. Lawry. A methodology for computing with words. *International Journal of Approximate Reasoning*, 28:51–89, 2001.
- [89] D.F. Li. Multiattribute group decision making method using extended linguistic variables. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 17(6):793–806, 2009.
- [90] G.D. Li, D. Yamaguchi, and M. Nagai. A grey-based decision-making approach to the supplier selection problem. *Mathematical and Computer Modelling*, 46(3-4):573–581, 2007.
- [91] X. Li, D. Ruan, J. Liu, and Y. Xu. A linguistic-valued weighted aggregation operator to multiple attribute group decision making with quantitative and qualitative information. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(3):274–284, 2008.
- [92] H.Y. Lin, P.Y. Hsu, and G.J. Sheen. A fuzzy-based decision-making procedure for data warehouse system selection. *Expert Systems with Applications*, 32(3):939–953, 2007.
- [93] F. Liu and Jerry M. Mendel. Aggregation using the fuzzy weighted average as computed by the karnik mendel algorithms. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 16(1):1–12, 2008.
- [94] J. Liu, D. Ruan, and R. Carchon. Synthesis and evaluation analysis of the indicator. *International Journal Applied Mathematics and Computer Science*, 12(3):449–462, 2002.
- [95] J. Liu, D. Ruan, H. Wang, and L. Martínez. Improving nuclear safeguards evaluation through enhanced belief rule-based inference methodology. *International Journal of Nuclear Knowledge Management*, 3(3):312–339, 2009.
- [96] J. Lu, G. Zhang, and D. Ruan. Intelligent multi-criteria fuzzy group decision-making for situation assessments. *Soft Computing - A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications*, 36(1):18–26, 2008.
- [97] J. Lu, G. Zhang, D. Ruan, and F. Wu. *Multi-Objective Group Decision Making. Methods, Software and Applications with Fuzzy Set Techniques*. Imperial College Press, 2007.
-

- 
- [98] J. Lu, G. Zhang, and F. Wu. Team situation awareness using web-based fuzzy group decision support systems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(1):51–60, 2008.
- [99] J. Lu, Y. Zhu, X. Zeng, L. Koehl, J. Ma, and G. Zhang. A linguistic multi-criteria group decision support system for fabric hand evaluation. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 8(4):395–413, 2009.
- [100] J. Ma, D. Ruan, Y. Xu, and G. Zhang. A fuzzy-set approach to treat determinacy and consistency of linguistic terms in multi-criteria decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):165–181, 2007.
- [101] Z.M. Ma and L. Yan. A literature overview of fuzzy database models. *Journal of Information Science and Engineering*, 24(1):189–202, 2008.
- [102] L. Martínez. Sensory evaluation based on linguistic decision analysis. *International Journal of Approximate Reasoning*, 44(2):148–164, 2007.
- [103] L. Martínez, M.J. Barranco, L.G. Perez, and M. Espinilla. A knowledge based recommender system with multigranular linguistic information. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(3):225–236, 2008.
- [104] L. Martínez, M. Espinilla, J. Liu, L.G. Pérez, and P.J. Sánchez. An evaluation model with unbalanced linguistic information: applied to olive oil sensory evaluation. *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing*, 15(2-3):229–251, 2009.
- [105] L. Martínez, M. Espinilla, and L.G. Perez. A linguistic multigranular sensory evaluation model for olive oil. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 1(2):148–158, 2008.
- [106] L. Martínez, J. Liu, D. Ruan, and J.B. Yang. Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes. *Information Sciences*, 177(7):1533–1542, 2007.
- [107] L. Martínez, J. Liu, and J.B. Yang. A fuzzy model for design evaluation based on multiple criteria analysis in engineering systems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(3):317–336, 2006.
-

- 
- [108] L. Martínez, L.G. Pérez, and M.J. Barranco. A multi-granular linguistic based-content recommendation model. *International Journal of Intelligent Systems*, 22(5):419–434, 2007.
- [109] L. Martínez, D. Ruan, and F. Herrera. Computing with words in decision support systems: An overview on models and applications. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):382–395, 2010.
- [110] L. Martínez, D. Ruan, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. Linguistic decision making: Tools and applications. *Information Sciences*, 176(14):2297, 2009.
- [111] J. McAffer, J. Lemieux, and C. Aniszczyk. *Eclipse Rich Client Platform*. Addison-Wesley Professional, 2010.
- [112] J.M. Mendel. Advances in type-2 fuzzy sets and systems. *Information Sciences*, 177(1):84–110, 2007.
- [113] J.M. Mendel. Computing with words and its relationships with fuzzistics. *Information Sciences*, 177(4):988–1006, 2007.
- [114] J.M. Mendel. Computing with words: Zadeh, turing, popper and occam. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2(4):10–17, 2007.
- [115] G.A. Miller. The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information. *The Psychological Review*, 63:81–97, 1956.
- [116] S.C. Ngan. Decision making with extended fuzzy linguistic computing, with applications to new product development and survey analysis. *Expert Systems with Application*, 38(11):14052–14059, 2011.
- [117] J.M. Noguera, M.J. Barranco, R.J. Segura, and L. Martínez. A mobile 3d-gis hybrid recommender system for tourism. *Information Sciences*, 215(1):37–52, 2012.
- [118] S. Önüt, S.S. Kara, and E. Işık. Long term supplier selection using a combined fuzzy MCDM approach: A case study for a telecommunication company. *Expert Systems with Applications*, 36(2 Part 2):3887–3895, 2009.
-

- 
- [119] S. Önüt and S. Soner. Transshipment site selection using the AHP and TOP-SIS approaches under fuzzy environment. *Waste Management*, 28(9):1552–1559, 2008.
- [120] S.A. Orlovski. Decision-making with fuzzy preference relations. *Fuzzy Sets and Systems*, 1:155–167, 1978.
- [121] I. Palomares, J. Liu, Y. Xu, and L. Martínez. Modelling experts’ attitudes in group decision making. *Soft Computing*, 16(10):1755–1766, 2012.
- [122] R.O. Parreiras, P. Ekel, and F. Bernardes Jr. A dynamic consensus scheme based on a nonreciprocal fuzzy preference relation modeling. *Information Sciences*, 211(0):1 – 17, 2012.
- [123] R.O. Parreiras, P.Ya. Ekel, J.S.C. Martini, and R.M. Palhares. A flexible consensus scheme for multicriteria group decision making under linguistic assessments. *Information Sciences*, 180(7):1075–1089, 2010.
- [124] W. Pedrycz. *Fuzzy Modeling: Paradigms and Practices*. 1996.
- [125] W. Pedrycz, P. Ekel, and R. Parreiras. *Fuzzy Multicriteria Decision-Making: Models, Methods and Applications*. John Wiley and Sons, Ltd, 2011.
- [126] Z. Pei, Y. Xu, D. Ruan, and K. Qin. Extracting complex linguistic data summaries from personnel database via simple linguistic aggregations. *Information Sciences*, 179(14):2325–2332, 2009.
- [127] J.I. Peláez and J.M. Doña. LAMA: A linguistic aggregation of majority additive operator. *International Journal of Intelligent Systems*, 18(7):809–820, 2003.
- [128] C. Porcel, A.G. López-Herrera, and E. Herrera-Viedma. A recommender system for research resources based on fuzzy linguistic modeling. *Expert Systems with Applications*, 36(3, Part 1):5173 – 5183, 2009.
- [129] R.M. Rodríguez, L. Martínez, and F. Herrera. Hesitant fuzzy linguistic term sets for decision making. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 20(1):109–119, 2012.
-

- 
- [130] M. Roubens. Some properties of choice functions based on valued binary relations. *European Journal of Operational Research*, 40:309–321, 1989.
- [131] M. Roubens. Fuzzy sets and decision analysis. *Fuzzy Sets and Systems*, 90:199–206, 1997.
- [132] T.L. Saaty. *The Analytic Hierarchy Process*. MacGraw-Hill, New York, 1980.
- [133] A. Sanayei, S.F. Mousavi, and A.Yazdankhah. Group decision making process for supplier selection with VIKOR under fuzzy environment. *Expert Systems with Applications*, 37(1):24–30, 2010.
- [134] P.J. Sánchez, L. Martínez, C. García, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma. A fuzzy model to evaluate the suitability of installing an ERP system. *Information Sciences*, 179(14):2333–2341, 2009.
- [135] K.S. Schmucker. *Fuzzy Sets, Natural Language Computations, and Risk Analysis*. Computer Science Press, Rockville, MD, 1984.
- [136] Z. Sen and A. Altunkaynak. Fuzzy system modelling of drinking water consumption prediction. *Expert Systems with Applications*, 36(9):11745–11752, 2009.
- [137] A. Sengupta and T. Kumar Pal. On comparing interval numbers. *European Journal of Operational Research*, 127:28–43, 2000.
- [138] G. Shevchenko, L. Ustinovichius, and A. Andruševičius. Multi-attribute analysis of investments risk alternatives in construction. *Technological and Economic Development of Economy*, 14(3):428–443, 2008.
- [139] Y.H. Sun, J. Ma, Z.P. Fan, and J. Wang. A group decision support approach to evaluate experts for R&D project selection. *IEEE Transactions on Engineering Management*, 55(1):158–170, 2008.
- [140] W.S. Tai and C.T. Chen. A new evaluation model for intellectual capital based on computing with linguistic variable. *Expert Systems with Applications*, 36(2):3483–3488, 2009.
-

- 
- [141] Y. Tang and J. Zheng. Linguistic modelling based on semantic similarity relation among linguistic labels. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(12):1662–1673, 2006.
- [142] R.M. Tong and P.P. Bonissone. A linguistic approach to decision making with fuzzy sets. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-10(11):716–723, 1980.
- [143] V. Torra. Negation functions based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11:975–988, 1996.
- [144] V. Torra. Hesitant fuzzy sets. *International Journal of Intelligent Systems*, 25(6):529–539, 2010.
- [145] V. Torra and Y. Narukawa. On hesitant fuzzy sets and decision. In *The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1378–1382, 2009.
- [146] I. Truck and H. Akdag. Manipulation of qualitative degrees to handle uncertainty: Formal models and applications. *Knowledge and Information Systems*, 9(4):385–411, 2006.
- [147] I. Truck and J. Malenfant. Toward a unification of some linguistic representation models : A vectorial approach. In D. Ruan, T. Li, Y. Xu, G. Chen, and E. E Kerre, editors, *Computational Intelligence: Foundations and Applications*, pages 610–615. World Scientific, 2010.
- [148] I.B. Türkşen. Type 2 representation and reasoning for CWW. *Fuzzy Sets and Systems*, 127:17–36, 2002.
- [149] J.H. Wang and J. Hao. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(3):435–445, 2006.
- [150] J.H. Wang and J. Hao. An approach to computing with words based on canonical characteristic values of linguistic labels. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15(4):593–604, 2007.
- [151] R.C. Wang and S.J. Chuu. Group decision-making using a fuzzy linguistic approach for evaluating the flexibility in a manufacturing system. *European Journal of Operational Research*, 154(3):563–572, 2004.
-

- 
- [152] W.P. Wang. Evaluating new product development performance by fuzzy linguistic computing. *Expert Systems with Applications*, 36(6):9759–9766, 2009.
- [153] W.P. Wang. Toward developing agility evaluation of mass customization systems using 2-tuple linguistic computing. *Expert Systems with Applications*, 36(2):3439–3447, 2009.
- [154] Y.M. Wang and T.M.S. Elhag. A fuzzy group decision making approach for bridge risk assessment. *Computers and Industrial Engineering*, 53(1):137–148, 2007.
- [155] Y.M. Wang, J.B. Yang, and D.L. Xu. A preference aggregation method through the estimation of utility intervals. *Computers and Operations Research*, 32:2027–2049, 2005.
- [156] Y.J. Xu and Q.L. Da. Standard and mean deviation methods for linguistic group decision making and their applications. *Expert Systems with Applications*, 37(8):5905–5912, 2010.
- [157] Z. Xu. Linguistic aggregation operators: An overview. *Fuzzy Sets and Their Extension: Representation, Aggregation and Models (Eds. H. Bustince et al.)*, pages 163–181, 2008.
- [158] Z.S. Xu. EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6):791–810, 2004.
- [159] Z.S. Xu. Method based on fuzzy linguistic assessments and GIOWA operator in multi-attribute group decision-making. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 24(2):218–224, 2004.
- [160] Z.S. Xu. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166(1-4):19–30, 2004.
- [161] Z.S. Xu. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion*, 7(2):231–238, 2006.
-

- 
- [162] Z.S. Xu and J. Chen. Some models for deriving the priority weights from interval fuzzy preference relations. *European Journal of Operational Research*, 184:266–280, 2008.
- [163] R.R. Yager. A new methodology for ordinal multiobjective decisions based on fuzzy sets. *Decision Sciences*, 12:589–600, 1981.
- [164] R.R. Yager. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 18:183–190, 1988.
- [165] R.R. Yager. Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. *Group Decision and Negotiation*, 2(1):81–93, 1993.
- [166] R.R. Yager. An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3-4):237–261, 1995.
- [167] R.R. Yager. *Computing with words and information/intelligent systems*, volume 33 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, chapter Approximate reasoning as a basis for computing, pages 50–77. Physica Verlag, New York, 1999.
- [168] R.R. Yager. On the retranslation process in Zadeh’s paradigm of computing with words. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 34(2):1184–1195, 2004.
- [169] R.R. Yager. Aggregation of ordinal information. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(3):199–219, 2007.
- [170] R.R. Yager. Concept representation and database structures in fuzzy social relational networks. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics Part A: Systems and Humans*, 40(2):413–419, 2010.
- [171] T. Yang, M.C. Chen, and C.C. Hung. Multiple attribute decision-making methods for the dynamic operator allocation problem. *Mathematics and Computers in Simulation*, 73(5):285–299, 2007.
- [172] K. Yoon. The propagation of errors in multiple-attribute decision analysis: a practical approach. *Journal of the Operational Research Society*, 40:681–686, 1989.
-

- 
- [173] Q. Yue, F. Zhiping, and L. Shi. New approach to determine the priorities from interval fuzzy preference relations. *Journal of System Engineering and Electronics*, 22(2):267–273, 2011.
- [174] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.
- [175] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. part I. *Information Sciences*, 8(3):199–249, 1975.
- [176] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. part II. *Information Sciences*, 8(4):301–357, 1975.
- [177] L. Zadeh. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. part III. *Information Sciences*, 9(1):43–80, 1975.
- [178] L. Zadeh. Fuzzy logic = computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 94(2):103–111, 1996.
- [179] L. Zadeh. *Computing with Words: Principal Concepts and Ideas*, volume 277 of *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, 2012.
- [180] M. Zarghami and F. Szidarovszky. Revising the owa operator for multi criteria decision making problems under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 198(1):259–265, 2009.
- [181] D.F. Zhang, J.L. Zhang, K.K. Lai, and Y.B. Lu. An novel approach to supplier selection based on vague sets group decision. *Expert Systems with Applications*, 36(5):9557–9563, 2009.
- [182] S. Zhang. A model for evaluating computer network security systems with 2-tuple linguistic information. *Computer and Mathematics with Applications*, 62(4):1916–1922, 2011.
- [183] T. Zhang, G. Zhang, J. Ma, and J. Lu. Power distribution system planning evaluation by a fuzzy multi-criteria group decision support system. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 3(4):474–485, 2010.
- [184] S.M. Zhou, R.I. John, F. Chiclana, and J.M. Garibaldi. On aggregating uncertain information by type-2 OWA operators for soft decision making. *International Journal of Intelligent Systems*, 25:540–558, 2010.
-

- 
- [185] H.J. Zimmermann. *Fuzzy sets. Theory and its Applications*. Kluwer Academic, 1996.
- [186] L. Zou, X. Liu, Z. Wu, and Y. Xu. A uniform approach of linguistic truth values in sensor evaluation. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 7(4):387–397, 2008.
-